Aula 19. Função implícita

19.1 Derivada da função implícita

O tópico desta aula é uma revisitação da diferenciação implícita. Com as formas da regra da cadeia (veja Aula 18), a diferenciação implícita torna-se, na verdade, um processo bastante simples. Vamos começar com a diferenciação implícita que vimos em um curso de Cálculo I.

Começaremos com uma função na forma $F(x, y) = 0$ (se não estiver nesta forma simplesmente mova tudo para um lado do sinal de igual para obtê-la nesse formato), onde $y = y(x)$ é função dada implicitamente pelo equação $F(x, y) = 0$. Por exemplo, se $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, assim

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

defina $y(x)$ implicitamente como função de x. Em um curso de Cálculo I, fomos solicitados a computar $\frac{dy}{dx}$ e este era geralmente um processo bastante confuso. Usando a regra da cadeia desta seção, entretanto, podemos obter uma fórmula simples e agradável para fazer isso. Começaremos diferenciando os dois lados em relação a x. Isso significará usar a regra da cadeia no lado esquerdo e no lado direito, é claro, diferenciará para zero. Temos

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

Como $\dfrac{dx}{dx} = 1$, temos

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Portanto,

$$\boxed{y'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}.} \tag{19.1}$$

Como mostrado, tudo que precisamos fazer a seguir é resolver para $\frac{dy}{dx}$ e agora temos uma fórmula muito boa para usar para diferenciação implícita. Observe também que, para simplificar a fórmula, voltamos a usar a notação subscrita para as derivadas.

Exemplo 19.1

Determine $y'(x)$ se

$$x^3 + y^3 = 6xy.$$

Neste caso função $F(x,y)$ é

$$F(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy = 0.$$

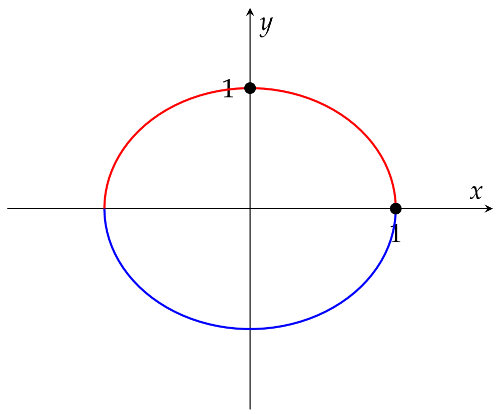
Assim usando a fórmula acima (19.1):

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{3x^2 - 6y}{3y^2 - 6x} = \frac{x^2 - 2y}{2x - y^2}.$$

Exemplo 19.2

Determine $y'(x)$ se

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1.$$



Temos que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = 2y.$$

Assim, aplicando a fórmula acima (19.1), temos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

No caso, temos o seguinte explicação dessa fórmula.
Equação $F(x,y) = 0$ é equivalente ao equação da circunferência re raio 1 e centro na origem. Neste caso podemos escrever $y(x)$ explicitamente nas seguintes maneiras: $y = f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$ (curva vermelha) e $y = f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$ (curva azul). Assim nos ambos os casos, temos:

$$f_1'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{f_1(x)} = -\frac{x}{y}$$
$$f_2'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{f_2(x)} = -\frac{x}{y}.$$

E em ambos os casos as derivadas tem formato $-\frac{x}{y}$.

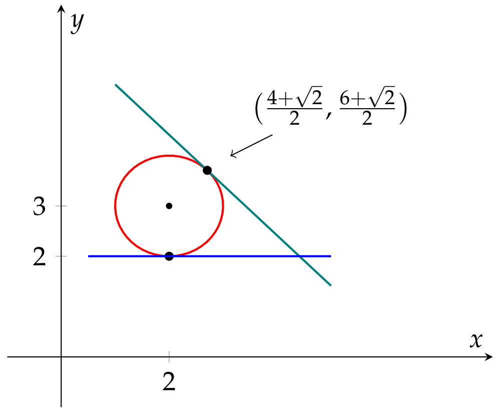
Exemplo 19.3

Suponha que:

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$$

Vamos calcular o valor do $y'(x)$ em pontos $x = 2, y = 2$ e $x = \frac{4+\sqrt{2}}{2}, y = \frac{6+\sqrt{2}}{2}$. Temos

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - y, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y - 6.$$



