Aula 16. Diferenciação

Na aula passada a gente definiu a noção das derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ das funções de duas (e mais) variáveis reais $f(x,y)$. Em particular a gente viu que a existência das derivadas parciais não implica em geral que a função $f(x,y)$ é contínua no ponto. Por exemplo considerando função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

temos que ambos $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ existem em $(0,0)$ mas função $f(x,y)$ é descontínua em $(0,0)$ (pois o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe).

O objetivo dessa aula é introduzir uma nova noção de função **derivável** (**diferenciável**) num ponto (a,b) de modo que:

$$f \text{ é derivável em } (a,b) \Rightarrow f \text{ é contínua em } (a,b).$$

Lembrando Cálculo I, a gente tem que função da uma variável $f(x)$ é contínua em ponto x_0 se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0).$$

Podemos reescrever isso da seguinte maneira: f é **derivável** em x_0 se existir a tal que

$$\lim_{h\to x_0} \frac{f(x+0+h)-f(x_0)-ah}{|h|} = 0.$$

É bem fácil confirmar que a existência de tal numero a é equivalente à existência de $f'(x_0)$, pois $a = f'(x_0)$. Assim isso surgere a seguinte definição da função derivável de 2 variáveis.

Definição

Seja $f(x,y)$ função de 2 variáveis reais. Dizemos que $f(x,y)$ é **derivável** num ponto (x_0,y_0) se existem dois numeros reais a e b tais que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-ah-bk}{|(h,k)|}=0,$$

onde $|(h,k)|=\sqrt{h^2+k^2}$.

O numenador do limite acima vamos denotar por $E(h,k)$

$$E(h,k)=f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-ah-bk. \tag{16.1}$$

Logo uma função $f(x,y)$ é derivável em (x_0,y_0) se

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0, \tag{16.2}$$

para alguns $a,b\in\mathbb{R}$.

Agora vamos mostrar que tal definição implica que a função $f(x,y)$ é contínua no ponto (x_0,y_0).

Teorema 16.1

Se $f(x,y)$ é derivável em (x_0,y_0) assim $f(x,y)$ é contínua em (x_0,y_0).

Prova

Temos que função $f(x,y)$ é contínua em (x_0,y_0) se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

ou seja, se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}[f(x,y)-f(x_0,y_0)]=0=\lim_{(h,k)\to(0,0)}[f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)].$$

Em termos de $E(h,k)$ (veja (16.1)), temos

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}[f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)]=\lim_{(h,k)\to(0,0)}[ah+bk+E(h,k)].$$

Observe que quando $(h,k)\to(0,0)$ assim obviamente, $ah\to 0$ e $bk\to 0$. Agora podemos escrever $E(h,k)$ como $\frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\sqrt{h^2+k^2}$. Temos que $\frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\to 0$ pelo (16.2), e $\sqrt{h^2+k^2}\to 0$. Assim, resumindo, temos

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}[f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)]=\lim_{(h,k)\to(0,0)}[ah+bk+E(h,k)]=0$$

e função é contínua no ponto (x_0,y_0).

O seguinte teorema diz que se função $f(x,y)$ é derivável, assim existem as derivadas parciais da $f(x,y)$ e, além, disso eles definam os constantes a e b na definição da função derivável.

Teorema 16.2

Se $f(x,y)$ é derivável em (x_0,y_0) assim $f(x,y)$ possui as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ no ponto (x_0,y_0).

Prova

Se $f(x,y)$ é derivável, assim existem os constantes a, b tais que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - ah - bk}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0,$$

Em particular existe o limite ao longo do caminho $k=0$, $h \to 0$, ou seja existe limite

$$0 = \lim_{(h,0)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0) - ah - b0}{\sqrt{h^2+0^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0) - ah}{|h|},$$

Assim, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{|h|} = a.$$

Proseguindo na mesma maneira, ao longo do caminho $h=0, k\to 0$ temos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0,y_0)}{|h|} = b.$$

Assim o Teorema é provado.

