Aula 15. Derivadas parciais

15.1 Definições

Agora que temos uma breve discussão sobre os limites e funções contínuas de várias variáveis, podemos prosseguir tomando as derivadas de funções de mais de uma variável. Antes de realmente começarmos a tomar as derivadas das funções de mais de uma variável, vamos relembrar uma importante interpretação das derivadas das funções de uma variável.

Lembre-se de que dada a função de uma variável $f(x)$ a derivada, $f\prime(x)$, representa a *taxa de variação da função* quando x muda. Esta é uma interpretação importante das derivadas e não vamos querer perdê-la com funções de mais de uma variável. O problema com funções de mais de uma variável é que há mais de uma variável. Em outras palavras, o que faremos se quisermos que apenas uma das variáveis mude ou quando quisermos que mais de uma delas mude? Na verdade, se vamos permitir que mais de uma das variáveis mude, então haverá uma quantidade infinita de maneiras para que elas mudem. Por exemplo, uma variável pode estar mudando mais rápidamente do que outra(s) variável(is) na função. Observe também que será completamente possível que a função mude de forma diferente dependendo de como permitimos que uma ou mais das variáveis sejam alteradas.

Precisaremos desenvolver formas e notações para lidar com todos esses casos. Nesta aula, vamos nos concentrar exclusivamente na alteração de apenas uma das variáveis de cada vez, enquanto as demais variáveis são mantidas fixas. Lidaremos com a permissão de múltiplas variáveis para mudar nas aulas futuras.

Se vamos permitir que apenas uma das variáveis mude, calcular a derivada agora se tornará um processo bastante simples. Vamos começar esta discussão com uma função bastante simples.

Vamos começar com a função $f(x,y) = 2x^2y^3$ e vamos determinar a taxa na qual a função está mudando em um ponto, se segurarmos y e permitimos x para variar e se mantivermos x e permitirmos y variar.

Começaremos examinando o caso de segurar y fixo e permitindo x variar. Uma vez que estamos interessados na taxa de variação da função em (a,b), isso significa que sempre teremos $y = b$. Fazer isso nos dará uma função envolvendo apenas x E podemos definir uma

Anotações MAT320 (Draft). Prof Kostiantyn

nova função da seguinte forma,

$$g(x) = f(x, b) = 2x^2b^3$$

Agora, esta é uma função de uma única variável e, neste ponto, tudo o que estamos pedindo é para determinar a taxa de variação de $g(x)$ em $x = a$. Em outras palavras, queremos calcular $g\prime(a)$. Temos

$$g'(a) = 4ab^3$$

Vamos chamar $g\prime(a)$ de **a derivada parcial de** $f(x, y)$ **em relação a** x em (a, b) e vamos denotá-lo da seguinte maneira,

$$f_x(a, b) = 4ab^3.$$

Agora, vamos fazer da outra maneira. Agora vamos segurar x e permitir y variar. Podemos fazer isso de maneira semelhante. Uma vez que estamos segurando x fixado deve ser fixado em $x = a$ e assim podemos definir uma nova função de y e então diferencie isso como sempre fizemos com funções de uma variável.

Ou seja,

$$h(y) = f(a, y) = 2a^2y^3 \quad \Rightarrow \quad h'(b) = 6a^2b^2$$

Neste caso, chamamos $h'(b)$ **a derivada parcial de** $f(x, y)$ **em relação a** y em (a, b) e nós o denotamos da seguinte forma,

$$f_y(a, b) = 6a^2b^2.$$

Observe que essas duas derivadas parciais às vezes são chamadas de derivadas parciais de primeira ordem. Assim como com funções de uma variável, podemos ter derivadas de todas as ordens. Veremos as derivadas de ordem superior nas outras aulas.

Observe que a notação para derivadas parciais é diferente daquela para derivadas de funções de uma única variável. Com funções de uma única variável, podemos denotar a derivada com um único primo. No entanto, com as derivadas parciais, sempre precisaremos lembrar a variável que estamos diferenciando em relação a e, portanto, subscreveremos a variável que diferenciamos em relação. Em breve veremos notações alternativas para derivadas parciais.

Observe também que geralmente não usamos o (a, b) notação para derivadas parciais, pois isso implica que estamos trabalhando com um ponto específico que normalmente não estamos fazendo. A notação mais padrão é apenas continuar a usar (x, y). Assim, as derivadas parciais de cima serão mais comumente escritas como,

$$f_x(x, y) = 4xy^3 \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = 6x^2y^2.$$

Agora, como este exemplo rápido mostrou, calcular derivadas de funções de mais de uma variável é feito praticamente da mesma maneira que calcular derivadas de uma única variável. Para calcular $f_x(x, y)$ tudo o que precisamos fazer é tratar todos os y como

Anotações MAT0210 (Draft). Prof Kostiantyn

constantes (ou números) e, em seguida, diferenciar o x como sempre fizemos. Da mesma forma, para calcular $f_y(x,y)$ vamos tratar todos os x como constantes e, em seguida, diferenciar o y como sempre fizemos.

Antes de trabalharmos com vários exemplos, vamos ver as definições formais das derivadas parciais.