Assim, aplicando a fórmula, temos:

$$y'(x) = -\frac{2x-4}{2y-6}.$$

Em pontos correspondentes:

$$y'(2) = -\frac{2\cdot 2 - 4}{2\cdot 2 - 6} = 0,$$
$$y'\left(\frac{4\cdot\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{4+\sqrt{2}-4}{6+\sqrt{2}-6} = -1.$$

De novo, podemos simplesmente explicar o resultado obtido da seguinte maneira: a equação $F(x,y) = 0$ é equivalente a

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$$

Ou seja é a circunferência de raio 1 e centro em $(2,3)$. Nos pontos $(2,2)$ e $\left(\frac{4+\sqrt{2}}{2}, \frac{6+\sqrt{2}}{2}\right)$ a derivada da função explicita é a inclinação da reta tangente nesses pontos, como na imagem acima. Lógico que são iguais 0 e -1.

Exemplo 19.4

Suponha que $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$. As derivadas parciais tem forma:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^y + ye^x - ye^{xy} = e^y + ye^x\left(1 - e^{xy-x}\right),$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = xe^y + e^x - xe^{xy} = e^x + xe^y\left(1 - e^{xy-y}\right).$$

Assim usando fórmula (19.1), temos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{e^b + ye^x\left(1 - e^{xy-x}\right)}{e^x + xe^y\left(1 - e^{xy-y}\right)}.$$

19.2 *Função implícita em 3 variáveis*

Também podemos fazer algo semelhante para lidar com os tipos de problemas de diferenciação implícita envolvendo derivadas parciais, como aqueles que vimos quando introduzimos as derivadas parciais pela primeira vez. Nestes casos, começaremos com uma função na forma $F(x, y, z) = 0$, vamos assumir que $z = f(x, y)$ e queremos encontrar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e / ou $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Vamos começar tentando encontrar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$. Vamos diferenciar os dois lados em relação a x e precisamos lembrar que vamos tratar y como uma constante. Além disso, o lado esquerdo exigirá a regra de cadeia. Aqui está esta derivada.

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

A primeira é porque estamos apenas diferenciando x em relação a x e sabemos que é 1. O segundo é porque estamos tratando o y como uma constante e, portanto, se diferenciará em zero.

Conectando-os e resolvendo $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ dá,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$$

Um argumento semelhante pode ser usado para mostrar que,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

Ou seja, temos o seguinte

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}.} \tag{19.2}$$

Exemplo 19.5

Suponha que $xyz + x^3 + y^3 + z^3 = 5$. Assim neste caso $F(x, y, z) = xyz + x^3 + y^3 + z^3 - 5$. Aplicando as fórmulas (19.2), temos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{yz + 3x^2}{xy + 3z^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{xz + 3y^2}{xy + 3z^2}.$$

Exemplo 19.6

Tome o elipsóide
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1.$$
Neste caso
$$F(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 - 1.$$
Podemos escrever z em função de x, y em duas maneiras:
$$g_1(x,y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}},$$
$$g_2(x,y) = -\sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}.$$
Derivando $z = g_1(x,y)$, em relação x temos
$$\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) = \frac{2 \cdot x/4}{2\sqrt{1 - x^2/4 - y^2/9}} = \frac{x/4}{g_1(x,y)}$$
Ou, por outro lado, usando a fórmula (19.2), temos
$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2 \cdot x/4}{2z} = -\frac{x/4}{z} = -\frac{x/4}{g_1(x,y)}.$$

