Aula 22. *Máximos e mínimos*

22.1 *Definições básicas.*

Nesta aula, vamos estender uma das ideias mais importantes do Cálculo I para funções de duas variáveis. Vamos começar a tentar encontrar mínimos e máximos de funções.

Nesta aula, veremos como identificar mínimos e máximos relativos. Lembre-se também de que frequentemente usaremos a palavra **extrema** para nos referirmos a mínimos e máximos.

A definição de extremos relativos para funções de duas variáveis é idêntica àquela para funções de uma variável, só precisamos lembrar agora que estamos trabalhando com funções de duas variáveis. Assim, para fins de completude, aqui está a definição de mínimos e máximos relativos para funções de duas variáveis.

Definição: Máximos e mínimos relativos

(1) Uma função $f(x,y)$ tem um **mínimo relativo** no ponto (a,b) se
$$f(x,y) \geq f(a,b)$$
para todos os pontos (x,y) em alguma região em torno de (a,b).

(2) Uma função $f(x,y)$ tem um **máximo relativo** no ponto (a,b) se
$$f(x,y) \leq f(a,b)$$
para todos os pontos (x,y) em alguma região em torno de (a,b).

An... raft). Prof Kostiantyn

Definição: Máximos e mínimos globais

(1) Uma função $f(x,y)$ tem um **mínimo global** no ponto (a,b) se
$$f(x,y) \geq f(a,b)$$
para todos os pontos (x,y) em domínio da função $f(x,y)$.

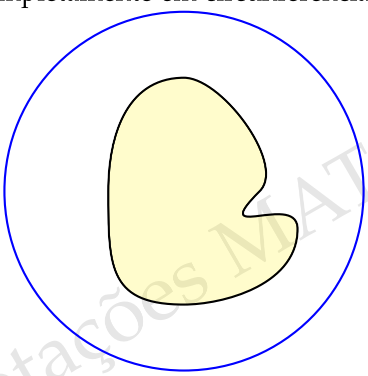
(2) Uma função $f(x,y)$ tem um **máximo global** no ponto (a,b) se
$$f(x,y) \leq f(a,b)$$
para todos os pontos (x,y) em domínio da função $f(x,y)$.

Para analisar uma função sobre seus máximos e mínimos vamos precisar certas definições para os conjuntos no plano.

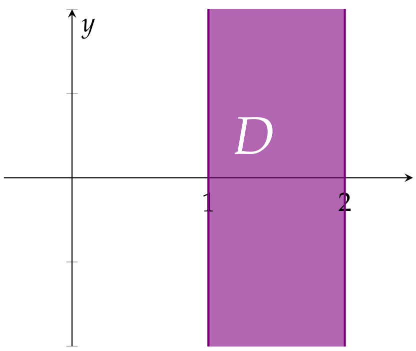
Definição: Conjunto limitado

Um conjunto D no plano $\mathbb{R}^2$ chama-se **limitado** se existe uma bola B_r com raio r finito que contém D completamente, ou seja $D \subset B_r$.

Por exemplo o conjunto abaixo é limitado, pois está contido completamente em circunferência azul.



Por outro lado a conjunto
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2\},$$
é ilimitado, pois não é possível encontrar uma circunferência com raio finito que contém D completamente (sendo que D é uma faixa infinita no plano).

