Aula 13. Revisão 2.

13.1 Comprimento das curvas

Vamos lembrar as fórmulas para calcular os comprimentos das curvas. Mais informações estão disponíveis na Aula 7.

Seja $f(x)$ uma função suave no intervalo $[a, b]$. Então, o comprimento do arco da porção do gráfico de $f(x)$ do ponto $(a, f(a))$ ao ponto $(b, f(b))$ é dado por:

$$\text{Comprimento do Arco } = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx. \tag{13.1}$$

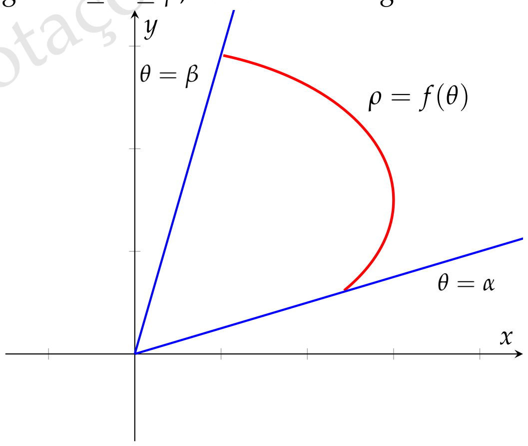
Se a curva dada pelas equações paramétricas (como na Aula 4):

$$x = x(t), \qquad y = y(t),$$

onde t varia num intervalo $[c, d]$, então o comprimento do arco da porção do gráfico da curva $(x(t), y(t))$ do ponto $(x(c), y(c))$ ao ponto $(x(d), y(d))$ é dado por:

$$\text{Comprimento da curva } = \int_c^d \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt. \tag{13.2}$$

Finalmente, se a curva é dada pela equação polar $\rho = f(\theta)$ com ângulo $\alpha \leq \theta \leq \beta$, conforme a imagem de baixo.



Assim o comprimento do arco da curva $\rho = f(\theta)$ com ângulo $\alpha \leq \theta \leq \beta$ é dado por

$$\text{Comprimento da curva } = \int_\alpha^\beta \sqrt{f^2 + [f'(\theta)]^2}d\theta. \tag{13.3}$$

Exercício 13.1: (Lista 1, (a))

Calcule o comprimento do arco da função $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ quando $0 \leq x \leq 1$.

Solução 13.1

Vamos cuidar primeiramente da derivada e da raiz. Temos

$$f'(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{1+x}$$

Assim, aplicando a fórmula (13.1), temos

$$\text{Comprimento do Arco } = \int_0^1 (1+x)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{4}{15} + \frac{4\sqrt{2}}{15}$$

Exercício 13.2: (Lista 1, (e))

Calcule o comprimento de arco da função $f(x) = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ quando $a \leq x \leq b$.

Solução 13.2

Observe que podemos escrever $f(x)$ como

$$f(x) = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \ln(e^x - 1) - \ln(e^x + 1).$$

Assim, temos

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x(e^x+1) - e^x(e^x - 1)}{(e^x - 1)(e^x + 1)} = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 + f'(x)^2} &= \sqrt{1 + \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{(e^{2x}+1)^2}{(e^{2x}-1)^2}} \\
&= \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} \\
&= \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1} - 1.
\end{aligned}$$

Assim, aplicando a fórmula (13.1), temos

$$\begin{aligned}\text{Comprimento do Arco } &= \int_a^b \Big(\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}-1\Big)dx \\ &= \big|u = e^{2x}-1, du = 2e^{2x}dx\big| \\ &= \big[\ln|e^2x-1| - x\big]\Big|_a^b \\ &= \ln\left|\frac{e^{2b}-1}{e^{2b}-1}\right| - (b-a).\end{aligned}$$

Exercício 13.3: (Lista 1, 2(c))

Calcule o comprimento de curva dada em forma paramétrica:

$$x(t) = 1-\cos t,\ y(t) = t - \operatorname{sen} t,$$

quando $0 \le t \le \pi$.