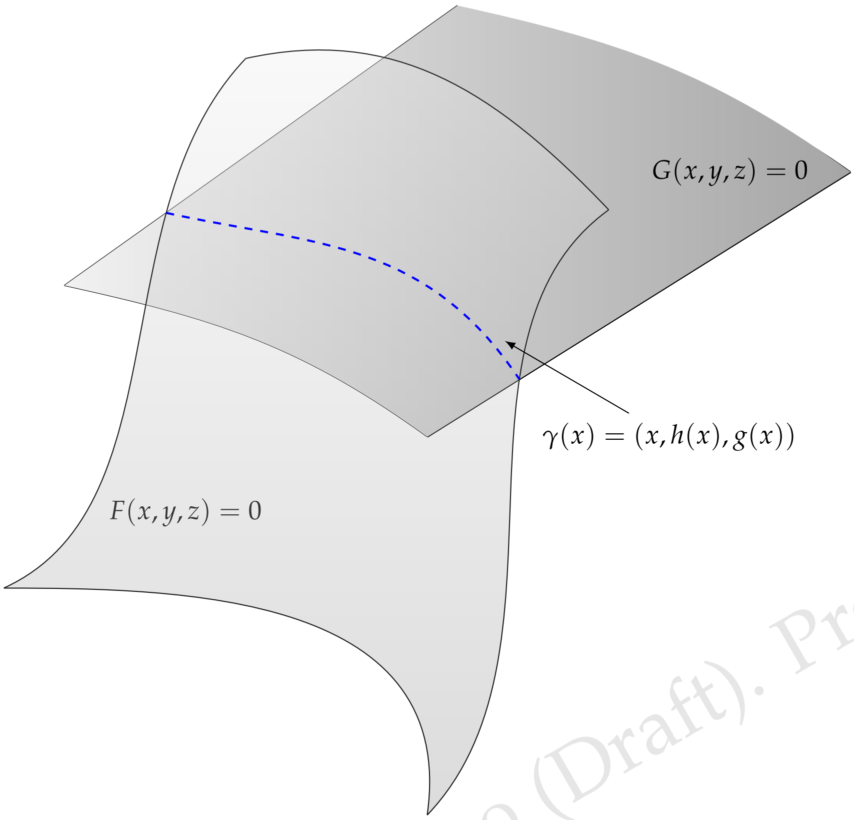
Exemplo 19.7

Seja $e^z - xyz = 0$. Neste caso $F(x,y,z) = e^z - xyz$ e as derivadas parciais são:
$$\frac{\partial F}{\partial x} = -yz,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = -xz,$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} = e^z - xy.$$
Agora, usando a fórmula (19.2), temos:
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz}{e^z - xy}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{xz}{e^z - xy}$$

19.3 *Versão mais geral ainda.*

Sejam dadas duas funções $F(x,y,z)$ e $G(x,y,z)$. Podemos considerar o sistema
$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

As equações $F(x, y, z) = 0$ e $G(x, y, z) = 0$ definem 2 superfícies. Assim a solução entre elas é uma curva $\gamma(x) = (x, h(x), g(x))$ como na imagem abaixo.



Nosso objetivo é encontrar as derivadas das funções $h(x)$, $g(x)$ (os componentes da curva γ) em funções das derivadas parciais de F e G.

Primeiramente, vamos lembrar que dada a matriz 2×2,

$$A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

o seu **determinante** é definido como

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Agora, as derivadas das funções $y = h(x)$, $z = g(x)$ dadas em termos de certos determinantes como o seguinte:

$$\boxed{h'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}}, \qquad g'(x) = \frac{dz}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_x \\ G_y & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}}}$$

Exemplo 19.8

Considere, a seguinte situação

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - y - 3z = 5 \end{cases}$$

Neste caso $F(x, y, z) = x + 2y + 3z$ e $G(x, y, z) = 2x - y - 3z - 5$. Assim as derivadas parciais são:

$$\begin{array}{lll} F_x = 1, & F_y = 2, & F_z = 3, \\ G_x = 2, & G_y = -1, & G_z = -3. \end{array}$$

Assim, aplicando as fórmulas acima, temos

$$h'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-3-6}{-6+3} = \frac{9}{-3} = -3$$

$$g'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{5}{3}.$$

Além disso podemos simplesmente verificar ambas as fórmulas neste caso. Somando duas equações, temos

$$3x + y = 5 \Rightarrow y = h(x) = -3x + 5.$$

Assim a derivada $h'(x) = -3$.
Por outro lado multiplicando segundo equação por 2 e somando com o primeiro, temos

$$5x - 3z = 10 \Rightarrow z = g(x) = \frac{5}{3}(x+2)$$

Assim, $g'(x) = 5/3$.

Exercício 19.1: (Trabalho p/ casa)

Encontre $\dfrac{dy}{dx}$ se

$$x\cos(3y) + x^3y^5 = 3x - \mathbf{e}^{xy}.$$

Resposta:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos(3y) + 3x^2y^5 - 3 + y\mathbf{e}^{xy}}{-3x\sin(3y) + 5x^3y^4 + x\mathbf{e}^{xy}}.$$

Exercício 19.2: (Trabalho p/ casa)

Encontre $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ para cada função de baixo (ex. 15.4 da Aula 15):

(a) $x^3z^2 - 5xy^5z = x^2 + y^3$,

(b) $x^2 \sin(2y - 5z) = 1 + y\cos(6zx)$.

Resposta: Veja Aula 15.

Exercício 19.3: (Trabalho p/ casa)

Seja

$$\begin{cases} 3x + 5y + 2z = 3 \\ x - 2y - 3z = 4 \end{cases}$$

Encontre $y'(x)$ e $z'(x)$.