Aula 18. Regra de cadeia

18.1 Vetor gradiente

Suponha que $f(x,y)$ uma função derivável no ponto (x,y). Assim neste caso $f(x_0,y_0)$ admite as derivadas parciais. Vamos montar o seguinte vetor:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) = \nabla f(x_0,y_0).$$

O vetor $\nabla f(x_0,y_0)$ é chamado o **vetor gradiente** da função $f(x,y)$ no ponto (x_0,y_0).

Exemplo 18.1

Considere função $f(x,y) = x^2 + 3y^2$ e ponto $(x_0,y_0) = (1,1)$. Temos que as derivadas no ponto genérico são dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6y$$

Assim o vetor gradiente em $(1,1)$ é $\nabla f(1,1) = (2,6)$.

Exemplo 18.2

Considere $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$. Temos que as derivadas no ponto genérico são dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \cdot e^{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2y \cdot e^{x^2+y^2}$$

E, por exemplo, o gradiente no ponto $(2,3)$ é dado por $\nabla f(2,3) = \left(4e^{13}, 6e^{13}\right)$.

18.2 Regra de cadeia

Considere a superfície $z = x^2y + xy^2$ e suponha que $x = 2 + t^4$ e $y = 1 - t^3$. Podemos pensar nas duas últimas equações como descrevendo como x e y mudam em relação, digamos, ao tempo. Então

$$z = x^2y + xy^2 = \left(2+t^4\right)^2\left(1-t^3\right) + \left(2+t^4\right)\left(1-t^3\right)^2$$

nos diz explicitamente como a coordenada z do ponto correspondente na superfície depende de t. Se quisermos saber dz/dt, podemos computá-lo mais ou menos diretamente — na verdade é um pouco mais simples usar a regra da cadeia:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= x^2y' + 2xx'y + x2yy' + x'y^2\\ &= \left(2xy + y^2\right)x' + \left(x^2 + 2xy\right)y'\\ &= \left(2\left(2+t^4\right)\left(1-t^3\right) + \left(1-t^3\right)^2\right)\left(4t^3\right) + \left(\left(2+t^4\right)^2 + 2\left(2+t^4\right)\left(1-t^3\right)\right)\left(-3t^2\right)\end{aligned}$$

Se olharmos atentamente para a etapa intermediária, $dz/dt = (2xy + y^2)\,x' + (x^2 + 2xy)\,y'$, notamos que $2xy + y^2\ \partial z/\partial x$ e $x^2 + 2xy\ \partial z/\partial y$. Isso acaba sendo verdade em geral e nos dá uma nova regra da cadeia:

Teorema 18.1

Suponha que $z = f(x,y)$, f seja diferenciável, $x = g(t)$ e $y = h(t)$. Supondo que existam os derivados relevantes,

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}}$$

Podemos reformular isso como o seguinte. Seja

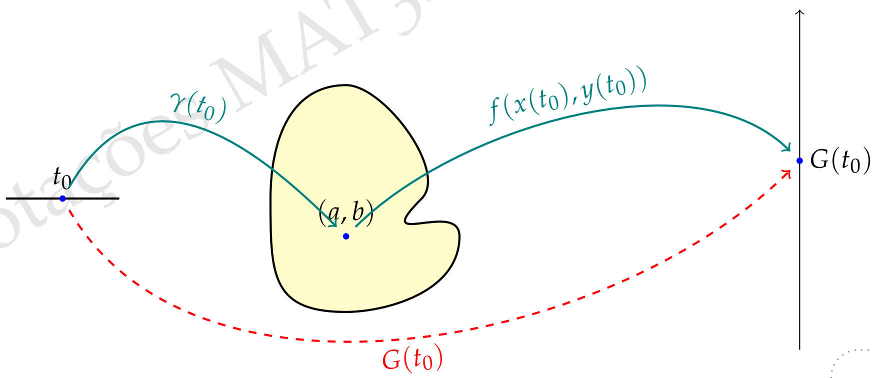
$$\gamma : I \to \mathbb{R}^2$$

uma curva planar dada por

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)).$$

Se $f(x,y)$ uma função, podemos concíderar a função composta dada por

$$G(t) = f(\gamma(t)) = f(x(t), y(t))$$



A função G é função de uma variável e sua derivada pode ser calculada como

$$\boxed{\begin{aligned}G'(t_0) &= \nabla f(x(t_0)) \cdot \gamma'(t_0)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y'(t_0)\end{aligned}} \tag{18.1}$$

Onde $\nabla f(x(t)) \cdot \gamma'(t_0)$ denota o produto escalar entre dois vetores.

