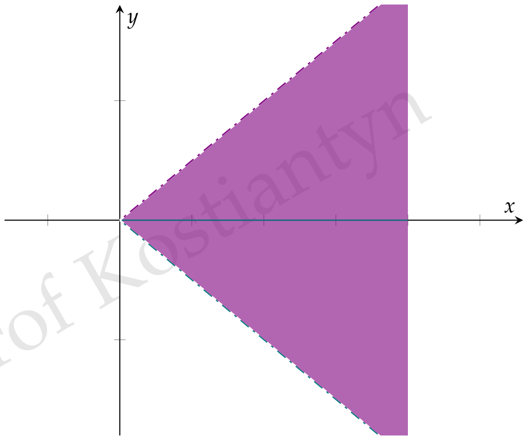
Aula 14. Revisão 3.

14.1 Domínios das funções de várias variáveis.

Exercício 14.1: Lista 2. 1(e)

Ache e esboce o domínio da função:

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$$



Solução 14.1

O domínio da função é todos os pontos onde as raízes $\sqrt{x+y}$ e $\sqrt{x-y}$ são definidas e não nulas. Ou seja é dado por

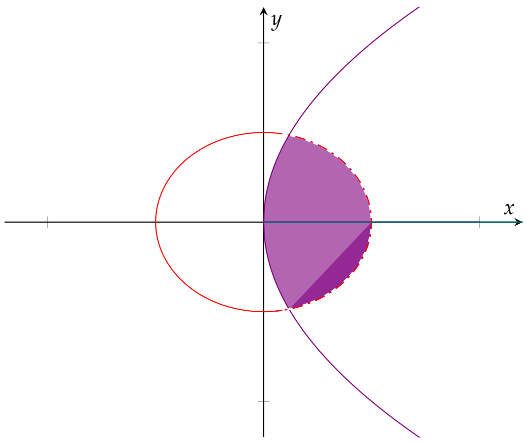
$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > -y,\ x > y\}.$$

As condições $x = -y$, $x = y$ são duas retas na plano. Assim o domínio são os pontos entre as retas com $x > 0$. Observe que precisa tirar ambas as retas da imagem, pois se $x = y$ ou $x = -y$ a função não está bem definida.

Exercício 14.2: Lista 2. 1(j)

Ache e esboce o domínio da função:

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln\left(1-x^2-y^2\right)}.$$



Solução 14.2

O domínio da função são todos os pontos onde a raízes $\sqrt{4x-y^2}$ e $\ln\left(1-x^2-y^2\right)$ estão definidos e $\ln\left(1-x^2-y^2\right) \neq 0$. Ou seja é dado por

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x > y^2,\ 1-x^2-y^2 > 0,\ 1-x^2-y^2 \neq 1\}.$$

Observe que isso pode ser escrito como

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y^2/4,\ 0 < x^2+y^2 < 1\}.$$

A condição $x > y^2/4$ define uma parábola no plano e $x^2 + y^2 = 1$ é a circunferência com raio 1 e centro na origem. O esboço do domínio é dado pela imagem ao lado. Observe que precisa de tirar a parte da circunferência que fica do lado esquerdo da parábola.

14.2 *Limites*

Exercício 14.3: Lista 2, 4(b)

Calcule
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}.$$

Solução 14.3

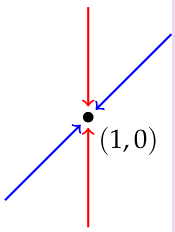
Vamos fazer a troca $t = x^2 + y^2$. Observe que se $(x, y) \to 0$ assim obviamente $t = x^2 + y^2 \to 0$. Por outro lado se $t \to 0$ assim $(x, y) \to 0$. Assim o limite dado podemos reescrever como
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sqrt{t+1}-1}.$$
Multiplicando pelo conjugado $\sqrt{t+1}+1$, temos
$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{t}{\sqrt{t+1}-1} &= \lim_{t\to 0} \frac{t(\sqrt{t+1}+1)}{(\sqrt{t+1}-1)(\sqrt{t+1}+1)}\\ &= \lim_{t\to 0} \frac{t(\sqrt{t+1}+1)}{t+1-1}\\ &= \lim_{t\to 0}(\sqrt{t+1}+1) = 2.\end{aligned}$$
Assim, o limite é 2.

