Aula 21. *Derivadas de ordem superior*

Assim como tivemos derivadas de ordem superior com funções de uma variável, também teremos derivadas de ordem superior de funções de mais de uma variável. No entanto, desta vez teremos mais opções, pois temos mais de uma variável.

Considere o caso de uma função de duas variáveis, $f(x,y)$, uma vez que ambas as derivadas parciais de primeira ordem também são funções de x e y, poderíamos, por sua vez, diferenciar cada uma em relação a x ou y. Isso significa que, para o caso de uma função de duas variáveis, haverá um total de quatro derivadas de segunda ordem possíveis. Aqui estão elas e as notações que usaremos para denotá-las:

$$
\begin{aligned}
(f_x)_x &= f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\
(f_x)_y &= f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\
(f_y)_x &= f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\
(f_y)_y &= f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}
\end{aligned}
$$

As derivadas parciais de segunda e terceira ordem são freqüentemente chamadas de derivadas parciais mistas, uma vez que estamos tomando derivadas com respeito a mais de uma variável. Observe também que a ordem em que pegamos as derivadas é dada pela notação para cada uma delas. Se estivermos usando a notação subscrita, por exemplo, f_{xy}, então vamos diferenciar da esquerda para a direita. Em outras palavras, neste caso, vamos diferenciar primeiro em relação a x e, em seguida, em relação a y. Com a notação fracionária, por exemplo. $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, é o oposto. Nestes casos, diferenciamos o movimento ao longo do denominador da direita para a esquerda. Portanto, novamente, neste caso, diferenciamos em relação a x primeiro e, em seguida, y. Vamos dar uma rápida olhada em exemplos.

Exemplo 21.1

Seja $f(x,y) = x^2y^3 + xy^5$. Assim as derivadas parciais são:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^3 + y^5, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2y^2 + 5xy^4.$$

Agora as derivadas da segunda ordem são:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 2y^3,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= 6xy^2 + 5y^4,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= 6xy^2 + 5y^4,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= 6x^2y + 20xy^3.\end{aligned}$$

Exemplo 21.2

Seja $f(x,y) = x^4y^5 + 3x^2y - 4xy^6$. Assim as derivadas parciais são:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3y^5 + 6xy - 4y^6, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 5x^4y^4 + 3x^2 - 24xy^5.$$

Agora as derivadas da segunda ordem são:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 2x^2y^5 + 6y,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= 20x^3y^4 + 6x - 24y^5,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= 20x^3y^4 + 6x - 24y^5,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= 20x^4y^3 - 120xy^4.\end{aligned}$$

Agora também vamos notar que em ambos os casos,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y).$$

Daqui um pouco vamos ver que isso não é por acaso. Se a função for “boa o suficiente”, esse sempre será o caso.

Exemplo 21.3

Seja $f(x,y) = \cos(2x) - x^2\mathbf{e}^{5y} + 3y^2$. Assim as derivadas parciais são:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2\sin(2x) - 2x\mathrm{e}^{5y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -5x^2\mathbf{e}^{5y} + 6y.$$

Agora as derivadas da segunda ordem são:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -4\cos(2x) - 2\mathbf{e}^{5y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -10x\mathbf{e}^{5y},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -10x\mathbf{e}^{5y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -25x^2\mathbf{e}^{5y} + 6.$$

Então, o que é "bom o suficiente"? O seguinte teorema nos diz.

Theorem 21.1: Teorema de Clairaut-Schwarz

Seja f uma função num disco D. Se as derivadas parciais $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ são continuas em D. Então, para qualquer ponto $(x,y) \in D(x,y) \in D$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x,y)$$

De fato precisamos tomar certo cuidado com o Teorema de Clairaut-Schwarz. Considere a seguinte função:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

A derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ em qualquer ponto $(x,y) \neq (0,0)$ pode ser calculada como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3\left(x^2+y^2\right) - 2x^2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Em ponto $(0,0)$, podemos calcular a derivada usando a definição

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{0-0}{x} = 0.$$

Assim a derivada tem forma

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3\left(x^2+y^2\right) - 2x^2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Semelhante, a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ tem forma:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+3x^3y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Alexis Claude de Clairaut (1713–1765)

Hermann Amandus Schwarz (1843–1921)

Agora vamos calcular $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$. Temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) &= \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,y)}{y} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{y^5}{y^5} = 1.\end{aligned}$$

Ou seja

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

neste caso particular. Observem que isso aconteceu pois as derivadas $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ não continuas em $(0,0)$, e portanto não podemos aplicar o Teorema de Clairaut-Schwarz.