Solução 13.3

Temos

$$x'(t) = \operatorname{sen} t, \qquad y'(t) = 1-\cos t.$$

Portanto

$$\begin{aligned}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2} &= \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + (1-\cos t)^2} \\ &= \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + 1 - 2\cos t + \cos^2 t} \\ &= \sqrt{2-2\cos t} = \sqrt{2\cdot 2\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}} = 2\operatorname{sen}\frac{t}{2}.\end{aligned}$$

Assim, aplicando a fórmula (13.2), temos

$$\begin{aligned}\text{Comprimento do Arco } &= \int_0^\pi 2\operatorname{sen}\frac{t}{2}dt \\ &= 4(-\cos\frac{t}{2})\Big|_0^\pi = 4.\end{aligned}$$

Exercício 13.4: (Lista 1, 2(d))

Calcule o comprimento de curva dada em forma paramétrica:

$$x(t) = \frac{t^2}{2},\ y(t) = \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}},$$

quando $0 \le t \le 1$.

Solução 13.4

Temos

$$x'(t) = t, \qquad y'(t) = t^{\frac{3}{2}}.$$

Portanto

$$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{t^2 + t^3} = t\sqrt{1+t}.$$

Assim, aplicando a fórmula (13.2), temos

$$\begin{aligned}
\text{Comprimento do Arco} &= \int_0^1 t\sqrt{1+t}dt \\
&= \left| \begin{array}{ll} t+1 = u^2, & t = 1 \to u = \sqrt{2} \\ dt = 2udu, & t = 0 \to u = 1 \end{array} \right| \\
&= \int_1^{\sqrt{2}} (u^2-1)u(2u)du \\
&= 2\int_1^{\sqrt{2}} (u^4 - u^2)du \\
&= 2\Big[\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3}\Big]\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{4}{15} + \frac{4\sqrt{2}}{15}.
\end{aligned}$$

Exercício 13.5: (Lista 1, 4(b)

Calcule o comprimento de curva dada em equações polares:

$$\rho(\theta) = 1 + \cos\theta,$$

quando $0 \leq \theta \leq \pi$.

Solução 13.5

Temos

$$\rho'(\theta) = -\operatorname{sen}\theta.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} &= \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta} \\
&= \sqrt{1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta} \\
&= \sqrt{2 + 2\cos\theta} = \sqrt{2\cdot 2\cos^2\frac{\theta}{2}} = 2\cos\frac{\theta}{2}.
\end{aligned}$$

Assim, aplicando a fórmula (13.3), temos

$$\begin{aligned}
\text{Comprimento do Arco} &= \int_0^{\pi} 2\cos\frac{\theta}{2}d\theta \\
&= 4(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2})\Big|_0^{\pi} = 4.
\end{aligned}$$

Exercício 13.6: (Lista 1, 4(d)

Calcule o comprimento de curva dada em equações polares:

$$\rho(\theta) = e^{-\theta},$$

quando $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Solução 13.6

Temos

$$\rho'(\theta) = -e^{-\theta}.$$

Portanto

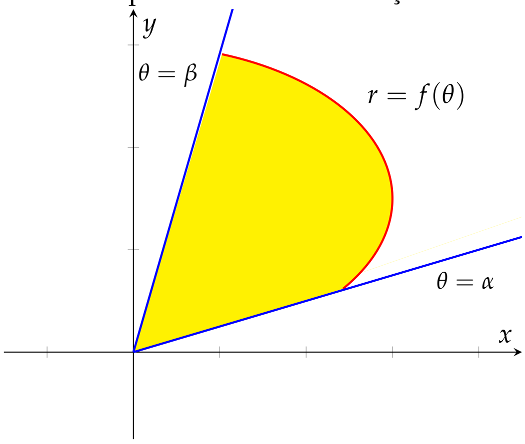
$$\begin{aligned}\sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} &= \sqrt{e^{-2\theta} + e^{-2\theta}} \\ &= \sqrt{2}e^{-\theta}.\end{aligned}$$

Assim, aplicando a fórmula (13.3), temos

$$\begin{aligned}\text{Comprimento do Arco } &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}e^{-\theta} d\theta \\ &= \sqrt{2}(-e^{-\theta})\Big|_0^{2\pi} = \sqrt{2}\Big[1 - e^{-2\pi}\Big].\end{aligned}$$

13.2 Áreas em coordenadas polares

Vamos lembrar as fórmulas para calcular as áreas das regiões em coordenadas polares. Mais informações estão disponíveis na Aula 6.



