Aula 20. Derivada direcional

Até este ponto, vimos apenas as duas derivadas parciais $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$. Lembre-se de que esses derivados representam a taxa de variação de f conforme variamos x (mantendo y fixos e conforme variamos y (mantendo x fixos), respectivamente. Agora precisamos discutir como encontrar o taxa de variação de f se permitirmos que x e y mudem simultaneamente. O problema aqui é que há muitas maneiras de permitir que x e y mudem. Por exemplo, uma poderia ser mudando mais rápido do que o outro e também há a questão de saber se cada um está aumentando ou diminuindo. Portanto, antes de descobrirmos a taxa de mudança, precisamos cuidar de algumas ideias preliminares primeiro. A ideia principal que precisamos observar é como vamos definir a mudança de x e / ou y.

Vamos começar supondo que desejamos a taxa de variação de f em um ponto específico, digamos (x_0, y_0). Suponhamos também que x e y estão aumentando e que, neste caso, x está aumentando duas vezes mais rápido do que y está aumentando. Portanto, à medida que y aumenta uma unidade de medida, x aumentará duas unidades de medida.

Para nos ajudar a ver como vamos definir essa mudança, vamos supor que uma partícula está sentada a (x_0, y_0) e a partícula se moverá na direção dada pela mudança x e y. Portanto, a partícula se moverá em uma direção crescente de x e y e a coordenada x do ponto aumentará duas vezes mais rápido que a coordenada y. Agora que estamos pensando em mudar x e y como uma direção do movimento, podemos encontrar uma maneira de definir a mudança. Sabemos do Cálculo II que os vetores podem ser usados para definir uma direção e, portanto, pode-se dizer que a partícula, neste ponto, está se movendo na direção,

$$\vec{v} = \langle 2, 1 \rangle.$$

Como esse vetor pode ser usado para definir como uma partícula em um ponto está mudando, também podemos usá-lo para descrever como x e/ou y está mudando em um ponto. Para nosso exemplo, diremos que queremos a taxa de variação de f na direção de $\vec{v} = \langle 2, 1 \rangle$. Desta forma, saberemos que x está aumentando duas vezes tão rápido quanto y. No entanto, ainda há um pequeno problema com isso. Existem muitos vetores que apontam na mesma direção. Por exemplo, todos os vetores a seguir apontam na mesma direção que $\vec{v} = \langle 2, 1 \rangle$

$$\vec{v} = \left\langle \frac{1}{5}, \frac{1}{10} \right\rangle \quad \vec{v} = \langle 6, 3 \rangle \quad \vec{v} = \left\langle \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right\rangle$$

Precisamos encontrar uma maneira consistente de encontrar a taxa de variação de uma função em uma determinada direção. Faremos isso insistindo que o vetor que define a direção da mudança seja um vetor unitário. Lembre-se de que um vetor unitário é um vetor com comprimento 1. Isso significa que, para o exemplo que começamos pensando, gostaríamos de usar:

$$\vec{v} = \left\langle \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right\rangle$$

uma vez que este é o vetor unitário que aponta na direção da mudança. Para fins de referência, lembre-se de que o comprimento do vetor $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$ é dado por

$$|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

E para vetores bidimensionais, retiramos c da fórmula. Ok, agora que sabemos como definir a direção da mudança x e y, é hora de começar a falar sobre como encontrar a taxa de mudança de f nesta direção. Vamos começar com a definição oficial.

Definição

A taxa de variação de $f(x, y)$ na direção do vetor unitário

$$\vec{u} = \langle a, b \rangle$$

é chamada de **derivada direcional** e é denotada por $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y)$.
A definição da derivada direcional é,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + ah, y + bh) - f(x, y)}{h}.$$

Exemplo 20.1

Seja $f(x,y) = x^2 + y^2$. Vamos encontrar $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x,y)$ em casos

$$\vec{u} = \vec{v}_1 = (1,1), \qquad \vec{u} = \vec{v}_2 = (-1,2).$$

Temos que

$$|\vec{v}_1| = \sqrt{2}, \qquad |\vec{v}_2| = \sqrt{5}.$$

Assim os vetores unitários correspondentes são

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= \frac{\vec{v}_1}{|\vec{v}_1|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\
\vec{u}_2 &= \frac{\vec{v}_2}{|\vec{v}_2|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right).
\end{aligned}$$

Agora seja $\vec{u} = (a,b)$ qualquer vetor. Assim

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1) &= \lim_{t\to 0} \frac{(1+at)^2 + (1+bt)^2 - 2}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{2 + 2t(a+b) + (a^2+b^2)\cdot t^2 - 2}{t} = 2(a+b).
\end{aligned}$$

Ou seja $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1) = 2(a+b)$ para qualquer vetor $\vec{u} = (a,b)$. Aplicando isso para vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \vec{v}_1}(1,1) &= 2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}, \\
\frac{\partial f}{\partial \vec{v}_2}(1,1) &= 2\left(-\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{4}{\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

Observação 20.1

Observem que no exemplo anterior a gente tinha que:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1) = 2(a+b),$$

para qualquer vetor $\vec{u} = (a,b)$. De fato isso pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1) &= 2(a+b) = 2a + 2b \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\cdot a + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\cdot b \\
&= \nabla f(1,1)\cdot(a,b),
\end{aligned}$$

pois $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2$. Agora vamos mostrar que isso não é coincidência e que o fato parecido vale para funções bem gerais.