Resuminho o resultado do teorema anterior temos que uma função $f(x,y)$ é derivável no ponto (x_0,y_0) se, e somente se,

(i) Existem derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ no ponto (x_0,y_0) e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = a, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = b.$$

(ii) $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$

Agora vamos ver alguns exemplos para decidir se ou não uma função dada é derivável no ponto.

Exemplo 16.1

Seja $f(x,y) = x^2 y$. Assim temos que as derivadas parciais são

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2.$$

Assim $a = 2xy$ e $b = x^2$. Neste caso $E(h,k)$ dado por

$$\begin{aligned} E(h,k) &= f(x+h, y+k) - f(x,y) - ah - bk \\ &= (x+h)^2 (y+k) - x^2 y - ah - bk \\ &= \left(x^2 + 2xh + h^2\right)(y+k) - x^2 y - 2xyh - x^2 k \\ &= x^2 y + 2xyh + h^2 y + x^2 k + 2xhk + h^2 k - x^2 y - 2xyh - x^2 k \\ &= h^2 y + 2xhk + h^2 k. \end{aligned}$$

Agora o limite (16.2) escreva-se como

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2 y + 2xhk + h^2 k}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left[hy\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} + 2xh\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} + hk\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} \right] = 0. \end{aligned}$$

A gente usou que as funções $\dfrac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}$ e $\dfrac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}$ são funções limitadas e aplicou o Teorema de confronto. Assim, função, $f(x,y) = x^2 y$ é derivável para todos os pontos.

Exemplo 16.2

Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Vamos calcular as derivadas parciais da $f(x,y)$ no $(0,0)$. Temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x} = 1,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0.$$

Assim $a = 1$ e $b = 0$. Agora:

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{|(h,k)|} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-ah-bk}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^3}{h^2+k^2}-0-h-0}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^3-h^3-hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{-hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}. \end{aligned}$$

O último limite não existe, pois ao longo do caminho $h = k$ temos

$$\lim_{h\to 0} \frac{-hh^2}{(h^2+h^2)\sqrt{h^2+h^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \lim_{h\to 0} \frac{h}{|h|},$$

e o limite $\lim_{h\to 0} \dfrac{h}{|h|}$ não existe. Assim função $f(x,y)$ não é derivável em $(0,0)$.

Observação 16.1

Observem que o exemplo acima mostra que existem funções contínuas não deriváveis. De fato

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

é contínua em ponto $(0,0)$ (veja Aula 11), mas não é derivável em $(0,0)$.

Agora a gente vai desenvolver um critério bastante simples e poderoso para verificar se ou não a função dada é derivável no ponto (x_0, y_0). Isso vai permitir (em certos casos) decidir automaticamente (sem calcular o limite (16.2)) a diferencibilidade da função dada.

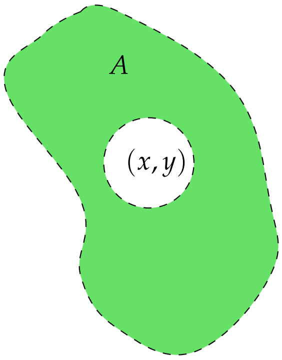
Vamos precisar a noção dos conjuntos **abertos**.

Definição

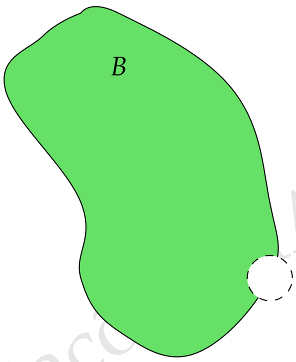
Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ chama-se **aberto** se para todo $(x,y) \in A$ existe raio $\epsilon > 0$ tal que a boa aberta de raio ϵ centrada em (x,y) está contida completamente em A, ou seja

$$\left\{(x',y') \mid (x'-x)^2 + (y'-y)^2 < \epsilon^2\right\} \subset A.$$

Por exemplo o conjunto de baixo é aberto:



Mas o seguinte conjunto não é aberto, pois os pontos da fronteira dele não cumprem a condição dada. De fato qualquer bola aberta centrada na fronteira não está em A completamente!:



Outro exemplo importante de conjunto aberto é todo $\mathbb{R}^2$, que obviamente cumpre a condição da definição.