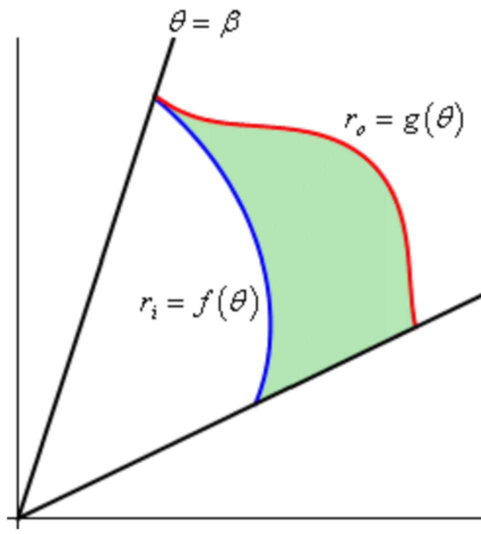
Estaremos procurando a área amarela no esboço acima do conjunto A, dado por

$$A = \left\{ (\rho, \theta) \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 \le \rho \le f(\theta), \\ \alpha \le \theta \le \beta \end{array} \right\}.$$

A fórmula para encontrar esta área é,

$$\boxed{\text{Área } A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta.} \tag{13.4}$$

Além disso nos vários exemplos é bem útil calcular as áreas de regiões entre duas curvas $f(\theta)$ e $g(\theta)$ quando o raio varia como no esboço de lado.



Estaremos procurando a área no esboço do lado dado por

$$A = \left\{ (\rho, \theta) \;\middle|\; \begin{array}{l} g(\theta) \le \rho \le f(\theta), \\ \alpha \le \theta \le \beta \end{array} \right\}.$$

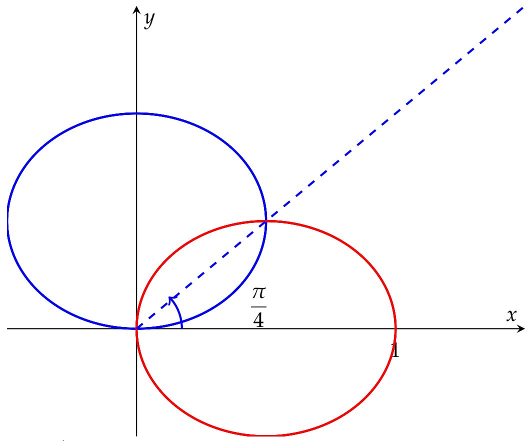
A fórmula para encontrar esta área é,

$$\boxed{\text{Área } A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f^2(\theta) - g^2(\theta)] d\theta.} \tag{13.5}$$

Exercício 13.7: (Lista 1, 3(d)

Calcule a área de interseção das curvas:

$$\rho(\theta) = \cos\theta, \qquad \rho(\theta) = \operatorname{sen}\theta.$$



Solução 13.7

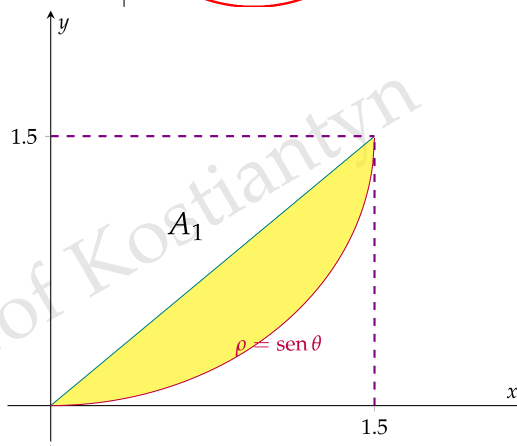
Lembrando a aula 5, temos que $\rho(\theta) = \cos\theta$ define a circunferência no plano, pois

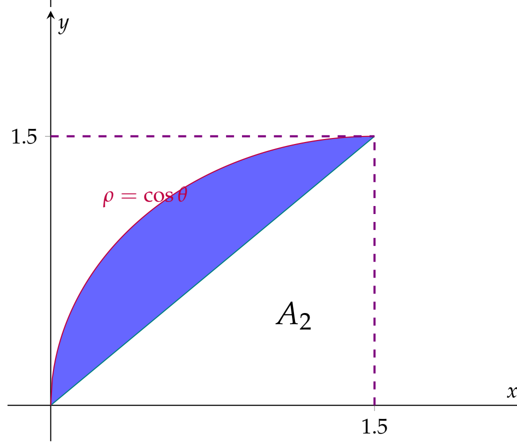
$$\begin{aligned} \rho &= \cos\theta, \\ \Rightarrow \rho^2 &= \rho\cos\theta, \\ \Rightarrow x^2 + y^2 &= x, \\ \Rightarrow (x - 1/2)^2 + y^2 &= (1/2)^2, \end{aligned}$$