Exercício 21.1

Calcule todas as derivadas da segunda ordem da

$$f(x,y) = \ln\left(1 + x^2 + y^2\right).$$

Solução 21.1

Temos que as derivadas parciais são

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{1+x^2+y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{1+x^2+y^2}.$$

Agora usando a regra do quociente temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{2\left(1+x^2+y^2\right) - 2x \cdot 2x}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= \frac{-2y \cdot 2x}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{-2x \cdot 2y}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{2\left(1+x^2+y^2\right) - 2y \cdot 2y}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}.\end{aligned}$$

Lembrete: Derivada do quociente:

$$\left(\frac{f}{g}\right) = \left(\frac{f'g - fg'}{g^2}\right).$$

Até agora, examinamos apenas as derivadas de segunda ordem. Existem, é claro, derivadas de ordem superior também. Aqui estão algumas das derivadas parciais de terceira ordem da função de duas variáveis.

$$f_{xyx} = \left(f_{xy}\right)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x},$$
$$f_{yxx} = \left(f_{yx}\right)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}.$$

Observe também que, para ambos, diferenciamos uma vez em relação a y e duas vezes em relação a x. Há também outra derivada parcial de terceira ordem na qual podemos fazer isso, f_{xxy}. Há uma extensão do Teorema de Clairaut-Schwarz que diz que se todas as três derivadas parciais são contínuas, então elas devem ser todas iguais,

$$f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}.$$

Até este ponto, vimos apenas funções de duas variáveis, mas tudo o que fizemos até agora funcionará independentemente do número de variáveis que temos na função e há extensões naturais do teorema do Teorema de Clairaut-Schwarz para todos desses casos também. Por exemplo,

$$f_{xz}(x,y,z) = f_{zx}(x,y,z),$$

desde que ambas as derivadas sejam contínuas. Em geral, podemos estender o Teorema de Clairaut-Schwarz para qualquer função e derivadas parciais mistas. O único requisito é que em cada derivada façamos diferenciação em relação a cada variável o mesmo número de vezes. Em outras palavras, desde que atendamos à condição de continuidade, o seguinte será igual

$$f_{ssrtsrr} = f_{trsrssr}$$

porque em cada caso nos diferenciamos com relação a t uma vez, s três vezes e r três vezes.

Exemplo 21.4

Seja
$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$
Vamos mostrar que:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$
Escrevendo $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$, temos que:
$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) 2x = -x \cdot \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) 2y = -y \cdot \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}, \\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) 2z = -z \cdot \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}.
\end{aligned}$$
Derivando mais uma vez temos,
$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) &= -\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} + (-x)\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2} \cdot 2x \\
&= -\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2} \cdot \left((x^2+y^2+z^2) - 3x^2\right), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) &= -\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} + (-y)\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2} \cdot 2y \\
&= -\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2} \cdot \left((x^2+y^2+z^2) - 3y^2\right), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) &= -\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} + (-z)\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2} \cdot 2z \\
&= -\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2} \cdot \left((x^2+y^2+z^2) - 3z^2\right).
\end{aligned}$$

Agora somando $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, temos
$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= -\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2} \cdot \left(3(x^2+y^2+z^2) - 3x^2 - 3y^2 - 3z^2\right) \\
&= -\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2} \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Exemplo 21.5

Seja $f(x,y,z) = \operatorname{sen}(3x + yz)$. Vamos encontrar $\dfrac{\partial^4 f}{\partial z \partial y \partial x^2}$. Temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos\left(3x + y^2\right) \cdot 3.$$

Derivando mais uma vez em relação x, recebemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -9 \operatorname{sen}\left(3x + y^2\right).$$

Agora derivando em relação y, temos

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x,y) = -9z \cdot \cos(3x + yz).$$

Finalmente, derivando em relação z, temos

$$\frac{\partial^4 f}{\partial z \partial y \partial x^2}(x,y) = -9\cos(3x + yz) + 9z \cdot \operatorname{sen}(3x + yz) \cdot y.$$

Exercício 21.2: (Trabalho p/ casa)

(a) Encontre f_{xxyzz} para $f(x,y,z) = z^3 y^2 \ln(x)$.

(b) Encontre $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$ para $f(x,y) = \mathbf{e}^{xy}$.

Resposta: (a) $f_{xxyzz} = -\frac{12zy}{x^2}$, (b) $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = 2y\mathrm{e}^{xy} + xy^2\mathrm{e}^{xy}$.

Exercício 21.3: (Trabalho p/ casa)

Seja $f(x,y) = (x+y)e^{\frac{x}{y}}$. Verefique que

$$x \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$