Uma vez que podemos pensar nas duas derivadas parciais acima como derivadas de funções de variável única, não deveria ser muito surpreendente que a definição de cada uma seja muito semelhante à definição da derivada para funções de variável única. Aqui estão as definições formais das duas derivadas parciais que vimos acima:

$$\boxed{f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}.}$$

$$\boxed{f_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}.}$$

Se lembrarmos da definição de limite de Cálculo I, as definições acima parecem muito familiares, pois estão bem próximas da definição de Cálculo I com as devidas mudanças.

Agora vamos dar uma olhada rápida em algumas das possíveis notações alternativas para derivadas parciais. Dada a função $z = f(x,y)$ a seguir estão todas as notações equivalentes,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0).$$

Anotações MAT3210 (Draft). Prof Kostiantyn

15.2 Exemplos

Exemplo 15.1

Seja $f(x,y) = 3x^2y$. Vamos encontrar as derivadas parciais no ponto $(a,b) = (1,2)$. Aplicando as regras usuais da derivação temos o seguinte:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6xy, \qquad f_x(1,2) = 12$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2, \qquad f_y(1,2) = 3.$$

Além disso podemos calcular a derivada através o limite (a definição formal). Derivando em relação do x, temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)^2\cdot y - 3x^2y}{h}\\ &= 3y\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}\\ &= 3y\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}\\ &= 3y\lim_{h\to 0}(2x+h) = 6xy.\end{aligned}$$

Assim, temos,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 6\cdot 1\cdot 2 = 12.$$

Exemplo 15.2

Seja $f(x,y) = 4x^2 + 3x^3y^2$. Assim

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 8x + 9x^2y^2,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6x^3y.$$

Exercício 15.1

Calcular as derivadas parciais para seguintes funções

(a) $f(x,y) = xy + e^{xy} + y\ln x$;

(b) $f(x,y) = x^y$.

(c) $f(x,y) = \operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right) + \frac{x^2\cdot y}{x^2+y^2}$

Lembrete:

1. $(x^a)' = ax^{a-1}$,
2. $(a^x)' = a^x\ln a$.
3. $\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Solução 15.1

a) Temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + e^{xy} \cdot y + y \cdot \frac{1}{x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + x \cdot e^{xy} + \ln x$$

b) Neste caso, derivando em relação x e y, temos (aplicando a derivação da função exponencial e potencial, veja lembrete do lado):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x.$$

c)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos\left(x^2+y^2\right) \cdot 2x + \frac{2xy\left(x^2+y^2\right) - 2x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos\left(x^2+y^2\right) \cdot 2y + \frac{x^2\left(x^2+y^2\right) - 2y \cdot x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Antes de fazer o próximo exemplo, observem que podemos definir as derivadas parciais para funções com 3 e mais variáveis também. Tenha sempre em mente que precisamos prestar muita atenção a qual variável estamos nos diferenciando. Isso é importante porque vamos tratar todas as outras variáveis como constantes e, em seguida, prosseguir com a derivada como se fosse uma função de uma única variável. Se você se lembrar disso, descobrirá que fazer derivadas parciais não é muito mais difícil do que fazer derivadas de funções de uma única variável como fizemos no Cálculo I.

Se $f(x_1, \cdot, x_n)$ é função de n-variáveis e $(a_1, \ldots, a_n)$ um ponto, assim a **derivada parcial da $f(x_1, \cdot, x_n)$ em relação da x_i no ponto** $(a_1, \ldots, a_n)$ é definida como:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)}{h}.$$

Exemplo 15.3

Seja $f(x,y,z) = yz\ln(xy)$. Calcule todas derivadas parciais da f.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = yz\frac{1}{xy}y = \frac{yz}{x},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = z\left[\ln(xy) + y \cdot \frac{1}{xy} \cdot x\right] = z[\ln(xy) + 1],$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = y\ln(xy).$$

Anotações MAT3210 (Draft). Prof Kostiantyn

15.3 *Derivadas parciais e continuidade*

Vamos lembrar que se uma função $f(x)$ possui derivada no ponto x_0, assim $f(x)$ é automaticamente função contínua em x_0. O seguinte exemplo mostre que o fato análogo é falso para funções de varias variáveis reais.

Exemplo 15.4

Considere função $f(x,y)$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Vamos calcular as derivadas parciais no ponto $(0,0)$ seguinte a definição formal. Temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0.$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0.$$

1

Assim ambas derivadas parciais existem no ponto $(0,0)$. Mas o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe! (veja Aula 10). Assim a função $f(x,y)$ é descontínua no ponto $(0,0)$.
Então esse exemplo mostra que a existência das derivadas parciais no ponto não implica que a função é contínua no ponto.

Na aula que vem, vamos definir outra noção mais forte das funções **deriváveis** , de modo que se $f(x,y)$ é derivável no ponto (a,b), então $f(x,y)$ é contínua no ponto.

