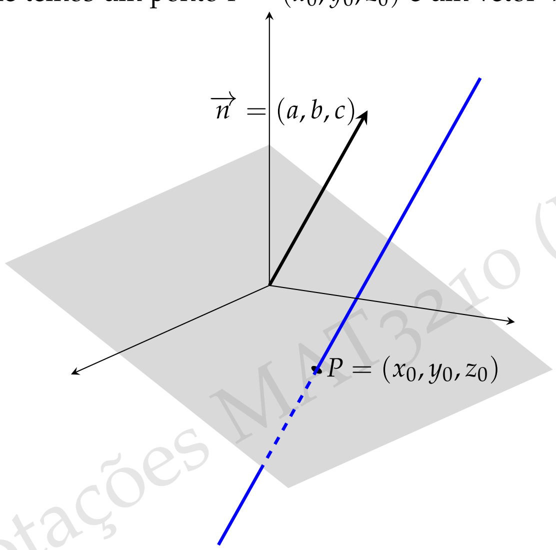
Aula 17. Reta normal e plano tangente

Nessa aula vamos estudar as equações do plano tangente e reta normal ao gráfico da função $f(x,y)$ num ponto dado. Primeiramente vamos lembrar os fatos básicos do curso de "Geometria Analítica".

17.1 Equações do plano e reta

Vamos lembrar as equações das retas e plano no espaço. Suponha que temos um ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ e um vetor $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$.



Assim equaçao do plano π passando pelo ponto P e perpendicular ao vetor $\overrightarrow{n}$ tem forma

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.} \tag{17.1}$$

Neste caso vetor $\overrightarrow{n}$ chama-se *vetor normal* ao plano π. E a equação da reta passando pelo ponto P paralela do vetor $\overrightarrow{n}$ (reta azul na imagem acima) tem forma

$$\boxed{(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c).} \tag{17.2}$$

17.2 Plano tangente

O gráfico de uma função $z = f(x,y)$ é uma superfície em $\mathbb{R}^3$ (espaço tridimensional) e assim podemos agora comece a pensar no

Anotações MAT3210 (Draft). Prof Kostiantyn

plano que é "tangente" à superfície em um ponto.

Vamos começar com um ponto (x_0, y_0) e vamos deixar C_1 representar o traço para $f(x,y)$ para o plano $y = y_0$ (permitindo que x varie com y mantido fixo) e nós deixe C_2 representar o traço para $f(x,y)$ para o plano $x = x_0$ (permitindo y para variar com x mantido fixo). Agora, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ é a inclinação da reta tangente ao traço C_1 e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ é a inclinação da reta tangente ao traço C_2. Portanto, seja L_1 a reta tangente ao traço C_1 e seja L_2 a reta tangente ao traço C_2.

O plano tangente será então o plano que contém as duas retas L_1 e L_2. Geometricamente, esse plano terá o mesmo propósito que uma reta tangente no Cálculo I. A reta tangente a uma curva era a reta que tocava a curva naquele ponto e era “paralela” à curva no ponto em questão. Planos tangentes a uma superfície são planos que apenas tocam a superfície no ponto e são “paralelos” à superfície no ponto. Observe que isso nos dá um ponto que está no plano. Uma vez que o plano tangente e a superfície se tocam em (x_0, y_0), o ponto seguinte estará tanto na superfície quanto no plano.

$$(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$$

O que precisamos fazer agora é determinar a equação do plano tangente. Nós sabemos (veja seção acima) que a equação geral de um plano é dada por,

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

onde (x_0, y_0, z_0) é um ponto que está no plano, que temos. Vamos reescrever um pouco. Vamos mover os termos x e os termos y para o outro lado e dividir os dois lados por c. Fazer isso dá,

$$z - z_0 = -\frac{a}{c}(x - x_0) - \frac{b}{c}(y - y_0)$$

Agora, vamos renomear as constantes para simplificar um pouco a notação. Vamos renomeá-los da seguinte maneira,

$$A = -\frac{a}{c} \qquad B = -\frac{b}{c}$$

Com essa renomeação, a equação do plano tangente torna-se,

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

e precisamos determinar os valores para A e B.