Considere alguns exemplos.

Lembrete: Sejam $\vec{a} = (a_1, a_2)$ e $\vec{b} = (b_1, b_2)$ dois vetores, assim o **produto escalar** entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é o número dado por

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2.$$

Exemplo 18.3

Considere a função
$$f(x,y) = x^2 + 3y^2$$
Então o vetor gradiente no ponto genérico (x,y) tem forma $\nabla f(x,y) = (2x,6y)$. Suponha que a curva γ é $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t)$. Então a função composta G é

$$G(t) = f(\gamma(t)) = f(x,t,\cos t) = \operatorname{sen}^2 t + 3\cos^2 t$$

A gente pode calcular a derivada $G'(t)$ usualmente (usando as regras do Cálculo I), recebendo

$$G'(t) = 2\operatorname{sen} t \cdot \cos t + 6 \cdot \cos t(-\operatorname{sen} t) = -4\operatorname{sen} t\cos t.$$

Ou através a formula (18.1). Temos

$$\gamma'(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t), \quad \nabla f(\gamma(t)) = (2\operatorname{sen} t, 6\cos t)$$

Assim
$$G'(t) = \nabla f(x(t)) \cdot \gamma'(t) = (2\operatorname{sen} t, 6\cos t) \cdot (\cos t, \operatorname{sen} t) = -4\operatorname{sen} t\cos t.$$

Exemplo 18.4

Seja f uma função derivavel em $\mathbb{R}^2$. Suponha que

$$\nabla f(-2,-2) = (a,-4)$$

e
$$G(t) = f\left(2t^3 - 4, t^4 - 3t\right)$$
Determine o valor do parâmetro a de modo que a equação da reta tangente no ponto com abscissa 1 ao gráfico da função $G(t)$ seja paralela à reta $y = 2x + 3$.
Temos que a inclinação da reta tangente à $G(t)$ no ponto 1 é igual a $G'(1)$. Além disso a inclinação da reta $y = 2x + 3$ é 2. Portanto a reta tangente em ponto $x = 1$ é paralela a reta $y = 2x + 3$ se e somente se $G'(1) = 2$.
Neste caso $\gamma(t) = (2t^3 - 4, t^4 - 3t)$. Pelo regra de cadeia, temos

$$G'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \nabla f\left(2t^3 - 4, t^4 - 3t\right) \cdot \left(6t^2, 4t^3 - 3\right).$$

Assim
$$G'(1) = \nabla f(-2,2) \cdot (6,4) = (a,-4)(6,1) = 6a - 4$$
Ou seja devemos ter que $6a - 4 = 2$. Assim $a = 1$.

Exemplo 18.5

Seja $z(x, y) = x^2 y$, e

$$x(t) = e^{t^2}, y(t) = 2t + 1$$

Vamos encontrar $\frac{dz}{dt}$. A função composta é

$$z(x(t), y(t)) = \left(e^{t^2}\right)^2 \cdot (2t + 1) = e^{2t^2} \cdot (2t + 4).$$

Assim derivando z na maneira usual, temos

$$z'(t) = 4te^{2t^2}(2t + 1) + e^{2t^2}(2t + 4) = e^{2t^2}\left[8t^2 + 4t + 2\right].$$

Ou, aplicando regra de cadeia, temos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2,$$

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = 2te^{t^2}, \quad y'(t) = \frac{dy}{dt} = 2.$$

Assim

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= 2 \cdot e^{t^2}(2t + 1) \cdot 2t \cdot e^{t^2} + e^{t^2} \cdot 2 \\ &= e^{2t^2}\left[8t^2 + 4t + 2\right].\end{aligned}$$

18.3 *Versão mais geral*

Agora, há um caso especial que devemos examinar rapidamente antes de passar para o próximo caso. Vamos supor que temos a seguinte situação,

$$z = f(x, y) \quad y = g(x)$$

Neste caso, a regra da cadeia para $\frac{dz}{dx}$ torna-se,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