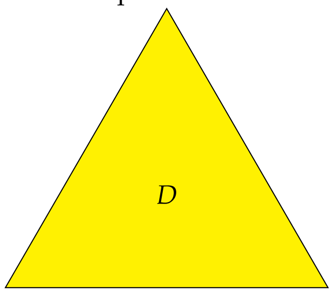


Anotações MAT3210 (Draft). Prof Kostiantyn

Definição: Conjunto fechado

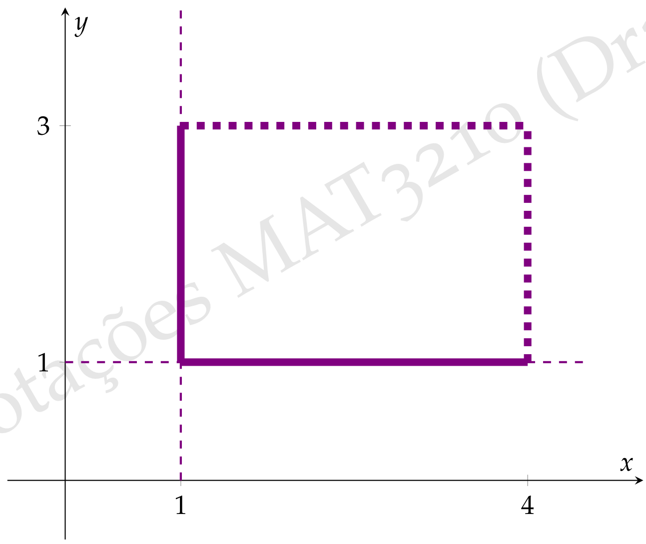
Um conjunto D no plano $\mathbb{R}^2$ chama-se **fechado** quando D contém a sua fronteira, ou seja todos os pontos x tais que qualquer vizinhança desses pontos contém os pontos de D e os pontos fora de D.

Por exemplo o triangulo de baixo é um conjunto fechado, pois contém completamente a sua fronteira.



Por outro lado, seja D o seguinte retângulo no plano

$$D = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \begin{array}{l} 1 \leq x < 4 \\ 1 \leq y < 3 \end{array} \right\}$$



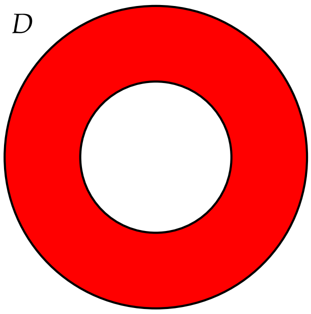
Assim, D não é fechado pois não contém completamente sua fronteira.

Definição: Conjunto compacto

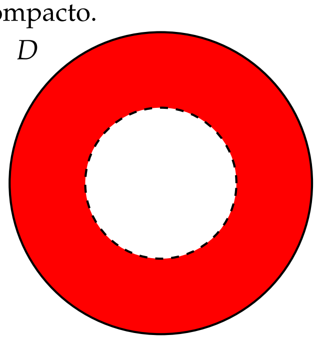
Um conjunto D no plano $\mathbb{R}^2$ chama-se **compacto** se ele é limitado e fechado.

Por exemplo, o seguinte conjunto D é limitado e fechado, assim ele é compacto.

Anotações MAT3210 (Draft). Prof Kostiantyn



Por outro lado o conjunto D abaixo não é fechado, assim não é compacto.



Observem, que a gente tirou a circunferência menor, ou seja parte da fronteira. Mais um exemplo do conjunto não compacto é conjunto

$$D = \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{l} 1 \le x < 4 \\ 1 \le y < 3 \end{array} \right\},$$

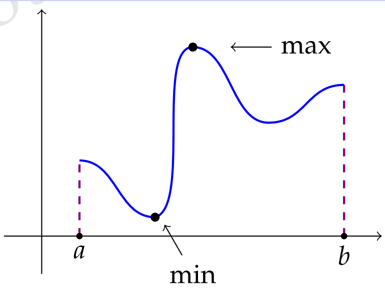
pois ele é fechado mas não é limitado (assim não compacto).

22.2 *Teorema de Weierstrass*

Vamos lembrar o seguinte fato bastante útil do Calculo I.

Theorem 22.1: Teorema de Weierstrass

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função continua. Assim f admite máximo e mínimo absoluto em $[a,b]$.



De fato, temos que para funções de duas variáveis temos um teorema bastante parecido (onde vamos usar a noção do conjunto compacto, no lugar de intervalo $[a,b]$).

MAT3210 (Draft). Prof Kostiantyn

Theorem 22.2: Teorema de Weierstrass

Seja $f(x,y)$ uma função continua num compacto D (conjunto limitado e fechado). Assim f admite máximo e mínimo absoluto em D, ou seja existem dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em D tais que

$$f(x_1, y_1) \leq f(x,y) \leq f(x_2, y_2),$$

para todos (x,y) em D.