Vamos primeiro pensar no que acontece se mantivermos y fixo, ou seja, se assumirmos que $y = y_0$. Neste caso, a equação do plano tangente torna-se,

$$z - z_0 = A(x - x_0)$$

Esta é a equação de uma reta e esta reta deve ser tangente à superfície em (x_0, y_0) (uma vez que faz parte do plano tangente).

Anotações MAT3210 (Draft). Prof Kostiantyn

Além disso, esta reta assume que $y = y_0$ e A é a inclinação desta reta. Mas se pensarmos sobre isso, vemos que é exatamente o que é a tangente a C_1, a reta tangente à superfície em (x_0, y_0) assumindo que $y = y_0$. Em outras palavras,

$$z - z_0 = A\,(x - x_0)$$

é a equação para L_1 e sabemos que a inclinação de L_1 é dada por $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. Portanto, temos o seguinte,

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Se mantivermos x fixo em $x = x_0$, a equação do plano tangente torna-se,

$$z - z_0 = B\,(y - y_0)$$

No entanto, por um argumento semelhante ao anterior, podemos ver que isso nada mais é do que a equação para L_2 e que sua inclinação é B ou $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Então,

$$B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

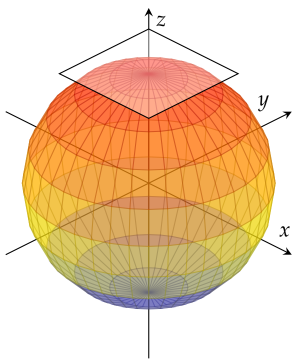
A equação do plano tangente à superfície dada por $z = f(x, y)$ em (x_0, y_0) é então,

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0)$$

Além disso, se usarmos o fato de que $z_0 = f(x_0, y_0)$, podemos reescrever a equação do plano tangente como,

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0)$$

Assim temos a equação do plano tangente à superfície dada por $z = f(x, y)$ em (x_0, y_0) é



$$\boxed{z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0)} \tag{17.3}$$

O vetor normal do plano tangente é

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right).$$

Agora usando (17.2), a equação da reta passando pelo ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ e paralela ao vetor $\vec{n}$ é

$$\boxed{(x, y, z) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + t\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)} \tag{17.4}$$

Reta (17.4) chama-se *reta normal* ao $z = f(x, y)$ no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Anotações MAT3210 (Draft). Prof Kostiantyn

Observação 17.1

Observem que, para que o plano definido pela equação (17.3) seja tangente no ponto (x_0, y_0), a função $f(x,y)$ deve ser derivável no ponto (x_0, y_0) (veja Aula 16), ou seja o limite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - ah - bk}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0,$$

com $a = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, e $b = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Neste caso o nominador do limite

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,k$$

está tendendo no 0 em (x_0, y_0) e o plano "aproxima" o gráfico da função $f(x,y)$ em (x_0, y_0). Assim quando construímos o plano tangente vamos sempre verificar se função é derivável no ponto.

Exemplo 17.1

Considere a função

$$f(x,y) = y \ln x$$

Temos que as derivadas parciais num ponto genérico (x,y) são dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \ln x$$

Ambas funções $\dfrac{y}{x}$ e $\ln x$ são contínuas no domínio da função $f(x,y)$ (Veja Aula 11). Assim a função $f(x,y) = y \ln x$ é derivável no todo seu domínio (pois as derivadas parciais são contínuas). Portanto o plano tangente existe para qualquer ponto do domínio da função $f(x,y)$. Vamos encontrar o plano tangente e reta normal no ponto $P = (1, 4, f(1,4))$. Observe que $f(1,4) = 4\ln 1 = 0$. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,4) = \frac{4}{1} = 4, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,4) = \ln 1 = 0$$