No primeiro termo, estamos usando o fato de que,

$$\frac{dx}{dx} = \frac{d}{dx}(x) = 1$$

Vamos fazer um exemplo rápido

Exemplo 18.6

Vamos calcular $\dfrac{dz}{dx}$ para

$$z = x\ln(xy) + y^3, \qquad y = \cos\left(x^2+1\right).$$

Apenas colocando tudo na formula acima, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dx} &= \left(\ln(xy) + x\frac{y}{xy}\right) + \left(x\frac{x}{xy} + 3y^2\right)\left(-2x\sin\left(x^2+1\right)\right) \\
&= \ln\left(x\cos\left(x^2+1\right)\right) + 1 - 2x\sin\left(x^2+1\right)\left(\frac{x}{\cos\left(x^2+1\right)} + 3\cos^2\left(x^2+1\right)\right) \\
&= \ln\left(x\cos\left(x^2+1\right)\right) + 1 - 2x^2\tan\left(x^2+1\right) - 6x\sin\left(x^2+1\right)\cos^2\left(x^2+1\right).
\end{aligned}$$

Agora suponha que dada a seguinte situação

$$z = f(x,y), x = g(s,t), y = h(s,t)$$

e vamos precisar calcular $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ Neste caso, substituindo x e y temos que z é uma função de s e t, assim faz sentido calcular aqueles derivadas parciais Temos a seguinte regra de cadeia para estes casos.

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Exemplo 18.7

Suponha dada função $\varphi(x,y) = x^2y - xy^3 + 2$. E, temos que

$$x(r,\theta) = r\cdot\cos\theta, \quad y(r,\theta) = r\cdot\sin\theta.$$

Assim a função composta tem forma $F(r,\theta) = \varphi(r\cos\theta, \sin\theta)$. Assim

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} &= \left(2xy - y^3\right)\cos\theta + \left(x^2 - 3xy^2\right)\operatorname{sen}\theta \\
&= \left(2r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta - r^3\operatorname{sen}^3\theta\right)\cos\theta + \left(r^2\cos^2\theta - 3r^3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta\right)\cdot\operatorname{sen}\theta.
\end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial\theta} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta} = \left(2r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta - r^3\operatorname{sen}^3\theta\right)(-r\operatorname{sen}\theta) + \left(r^2\cos^2\theta - 3r^3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta\right)\cdot(r\cos\theta).$$

Exemplo 18.8

Suponha que $z = f(x-y, y-x)$. Vamos mostrar que

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Considere

$$t(x,y) = x - y, \qquad s(x,y) = y - x.$$

Assim aplicando regra de cadeia, temos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial t} \cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial s} \cdot (-1).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial t} \cdot (-1) + \frac{\partial z}{\partial s} \cdot 1.$$

Somando dois ultimas linhas, temos $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial t} = 0.$

Exemplo 18.9

Suponha que $z(x,y) = \arctan \frac{x}{y}$, e $x(u,v) = u + v, y(u,v) = u - v$ Vamos mostrar que

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u - v}{u^2 + v^2}$$

Observem que

$$x^2 + y^2 = (u+v)^2 + (u-v)^2 = 2u^2 + v^2,$$

$$y - x = -2v, \qquad y + x = 2u.$$

Aplicando regra de cadeia, temos,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\frac{1}{y}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot 1 + \frac{1 \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)}{1 + \frac{x^2}{y^2}}$$
$$= \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{-x}{x^2 + y^2} = \frac{-2v}{2\left(u^2 + v^2\right)} = -\frac{v}{u^2 + v^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1\frac{1}{y}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot 1 + \frac{1 \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot (-1)$$
$$= \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{2u}{2\left(u^2 + v^2\right)} = \frac{u}{u^2 + v^2}.$$

Assim

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{v}{u^2 + v^2} + \frac{u}{u^2 + v^2} = \frac{u - v}{u^2 + v^2}.$$

18.4 *Versão mais geral ainda*

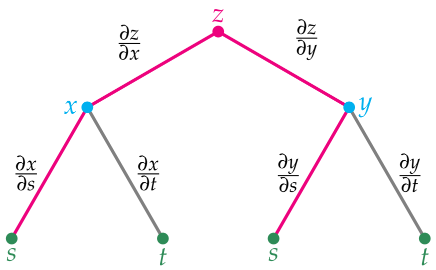
Suponha que z seja uma função de n variáveis, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, e que cada uma dessas variáveis sejam, por sua vez, funções de m variáveis, $t_1, t_2, \ldots, t_m$. Então, para qualquer variável t_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, temos o seguinte,

$$\frac{\partial z}{\partial t_i} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