15.4 *Derivação das funções implícitas*

Há um tópico final que precisamos examinar rapidamente nesta aula. É a diferenciação implícita. Antes de entrar na diferenciação implícita para funções de múltiplas variáveis, vamos primeiro lembrar como a diferenciação implícita funciona para funções de uma variável.

Exemplo 15.5

Encontre $\dfrac{dy}{dx}$ para $3y^4 + x^7 = 5x$.
Vamos lembrar que a chave é sempre pensar y como função de x, ou $y = y(x)$. Assim quando a gente deriva os termos que involvem y's com respeito ao x, vamos precisar utilizar a regra de cadeia, que diz que precisamos adicionar $\frac{dy}{dx}$ para aquele termo.
Primeiramente vamos diferenciar ambos os lados com respeito ao x

$$12y^3\frac{dy}{dx} + 7x^6 = 5.$$

Agora somente precisamos resolver para $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5 - 7x^6}{12y^3}.$$

Agora, resolvemos esse problema porque a diferenciação implícita funciona exatamente da mesma maneira com funções de várias variáveis. Se tivermos uma função em termos de três variáveis x, y, e z vamos assumir que z é na verdade uma função de x e y. Em outras palavras, $z = z(x, y)$. Então, sempre que diferenciamos z em relação a x vamos usar a regra da cadeia e adicionar o termo $\dfrac{\partial z}{\partial x}$. Da mesma forma, sempre que diferenciamos z em relação a y vamos adicionar o termo $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Anotações MAT3210 (Draft). Prof Kostiantyn

Exemplo 15.6

Seja $z = f(x,y)$ função dada implicitamente pelo $x^2+y^2+z^2=1, \quad z>0$. Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.
Temos
$$x^2+y^2+z^2=1.$$
Derivando sobre x temos
$$\frac{\partial\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\partial x} = \frac{\partial 1}{\partial x} = 0$$
Por outro lado temos
$$\frac{\partial\left(x^2+y^2\right)}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial\left(z^2\right)}{\partial x} = 2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}.$$
Ou seja
$$0 = \frac{\partial\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(x^2+y^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(z^2\right)}{\partial x} = 2x+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}.$$
Agora resolvendo para $\frac{\partial z}{\partial x}$, temos
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}.$$
Na mesma maneira temos que
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$$
Neste caso podemos simplesmente confirmar ambas as formulas. Temos
$$z^2 = 1-x^2-y^2 \to z = \sqrt{1-x^2-y^2}$$
Assim a expressão explicita para $z = f(x,y)$ é $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$. Agora derivando para x, temos
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(1-x^2-y^{-1}\right)^{-1/2}\cdot(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = -\frac{x}{z}.$$

Exercício 15.2

Seja função $z = z(x,y)$ dada implicitamente por
$$e^{xyz} = x^2+y^2+z^2.$$
Expresse $\frac{\partial z}{\partial x}$ em termos de x,y,z.

Solução 15.2

Derivando ambos os lados de $e^{xyz} = x^2+y^2+z^2.$, temos
$$\frac{\partial e^{xyz}}{\partial x} = \frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{x}.$$

Por outro lado

$$\frac{\partial}{\partial x}e^{xyz} = e^{xyz}\cdot\frac{\partial(xyz)}{\partial x} = e^{xyz}\left(yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right) = 2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Assim

$$e^{xyz}\left[yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}\right] = 2x + 2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Isolando $\frac{\partial z}{\partial x}$, temos

$$[e^{xyz}\cdot xy - 2z]\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - e^{xyz}\cdot yz.$$

Portanto

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x - e^{xyz}\cdot yz}{e^{xyz}\cdot xy - 2z}.$$

Prof Kostiantyn

Exercício 15.3: (Trabalho p/ casa)

Encontre as derivadas parciais para funções abaixo:

(a) $f(x,y) = x^4 + 6\sqrt{y} - 10$,

(b) $w(x,y) = x^2y - 10y^2z^3 + 43x - 7\tan(4y)$,

(c) $h(s,t) = t^7\ln\left(s^2\right) + \frac{9}{t^3} - \sqrt[7]{s^4}$,

(d) $z(u,v) = \dfrac{9u}{u^2+5v}$,

(e) $g(x,y,z) = \dfrac{x\sin(y)}{z^2}$,

(f) $z(x,y) = \sqrt{x^2 + \ln\left(5x - 3y^2\right)}$.

Anotações

Exercício 15.4: (Trabalho p/ casa)

Seja função $z = z(x,y)$ dada implicitamente. Expresse $\frac{\partial z}{\partial x}$ em termos de x, y, z.

(a) $x^3z^2 - 5xy^5z = x^2 + y^3$.

Resposta: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x-3x^2z^2+5y^5z}{2x^3z-5xy^5}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3y^2+25xy^4z}{2x^3z-5xy^5}$.

(b) $x^2\sin(2y-5z) = 1 + y\cos(6zx)$.

Resposta: $\frac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x\sin(2y-5z)+6zy\sin(6zx)}{5x^2\cos(2y-5z)-6yx\sin(6zx)}$,
$\frac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\cos(6zx)-2x^2\cos(2y-5z)}{6xy\sin(6zx)-5x^2\cos(2y-5z)}$.