Exercício 14.4: Lista 2, 4(b)

Calcule
$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy-y}{(x-1)^2+y^2}.$$

Solução 14.4

Seja $f(x,y) = \dfrac{xy-y}{(x-1)^2+y^2}$. Vamos mostrar que
$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$$
não existe. Vamos nos primeiro aproximar $(1,0)$ ao longo do reta $x = 1$. Então $x = 1$ dá $f(1,y) = 0y/(0+y^2) = 0$ para todos $y \neq 0$, en-



tão

$$f(x,y) \to 0 \quad \text{quando} \quad (x,y) \to (1,0),$$

ao longo da reta $x = 1$. Agora nos aproximamos ao longo da reta $y = x - 1$. Então $f(x, x-1) = \dfrac{(x-1)(x-1)}{(x-1)^2 + (x-1)^2} = \dfrac{1}{2}$ para todos $x \neq 0$, assim

$$f(x,y) \to \frac{1}{2} \quad \text{quando} \quad (x,y) \to (1,0),$$

ao longo da reta $y = x - 1$. Como f tem dois limites diferentes ao longo de dois caminhos diferentes, o limite não existe.

Exercício 14.5: Lista 2, 4(a)

Calcule

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{y}}{xy + y}.$$

Solução 14.5

Seja $f(x,y) = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{y}}{xy+y}$. Vamos ver o valor aproximado da $f(x,x)$ ao longo do caminho $y = x$. Temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{xx + x} &= \lim_{x\to 0} \frac{x+1-x}{(x^2+x)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{(x^2+x)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}. \end{aligned}$$

Este limite não existe, pois o denominador aproxima 0 e o numerador é não nulo. Assim o limite da $f(x,y)$ no ponto $(0,0)$ também não existe.

Para calcular o seguinte limite, vamos lembrar o teorema do confronto e as seguintes propriedades dos limites (veja Aula 10 para mais detalhes):

Theorem 14.1: Propriedades dos limites.

Sejam $f(x,y)$, $g(x,y)$ duas funções. Assim

(1) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0$ se e somente se $\lim_{(x,y)\to(a,b)} |f(x,y)| = 0$.

(2) Se $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L_1$ e $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L_2$, então:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} [c \cdot f(x,y)] = c \cdot L_1$, para qualquer constante c;

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} [f(x,y) + g(x,y)] = L_1 + L_2$;

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} [f(x,y) \cdot g(x,y)] = L_1 \cdot L_2$;

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, se $L_2 \neq 0$.

Theorem 14.2: Teorema de confronto. Versão 1.

Sejam $f(x,y), g(x,y)$ e $h(x,y)$ e seja (a,b) um ponto, tais que:

$$\cdot \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L = \lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y)$$

e

$$f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y),$$

para todos (x,y) "perto" do ponto (a,b). Então, resulta destas condições que:

$$\cdot \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L.$$

Na prática, muito útil a seguinte versão do Teorema de Confronto
(que segue direitamente da primeira versão).

Theorem 14.3: Teorema de confronto. Versão 2.