Uau.... Isso é muito difícil de lembrar... Na verdade, existe uma maneira mais fácil de construir todas as regras da cadeia que discutimos na seção ou veremos em exemplos posteriores. Podemos construir um **diagrama de árvore** que nos dará a regra da cadeia para qualquer situação. Para ver como isso funciona, vamos voltar e dar uma olhada na regra da cadeia para $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ dado que $z = f(x, y)$, $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$. Já sabemos o que é isso, mas pode ajudar a ilustrar o diagrama da árvore se já sabemos a resposta. Para referência, aqui está a regra da cadeia para este caso,

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

Aqui está o diagrama de árvore para este caso.



Começamos no topo com a própria função e ramificamos a partir desse ponto. O primeiro conjunto de ramificações é para as variáveis na função. De cada um desses pontos de extremidade, colocamos um conjunto adicional de ramos que dá as variáveis que ambos x e y são uma função de. Conectamos cada letra com uma linha e cada linha representa uma derivada parcial, conforme mostrado. Observe que a letra do numerador da derivada parcial é o "nó" superior da árvore e a letra do denominador da derivada parcial é o "nó" inferior da árvore.

Para usar isso para obter a regra da cadeia, começamos na parte inferior e para cada ramo que termina com a variável que queremos tirar a derivada em relação a (s neste caso) subimos na árvore até atingirmos o topo, multiplicando as derivadas que vemos ao longo desse conjunto de ramos. Depois de fazer isso para cada aresta que termina em s, então adicionamos os resultados para obter a regra da cadeia para aquela situação.

Observe que nem sempre colocamos os derivados na árvore. Algumas das árvores ficam um pouco grandes/bagunçadas e por isso não vamos colocar os derivados. Basta lembrar qual derivada deve estar em cada ramo e você ficará bem sem realmente escrevê-los.

Exercício 18.1: (Trabalho p/ casa)

Calcule vetor gradiente para seguintes casos

(a) $f(x,y) = x^2 - xy$,

(b) $f(x,y,z) = x - xy + z^2$,

(c) $f(x,y) = -x^4 + 4\left(x^2 - y^2\right) - 3$,

(d) $f(x,y) = x + 3y^2$,

(e) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(f) $f(x,y,z) = 3x^2\sqrt{y} + \cos(3z)$

(g) $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

(h) $f(x,y) = \frac{4y}{(x^2+1)}$

(i) $f(x,y,z) = \sin(x)e^y \ln(z)$

Exercício 18.2: (Trabalho p/ casa)

Compute $\frac{dz}{dt}$ em seguintes casos:

(a) $z = xe^{xy}, x = t^2, y = t^{-1}$

(b) $z = x^2y^3 + y\cos x, x = \ln\left(t^2\right), y = \sin(4t)$

Resposta: (a) $\frac{dz}{dt} = 2t\mathbf{e}^t + t^2\mathbf{e}^t$, (b)

$$\frac{4\sin^3(4t)\ln t^2 - 2\sin(4t)\sin\left(\ln t^2\right)}{t} + 4\cos(4t)\left(3\sin^2(4t)\left[\ln t^2\right]^2 + \cos\left(\ln t^2\right)\right)$$

Exercício 18.3: (Trabalho p/ casa)

Calcule $\frac{\partial z}{\partial s}$ e $\frac{\partial z}{\partial t}$ para $z = \mathbf{e}^{2r}\sin(3\theta), r = st - t^2, \theta = \sqrt{s^2 + t^2}$

Resposta:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = t\left(2\mathbf{e}^{2\left(st-t^2\right)}\sin\left(3\sqrt{s^2+t^2}\right)\right) + \frac{3s\mathbf{e}^{2\left(st-t^2\right)}\cos\left(3\sqrt{s^2+t^2}\right)}{\sqrt{s^2+t^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = (s-2t)\left(2\mathbf{e}^{2\left(st-t^2\right)}\sin\left(3\sqrt{s^2+t^2}\right)\right) + \frac{3t\mathbf{e}^{2\left(st-t^2\right)}\cos\left(3\sqrt{s^2+t^2}\right)}{\sqrt{s^2+t^2}}$$