Assim $\vec{n} = (4, 0, -1)$. Portanto, usando a equação (17.3) temos que a equação do plano tangente tem forma

$$\begin{aligned} z - f(1,4) &= \frac{\partial f}{\partial x}(1,4)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,4)(y-4) \\ &\Rightarrow z = 4(x-1). \end{aligned}$$

Ou seja $z = 4x - 4$ é equação do plano tangente no ponto $(1, 4, 0)$.
Agora usando (17.4) temos que equação da reta normal tem forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 17.2

Este exemplo mostra porque precisamos realmente que a função seja derivável no ponto (x_0, y_0). Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Temos que $f(x,y)$ não é contínua no ponto $(0,0)$, pois o $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe. Assim $f(x,y)$ não é derivável em $(0,0)$ (veja Aula 16). As derivadas parciais da $f(x,y)$ existem e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Assim montando o plano como em (17.3), temos

$$z = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (y - y_0)\,,$$
$$z = 0 + 0 \cdot (x - x_0) + 0 \cdot (y - y_0)\,.$$

Ou seja $z = 0$. Mas observem que o plano $z = 0$ não é tangente ao gráfico da $f(x,y)$ em $(0,0)$ (ou seja não está "proximo" da função $f(x,y)$). Por exemplo, considere caminho $x = y$. Assim ao longo esse caminho, temos

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \neq 0.$$

Exemplo 17.3

Considere a função

$$f(x,y) = xe^{xy}.$$

Vamos encontrar o plano normal e reta tangente no ponto $P = (1,0,1)$. Temos que as derivadas parciais num ponto genérico (x,y) são dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{xy} + xy \cdot e^{xy}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 e^{xy}.$$

Ambas funções são contínuas em $\mathbb{R}^2$ (veja Aula 11). Assim a função $f(x,y) = xe^{xy}$ é derivável em $\mathbb{R}^2$. Portanto o plano tangente existe para qualquer ponto do domínio da função $f(x,y)$. Temos

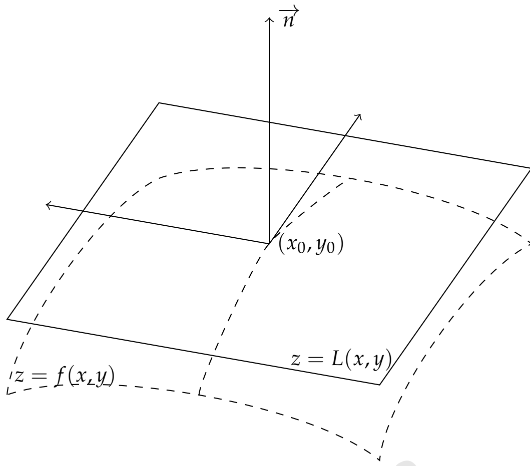
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 1.$$

Agora usando (17.3) e (17.4), temos

$$z = 1 + (x-1) + (y-0) = x + y$$

é plano tangente e $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot t$, pois o vetor normal é $\vec{n} = (1,1,-1)$.

17.3 *Aproximação e diferencial*



Um bom uso dos planos tangentes é que eles nos fornecem uma maneira de aproximar uma superfície perto de um ponto. Enquanto estivermos próximos do ponto (x_0, y_0) então o plano tangente deve aproximar-se da função naquele ponto. Por causa disso, definimos a aproximação linear como sendo,

$$\boxed{L\left(x,y\right) = f\left(x_0,y_0\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)\left(x - x_0\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)\left(y - y_0\right)} \tag{17.5}$$

e enquanto estivermos "próximos" (x_0, y_0) então devemos ter isso,

$$f\left(x,y\right) \approx L\left(x,y\right) = f\left(x_0,y_0\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)\left(x - x_0\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)\left(y - y_0\right)$$

Agora chamado $dx = x - x_0$ e $dy = y - y_0$, e

$$\begin{aligned} dz =& \frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)\left(x - x_0\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)\left(y - y_0\right) \\ =& \frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)dx + \frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)dy, \end{aligned}$$

vamos chamar por *diferencial* da $f(x,y)$ no ponto (x_0, y_0).