20.1 Derivada direcional e gradiente

A definição da derivada direcional é muito semelhante à definição de derivadas parciais. No entanto, na prática, esse pode ser um limite muito difícil de calcular, portanto, precisamos de uma maneira mais fácil de obter derivadas direcionais como no observação acima. Na verdade, é bastante simples derivar uma fórmula equivalente para obter derivadas direcionais. Para ver como podemos fazer isso, vamos definir uma nova função de uma única variável,

$$g(z) = f(x_0 + az, y_0 + bz)$$

onde x_0, y_0, a, e b são alguns números fixos. Observe que esta realmente é uma função de uma única variável agora, já que z é a única letra que não representa um número fixo. Então, pela definição da derivada para funções de uma única variável, temos,

$$g'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{g(z+h) - g(z)}{h}$$

e a derivada em $z = 0$ é dada por,

$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h}$$

Se agora substituirmos $g(z)$, obteremos,

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + ah, y_0 + bh) - f(x_0, y_0)}{h} \\ &= \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Portanto, parece que temos a seguinte relação.

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) \tag{20.1}$$

Agora, vamos olhar para isso de outra perspectiva. Vamos reescrever $g(z)$ da seguinte maneira,

$$g(z) = f(x,y) \quad \text{onde} x = x_0 + az, \quad \text{e } y = y_0 + bz.$$

Agora podemos usar a regra da cadeia da Aula 18 para calcular,

$$g'(z) = \frac{dg}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dz} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)a + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)b.$$

Portanto, da regra da cadeia obtemos a seguinte relação:

$$g'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)a + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)b$$

Se tomarmos agora $z = 0$, obteremos $x = x_0$ e $y = y_0$ (de como definimos x e y) nós temos,

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, b. \tag{20.2}$$

Agora, basta igualar (20.1) e (20.1) para obter:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, b.$$

Se agora voltarmos a permitir que x e y sejam qualquer número, obteremos a seguinte fórmula para calcular as derivadas direcionais.

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, a + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, b\\ &= \nabla f(x,y)\cdot \vec{u}.\end{aligned}}$$

Resumindo, temos o seguinte Teorema:

Teorema 20.1

Seja f uma função derivável em ponto (x,y), e $\vec{u} = (a,b)$ um vetor unitário. Assim a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x,y)$ existe, e além disso

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x,y) = \nabla f(x,y)\cdot \vec{u} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, a + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, b.$$

Exemplo 20.2

Vamos encontrar $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,3)$, se $f(x,y) = e^{xy} + \operatorname{sen}(x^2+y^2)$ e $\vec{u} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y\cdot e^{xy} + 2x\cos\left(x^2+y^2\right),\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x\cdot e^{xy} + 2y\cos\left(x^2+y^2\right).\end{aligned}$$

Ambas as derivadas são continuas, assim f é derivável, e podemos aplicar a fórmula acima.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,3) &= \nabla f(1,3)\cdot \vec{u}\\ &= \left(3e^3 + 2\cos 10, e^3 + 6\cos 10\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\\ &= \frac{7e^3}{\sqrt{3}} + 10\cos 10.\end{aligned}$$

O próximo exemplo mostre que precisamos prestar certo cuidado com a fórmula acima.

Exemplo 20.3

Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Considere vetor unitário $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Assim usando a definição, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{h\to 0} \frac{\frac{t^3}{t^2+t^2} - 0}{t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{h\to 0} \frac{t^3}{2t^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Por outro lado, as derivada parciais no ponto $(0,0)$ são

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{x^2} - 0}{x} = 1,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0.$$

Assim $\nabla f(0,0) = (1,0)$, e agora

$$\nabla f(0,0) \cdot \vec{u} = (1,0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Assim temos que

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) \neq \nabla f(0,0) \cdot \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

neste caso. Isso acontece porque a função $f(x,y)$ não é derivável em ponto $(0,0)$.