Para encontrar os máximos e mínimos da função $f(x,y)$, vamos precisar a noção de *pontos criticos*. Ou seja a gente vai estender a ideia de pontos críticos para funções de duas variáveis. Lembre-se de que um ponto crítico da função $f(x)$ era um número $x = c$ de modo que também $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe. Temos uma definição semelhante para pontos críticos de funções de duas variáveis.

Definição: Ponto critico

O ponto (a,b) é um **ponto crítico** de $f(x,y)$, desde que uma das seguintes opções seja verdadeira,

(1) $\nabla f(a,b) = (0,0)$ (isso é equivalente a dizer que $f_x(a,b) = 0$ e $f_y(a,b) = 0$),

(2) $f_x(a,b)$ e/ou $f_y(a,b)$ não existe.

Nos temos o seguinte fato útil.

Teorema 22.3

Se o ponto (a,b) é um extremo relativo da função $f(x,y)$ e as derivadas de primeira ordem de $f(x,y)$ existem em (a,b) assim (a,b) é também um ponto crítico de $f(x,y)$ ou seja teremos

$$\nabla f(a,b) = (0,0).$$

Resumindo a gente tem o seguinte procedimento para encontrar o máximo e mínimo absolutos de uma função continua num compacto D.

Algoritmo para encontrar os MAX e MIN absolutos:

(1) Encontrar os pontos criticos da função $f(x,y)$ dentro da região D e calcular os valores da função $f(x,y)$ nestes pontos;

(2) Encontrar o máximo e mínimo da função $f(x,y)$ na fronteira da região D, reduzindo o problema para funções de uma variável real;

(3) Comparar os valores recebidos em (1) e (2) decidindo onde é MAX e MIN.

Prof Kostiantyn

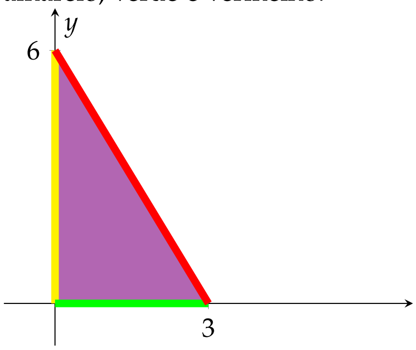
22.3 *Exemplos*

Exemplo 22.1

Seja $f(x,y) = xy - x - y + 1$ com domínio

$$D = \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{l} x \geq 0, y \geq 0 \\ 2x + y \leq 6 \end{array} \right\}$$

O conjunto D é compacto, pois é limitado e contém a sua fronteira formada pelos segmentos: amarelo, verde e vermelho.



Aplicando o algoritmo passo por passo, temos
(1) $\nabla f(x,y) = (y-1, x-1)$. Assim $\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (1,1)$. Agora

$$f(1,1) = 1 - 1 - 1 + 1 = 0.$$

(2) Agora vamos analizar a função na fronteira. A fronteira consiste de 3 partes: amarelo, verde e vermelho. Ao longo da parte verde, temos que $y = 0$ e $0 \leq x \leq 3$, assim $f(x,y)$ nessa parte é $f(x,0) = -x + 1$, e max é $f(0,0) = 1$ e min é $f(3,0) = -2$.

Ao longo da parte amarelo, temos que $x = 0$ e $0 \leq y \leq 6$, assim $f(x,y)$ nessa parte é $f(0,y) = -y + 1$, e max é $f(0,0) = 1$ e min é $f(0,6) = -5$.

Finalmente, longo da parte vermelho, temos $y = 6 - 2x$ e $0 \leq x \leq 3$. Assim $f(x,y)$ nessa parte é:

$$f(x, 6-2x) = x(6-2x) - x - (6-2x) + 1 = -2x^2 + 7x - 5.$$

Vamos chamar $g(x) = -2x^2 + 7x - 5$, precisamos encontrar max e min da $g(x)$ no intervalo $[0,3]$. Derivando, temos $g'(x) = -4x + 7$, assim $x = \frac{7}{4}$ é único ponto critico nessa função, ou seja

$$f(7/4, 6 - 2 \cdot 7/4) = g(7/4) = 9/8.$$

$g(0) = f(0,6) = -5$ e $g(3) = f(3,0) = -2$.