Sejam $f(x,y)$ e $g(x,y)$ e seja (a,b) um ponto, tais que:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0$$

e $g(x,y)$ é uma função limitada em ponto (a,b), ou seja existe M tal que

$$|g(x,y)| \leq M,$$

para todos (x,y) "pertos" do ponto (a,b). Então, resulta destas condições que:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \cdot g(x,y) = 0.$$

De fato várias funções são limitadas, por exemplo $g(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ e $\tilde{g}(x,y) = \dfrac{y^2}{x^2+y^2}$, pois

$$0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2$$

e, semelhante
$$0 \leq y^2 \leq x^2 + y^2.$$

Exercício 14.6: Lista 2, 4(f)

Calcule
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}.$$

LEMBRETE:

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$

Solução 14.6

Usando o lembrete do lado, temos que
$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + x^3.$$

Assim o limite pode ser escrito como

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[x \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} + 3y \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} + 3x \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2} + y \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2} \right].$$

Agora cada termo tem fator x ou y (que tentem para 0) e fator $\frac{x^2}{x^2+y^2}$ ou $\frac{y^2}{x^2+y^2}$. Portanto, usando o Teorema do confronto, temos que o limite é 0.

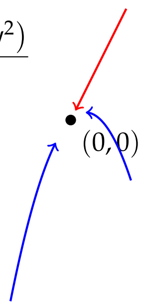
Exercício 14.7: Lista 2, 4(i)

Calcule
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}.$$

Solução 14.7

Primeiramente, observe que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2-y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)\,(x^2-xy+y^2)}{(x+y)(x-y)}$$
$$= \lim_{(x,y)-x(0,0)} \frac{x^2-xy+y^2}{x-y}.$$



Considere o caminho $y = 2x$ (caminho vermelho no esboço), ao longo este caminho temos

$$f(x,2x) = \frac{x^2 - x\cdot 2x + 4x^2}{-x} = \frac{3x^2}{-x}$$
$$f(x,2x) = -3x \to 0$$

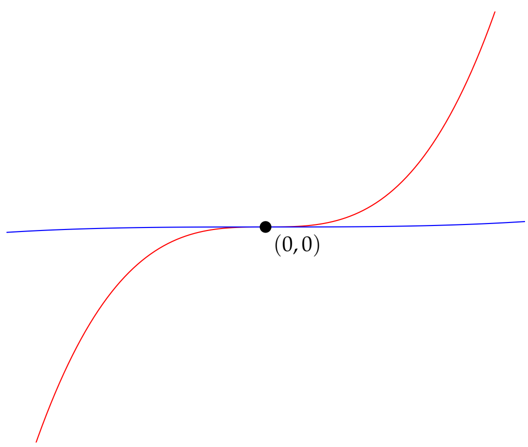
Considere o caminho $y = x - x^2$ (caminho azul no esboço). Neste caso, temos

$$\begin{aligned} f(x, x-x^2) &= \frac{x^2 - x(x-x^2) + (x-x^2)^2}{x - x + x^2} \\ &= \frac{x^2 - x^2 + x^3 + x^2 - 2x^3 + x^4}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - x^3 + x^4}{x^2} \\ &= 1 - x + x^2 \to 1. \end{aligned}$$

Assim, ao longo de dois caminho diferentes, a função aproxima os valores diferentes. Portando o limite não existe.

Exercício 14.8: Lista 2, 4(j)

Calcule
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{(x^3-y)}.$$



Solução 14.8

Primeiramente, observe que a curva $y = x^3$ onde o denominar nulo é fora do domínio da função

$$f(x,y) = \frac{xy}{(x^3-y)}.$$

Mas a curva $y = x^2 \operatorname{sen} x$ está no domínio e quando

$$(x,y) \to (0,0)$$

a curva $y = x^2 \operatorname{sen} x$ aproxima $y = x^3$ (conforme a figura do lado) pois

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1,$$

pelo limite fundamental. Assim vamos ver o valor aproximado da $f(x,y)$ ao longo da curva $y = x^2 \operatorname{sen} x$. Temos:

$$f\left(x, x^2 \operatorname{sen} x\right) = \frac{x \cdot x^2 \cdot \operatorname{sen} x}{x^3 - x^2 \cdot \operatorname{sen} x} = \frac{x \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}$$

Agora temos (aplicando as duas vezes a regra L'Hôpital),

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x} &= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x + x \cos x}{1 - \cos x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x + \cos x - x \cdot \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{2 \cos x - x \cdot \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} \to \frac{2}{0}
\end{aligned}$$

Ou seja o limite não existe. Portando o limite

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{(x^3 - y)}.$$

não existe também.