Exercício 20.1

Seja $f(x,y)$ uma funçao derivável e $\vec{u}$, $\vec{v}$ dois vetores unitários ortogonais. Mostre que

$$\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x,y) \cdot \vec{u} + \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x,y) \cdot \vec{v}.$$

Solução 20.1

Como $\vec{u}$, $\vec{v}$ são ortogonais temos que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Usando o teorema acima, temos

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \vec{u}, \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \vec{v}.$$

Como $\vec{u}$, $\vec{v}$ formam uma base, assim

$$\nabla f(x,y) = \lambda_1 \cdot \vec{u} + \lambda_2 \cdot \vec{v},$$

para alguns escalares λ_1, λ_2. Assim

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) \cdot \vec{u} &= (\lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v}) \cdot \vec{u} = \lambda_1 \\ \nabla f(x,y) \cdot \vec{v} &= (\lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v}) \cdot \vec{v} = \lambda_2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x,y) &= \nabla f(x,y) \cdot \vec{u} = \lambda_1, \\ \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x,y) &= \nabla f(x,y) \cdot \vec{v} = \lambda_2. \end{aligned}$$

E a fórmula segue-se.

Fecharemos essa aula com alguns fatos interessantes sobre o vetor gradiente. O primeiro nos diz como determinar a taxa máxima de mudança de uma função em um ponto e a direção que precisamos mover para atingir essa taxa máxima.

Teorema 20.2

Seja $f(x,y)$ uma função derivável. Assim o valor máximo da $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y)$ occore quando $\vec{u}$ é vetor paralelo ao $\nabla f(x,y)$ e o valor maximal da derivada direcional é

$$\max \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = |\nabla f(x,y)|.$$

Observação 20.2

Observem que o Teorema acima implica o seguinte fato: $\nabla f(x_0, y_0)$ é o sentido onde $f(x,y)$ cresce o mais rápido possível.

Exemplo 20.4

Seja $f(x,y) = x^2 y$. Vamos encontrar $\vec{u}$ de modo que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1)$ seja maximal e encontrar esse valor. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2.$$

Ambas funções são continuas, assim $f(x,y)$ é derivável. Assim aplicando o teorema acima, temos que $\vec{u}$ é paralelo $\nabla f(1,1) = (2,1)$, ou seja

$$\vec{u} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

e o valor máximo é

$$\max \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1) = |\nabla f(1,1)| = \sqrt{5}.$$

Exemplo 20.5

Suponha que a altura de uma colina acima do nível do mar seja dada por $z = 1000 - 0,01x^2 - 0,02y^2$. Se você estiver no ponto $(60,100)$, em que direção a elevação está mudando mais rapidamente? Qual é a taxa máxima de variação da elevação neste ponto?
Temos que este é um parabolóide elíptico que abre para baixo. Portanto, mesmo que a maioria das colinas não seja tão simétrica, elas tem pelo menos um formato parecido e, portanto, a pergunta faz pelo menos um pouco de sentido.
Agora vamos ao problema. Há algumas perguntas a serem respondidas aqui, mas usar o teorema torna a resposta muito simples. Precisamos primeiro do vetor gradiente.

$$\nabla f(x,y) = (-0,02x, -0,04y)$$

A taxa máxima de mudança da elevação ocorrerá então na direção de

$$\nabla f(60,100) = (-1.2, -4)$$

A taxa máxima de variação da elevação neste ponto é,

$$|\nabla f(60,100)| = \sqrt{(-1,2)^2 + (4)^2} = \sqrt{17.44} \approx 4,176.$$

Antes de deixar este exemplo, vamos notar que estamos no ponto (60,100) e a direção da maior taxa de variação da elevação neste ponto é dada pelo vetor $(-1.2, -4)$, Pois ambos os componentes são negativos, parece que a direção da taxa máxima de mudança aponta colina acima em direção ao centro, em vez de afastar-se da colina.

Exercício 20.2: (Trabalho p/ casa)

Encontre as derivadas direcionais se:

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2,0)$ com $f(x,y) = x\mathbf{e}^{xy} + y$ e $\vec{u}$ é vetor unitário em direção $(-1, \sqrt{3})$.

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x,y,z)$ com $f(x,y,z) = x^2z + y^3z^2 - xyz$ em direção de $\vec{u} = (-1,0,3)$.

(c) $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x,y)$ se $f(x,y) = x\cos y$ em direção do $\vec{v} = (2,1)$.

Resposta: (a) $\dfrac{5\sqrt{3}-1}{2}$. (b) $\dfrac{1}{\sqrt{10}}\left(3x^2 + 6y^3z - 3xy - 2xz + yz\right)$.
(c) $\frac{1}{\sqrt{5}}(2\cos(y) - x\sin(y))$.

Exercício 20.3: (Trabalho p/ casa)

Encontre a taxa máxima de mudança de f no ponto dado e a direção em que ocorre

(a) $f(x,y) = xe^{-y}, \quad (-2,0)$.

(b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+2y}, \quad (4,10)$.

(c) $f(x,y) = \cos(3x+2y), \quad \left(\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{8}\right)$.

Resposta: (a) $\sqrt{5}, \quad \langle 1,2\rangle$ (b) (c) $\frac{\sqrt{26}}{2}, \quad \langle -3,-2\rangle$