(3) Agora, juntando os resultados recebidos em (1) e (2), temos que

$$9/8, \quad \text{é máximo absoluto da função em } (x,y) = (7/4, 5/2),$$

e

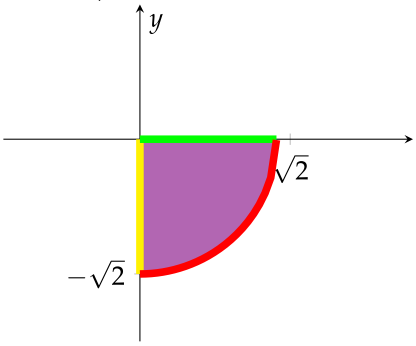
$$-5, \quad \text{é mínimo absoluto da função em } (x,y) = (0,6).$$

Exemplo 22.2

Seja $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$ com domínio

$$D = \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{c} x \geq 0, y \leq 0 \\ (x^2+y^2) \leq 2 \end{array} \right\}$$

O conjunto D é compacto, pois é limitado e contém a sua fronteira formada pelos segmentos: amarelo, verde e vermelho.



Aplicando o algoritmo passo por passo, temos
(1)

$$\nabla f(x,y) = \left(ye^{-x^2-y^2} + xye^{-x^2-y^2}(-2x), xe^{-y^2-x^2} + xye^{-x^2-y^2}(-2y) \right).$$

Assim $\nabla f(x,y) = (0,0)$ se

$$\begin{cases} ye^{-x^2-y^2}\left(1-2x^2\right) = 0 \\ xe^{-x^2-y^2}\left(1-2y^2\right) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ ou } x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ x = 0 \text{ ou } y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Único ponto critico dento da região é $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{2}{4} \cdot e^{-1} = -\frac{1}{2e}$.

(2) Agora vamos analizar a função na fronteira. A fronteira consiste de 3 partes: amarelo, verde e vermelho. Ao longo da parte verde, ou amarelo temos que $y = 0$ ou $x = 0$ assim $f(x,y)$ nessas partes é $f(x,0) = 0 = f(0,y)$.

Ao longo da parte vermelho, podemos usar a parametrização $(x(t), y(t)) = (\sqrt{2}\,\text{sen}\,t, \sqrt{2}\cos t)$ com $\frac{3\pi}{2} \leq t \leq 2\pi$. Assim, temos:

$$g(t) = f(x(t), y(t)) = 2\cos t\,\text{sen}\,t \cdot e^{-2} = \text{sen}\,2t \cdot e^{-2}$$

Derivando, temos

$$g'(t) = e^{-2} \cdot \cos 2t \cdot 2 = 0$$

ou seja $2t = \frac{\pi}{2} + k\pi$. E unico ponto nesse formato no intervalo $\frac{3\pi}{2} \leq t \leq 2\pi$ é ponto $t = \dfrac{7\pi}{4}$. Neste caso

$$x\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 1,\ y\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -1, \quad f(1,-1) = -e^{-2} = -\frac{1}{e^2}.$$

(3) Agora, juntando os resultados recebidos em (1) e (2), temos que $-\dfrac{1}{2e} < -\dfrac{1}{e^2}$. Assim

$$0, \quad \text{é máximo absoluto da função em } (x,y) = (0,0),$$

e

$$-\frac{1}{2e}, \quad \text{é mínimo absoluto da função em } (x,y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Exercício 22.1: (Trabalho p/ casa)

Encontre o mínimo absoluto e o máximo absoluto de

$$f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 2x^2y + 4$$

no retângulo dado por

$$-1 \leq x \leq 1$$

e

$$-1 \leq y \leq 1.$$

Resposta: O mínimo absoluto está em $(0,0)$, e o máximo absoluto ocorre em $(1,-1)$ e $(-1,-1)$.

Exercício 22.2: (Trabalho p/ casa)

Encontre o mínimo absoluto e o máximo absoluto de

$$f(x,y) = 2x^2 - y^2 + 6y$$

no disco de raio $4, x^2 + y^2 \leq 16$.

Resposta: O mínimo absoluto está em $(0,-4)$, e o máximo absoluto ocorre em $(-\sqrt{15},1)$ e $(\sqrt{15},1)$.

Anotações MAT3210 (D... Prof Kostiantyn