14.3 Continuidade

Vamos lembrar, que se $f(x,y)$ é uma função de duas variáveis reais e (a,b) um ponto no domínio da $f(x,y)$. Dizemos que $f(x,y)$ é **contínua** no (a,b), se

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

Analogamente, a função $f(x,y)$ é **contínua numa região** $B \subset D$ se ele é contínua para todos (a,b) em B.

Temos as seguintes propriedades das funções contínuas.

Theorem 14.4: Propriedades das funções contínuas.

Sejam $f(x,y)$, $g(x,y)$ duas funções contínuas em ponto (a,b). Então:

- $\dfrac{c}{f(x,y)}$ é função contínua em ponto (a,b) para qualquer constante c.
- $f(x,y) + g(x,y)$ é função contínua em ponto (a,b) (ou seja, **a soma das funções contínuas é contínua**).
- $f(x,y) \cdot g(x,y)$ é função contínua em ponto (a,b) (**o produto de funções contínuas é contínuo**).
- $\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ é função contínua em ponto (a,b), se $g(a,b) \neq 0$ (**o quociente de funções contínuas é contínuo**).

Theorem 14.5: Composição das funções contínuas.

Seja g uma função de duas variáveis de um domínio $D \subset \mathbb{R}^2$. Suponha que g seja contínuo em algum ponto $(a,b) \in D$. Se h é uma função de uma variável real contínua em ponto $g(a,b)$, assim a função composta

$$f(x,y) = h(g(x,y)),$$

é função contínua em ponto (a,b) também.

Exercício 14.9: Lista 2, 5(c)

Determine o conjunto dos pontos de continuidade da função:

$$f(x,y) = \ln \frac{x-y}{x^2+y^2}.$$

Solução 14.9

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x-y}{x^2+y^2} > 0\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\right\}. \end{aligned}$$

Os polinômios $x-y$ e x^2+y^2 são contínuos em todos os números reais e, portanto, temos

$$g(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$$

é contínua em todos os pontos (x,y) do conjunto D_f, pois $(0,0)$ não pertence esse conjunto. Agora função $h(x) = \ln x$ é contínua no seu domínio, assim a continuidade da composição das funções nos diz que

$$h(g(x,y)) = \ln \frac{x-y}{x^2+y^2}$$

é contínuo em todos os pontos (x,y) do conjunto D_f.

Exercício 14.10: Lista 2, 5(f)

Determine o conjunto dos pontos de continuidade da função:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}, \text{ se} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 \text{ se} & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Solução 14.10

Os polinômios x^2 e y^2 são contínuos em todos os números reais e, portanto, temos x^2+y^2, $\sqrt{x^2+y^2}$ e $\cos\sqrt{x^2+y^2}$ são funções contínuas para todos os pontos (x,y) do plano, como soma e composição das funções contínuas respectivamente. Assim a função $\dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$ é contínua para todos os pontos onde o denominador é não nulo, ou seja, para todos $(x,y)\neq(0,0)$.

Agora vamos calcular o limite da função $f(x,y)$ no ponto $(0,0)$. Para ser contínua é necessário que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 1.$$

Temos:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)-(0,0)} \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \\ &= \left| t^2 = x^2+y^2 \right| = \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}.\end{aligned}$$

Aplicando a regra L'Hôpital, temos

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{2t} = \frac{1}{2} \neq 1 = f(0,0).$$

Como

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq f(0,0).$$

Assim $f(x,y)$ é descontínua em $(0,0)$. Resumindo, temos que $f(x,y)$ é contínua em todos os pontos tais que $(x,y)\neq(0,0)$.