Assim temos que

$$f\left(x,y\right) \approx f\left(x_0,y_0\right) + dz$$

Anotações MAT3210 (Draft). Prof Kostiantyn

Exemplo 17.4

Seja $f(x,y) = x^2y$. Assim
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2$$
e diferencial tem forma
$$dz = 2xydx + x^2dy$$
Agora vamos procurar o valor aproximado do $f(1,02,201) = (1.02)^2 \cdot (2.01)$. Sem calculadora fazer isso é complicado, mas fica mais fácil com a fórmula (17.5).

$$\begin{aligned} x_0 &= 1, & y_0 &= 2 \\ dx &= 0.02, & dy &= 0.01 \end{aligned}$$

Assim,
$$\begin{aligned} dz &= 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 0.02 + 1^2 \cdot 0.01 \\ &= 4 \cdot 0.02 + 0.01 = 0.08 + 0.01 = 0.09 \end{aligned}$$
Agora
$$\begin{aligned} f(1.02, 2.01) &\approx f(1,2) + dz \\ &= 1^2 \cdot 2 + 0.09 = 2.09 \end{aligned}$$
Observem que usando calculadora o valor exato da $(1.02)^2 \cdot (2.01)$ é $2,091204$ assim o erro é
$$\Delta z = 2,091204 - 2.09 = 0,001204.$$

Anotações MAT3210 (

Exemplo 17.5

Vamos encontrar o valor aproximado de

$$\sqrt{(0.01)^2+(3.02)^2+(3.9)^2}.$$

Considere a função

$$f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

e considere

$$x_0=0,\quad y_0=3,\quad z_0=4$$
$$dx=0.01,\quad dy=0.02.\qquad dz=-0.1$$

Agora, as derivada parciais, são

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+x^2}},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,3,4)=0,\frac{\partial h}{\partial y}(0,3,4)=\frac{3}{5},\frac{\partial f}{\partial z}(0,3,4)=\frac{4}{5}.$$

$$\begin{aligned}\sqrt{(0.01)^2+(3.02)^2+(3.9)^2}&\approx\sqrt{0+3^2+4^2}+0\cdot dx+\frac{3}{5}dy+\frac{4}{5}dz\\&=5+0\cdot 0.01+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{100}+\frac{4}{5}\cdot\frac{10}{10}=5-\frac{34}{500}=4.928\end{aligned}$$

Observem que o valor exato do $\sqrt{(0.01)^2+(3.02)^2+(3.9)^2}$ é 4.93259566. Assim o erro cometido é

$$4.93259566-4.928=0.00459566$$

Exercício 17.1: (Trabalho p/ casa)

Determine o plano tangente ao gráfico da $z=\ln(2x+y)$ em $(-1,3)$

Resposta: $z=2x+y-1$.

Exercício 17.2: (Trabalho p/ casa)

Determine o plano tangente ao gráfico da função

$$f(x,y)=\sin(2x)\cos(3y)$$

em $(\pi/3,\pi/4)$

Resposta: $z=\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{3\sqrt{6}}{4}y-\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\pi\sqrt{2}}{6}+\frac{3\pi\sqrt{6}}{16}$.

Exercício 17.3: (Trabalho p/ casa)

Determine o plano que passa por $(1,0,1)$ e $(1,1,0)$ e é tangente ao gráfico de $f(x,y) = x^3y$.

Resposta: $z + 1/6 = 1/2(x+1) - (y - 1/6)$.

Exercício 17.4: (Trabalho p/ casa)

Calcule aproximadamente

(a) $\sqrt[4]{16,01} + \sqrt{3,98}$

(b) $\ln\left(1,01^3\right) + \sqrt{1,01 + 3,02}$

Resposta: (a) $4 + \frac{1}{32}\frac{1}{100} - \frac{1}{4}\frac{2}{100}$, (b) $\frac{163}{80}$.

Anotações MAT3210 (Draft). Prof Kostiantyn