Definição

Seja $f(x,y)$ uma função definida num conjunto aberto A. Assim f é chamada da classe $\mathcal{C}^1$ em A se as derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y),$$

são funções contínuas em A.

Teorema 16.3

Se f é função da classe $\mathcal{C}^1$ em A, então f é derivável em todo ponto (x,y) de A.

Prova

Pela hipótese as derivadas parciais existem, então a condição (i) vale. Agora temos que

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0) \tag{16.3}$$

Seja $G(x) = f(x, y_0+k)$. Pelo Teorema do Valor médio existe $\bar{x}$ entre x_0 e x_0+k tal que

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) &= G(x_0+h) - G(x_0) \\ &= G'(\bar{x})h = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0+k)h \end{aligned}$$

No mesmo jeito, temos:

$$f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \bar{y})k$$

Assim (16.3) escreva-se como

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0+k)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \bar{y})k$$

Montando função $E(h,k)$ temos,

$$\begin{aligned} E(h,k) &= f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right]h + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \bar{y}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right]k. \end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} &\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right]\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &+ \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \bar{y}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right]\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0. \end{aligned}$$

Pois $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ são contínuas, logo

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right] \to 0, \qquad \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \bar{y}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right] \to 0.$$

Assim $f(x,y)$ é derivável em (x_0, y_0).

Exemplo 16.3

Vamos revisar o Exemplo 16.1. $f(x,y) = x^2y$, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2$$

Temos que ambas as derivadas são contínuas (como o produto das funções contínuas), logo f é derivável em todo $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 16.4

Seja $f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2+y^2)$. Assim

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos\left(x^2+y^2\right)\cdot 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos\left(x^2+y^2\right)\cdot 2y$$

Agora $\cos\left(x^2+y^2\right)$ é função contínua no todo $\mathbb{R}^2$ (pois é composição das funções contínuas). Assim as derivadas parciais são contínuas, logo f é da classe $\mathcal{C}^1$. Portanto f é derivável em $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 16.5

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cdot \operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \text{ se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Vamos calcular as derivadas parciais no ponto $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x^2}}{x} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{y^2\cdot \operatorname{sen}\frac{1}{y^2}}{y} = 0$$

Assim as derivadas parciais são seguintes funções:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{z^2+y^2}\cdot\cos\frac{1}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, \quad \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, \quad \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Os limites $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ não existem (verifique!). Assim $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ não contínuas em $(0,0)$. Mesmo assim a função $f(x,y)$ é derivável em $(0,0)$. Considere

$$\begin{aligned}\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{E(k,h)}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot h-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left(h^2+k^2\right)\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+h^2}} \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)}\left(h^2+k^2\right)^{1/2}\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{h^2+k^2} = 0.\end{aligned}$$

Assim função $f(x,y)$ cumpre (16.1) e (16.2), portanto $f(x,y)$ é derivável em $(0,0)$.

Exercício 16.1: (Trabalho p/ casa)

Mostre que as seguinte funções são deriváveis no seu domínio (usando definição formal e (16.1) e (16.2)).

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$,

(b) $f(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$

Exercício 16.2: (Trabalho p/ casa)

Mostre que as seguinte funções são deriváveis no seu domínio (usando o Teorema 16.3).

(a) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$,

(b) $f(x, y) = \cos(e^{x+y})$.

Exercício 16.3: (Trabalho p/ casa)

Considere função:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Descreva os pontos onde f é derivável.

Resposta: todo $\mathbb{R}^2$.