ou seja $\rho(\theta) = \cos\theta$ é circunferência com centro em ponto $(1/2, 0)$ e raio $1/2$. Semelhante, $\rho(\theta) = \operatorname{sen}\theta$ é circunferência com centro em ponto $(0, 1/2)$ e raio $1/2$. Eles se encontram quando

$$\cos\theta = \operatorname{sen}\theta, \qquad \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Observe que para calcular a área interior das ambas as circunferências, podemos dividir a região para duas: quando o ângulo varia entre 0 e $\pi/4$ e quando o ângulo varia entre $\pi/4$ e $\pi/2$ (como na figura do lado). Aplicando a fórmula (13.4) temos





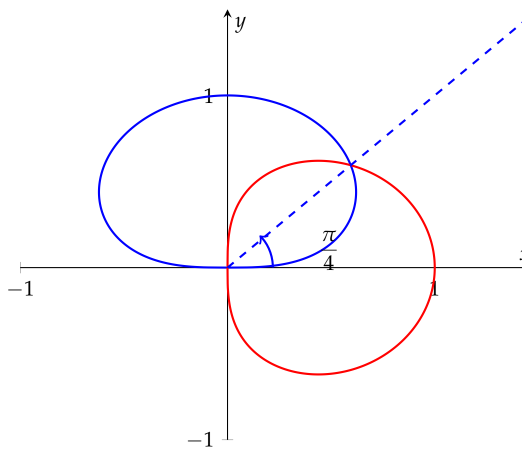
$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^2\theta d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^2\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left[\theta - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right] = \frac{\pi - 2}{8}. \end{aligned}$$

Exercício 13.8: (Lista 1, 3(e)

Calcule a área de interseção das curvas:

$$\rho^2(\theta) = \cos\theta, \qquad \rho^2(\theta) = \operatorname{sen}\theta,$$

com $\rho \geq 0$.



Solução 13.8

Os gráficos se encontram quando

$$\cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta, \qquad \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

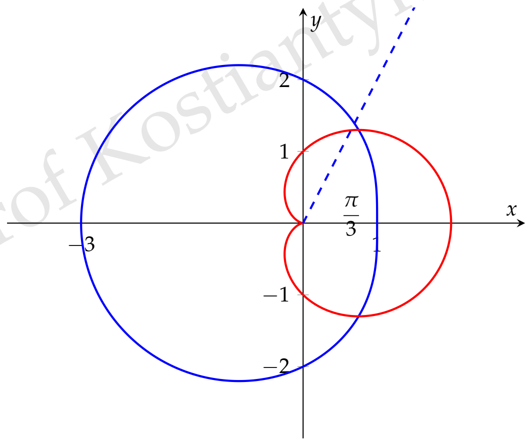
Agora conforme imagem do lado e prosseguindo como no exercício anterior temos:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}\theta d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}\theta d\theta \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1. \end{aligned}$$

Exercício 13.9: (Lista 1, 3(b)

Calcule a área de interseção das curvas:

$$\rho(\theta) = 2 - \cos\theta, \qquad \rho(\theta) = 1 + \cos\theta.$$



Solução 13.9

Os gráficos se encontram quando

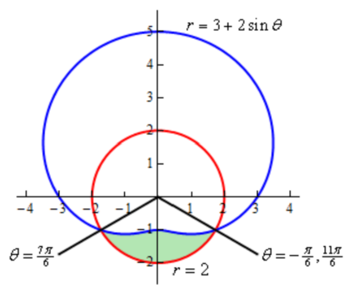
$$2 - \cos\theta = 1 + \cos\theta, \qquad \Rightarrow \cos\theta = 1/2, \qquad \Rightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{3}.$$

Agora conforme imagem do lado e prosseguindo como nos exercícios anteriores temos:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= 2\Big[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (2-\cos\theta)^2 d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (1+\cos\theta)^2 d\theta\Big] \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (4 - 4\cos\theta + \cos^2\theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta \\ &= \frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Exercício 13.10: Aula 7, Trabalho p/ casa

Determine a área que está fora do $\rho = 3 + 2\cos\theta$ e dentro do $\rho = 2$.



Solução 13.10

Para determinar esta área, precisamos saber os valores de θ para os quais as duas curvas se cruzam. Podemos determinar esses pontos definindo as duas equações e resolvendo:

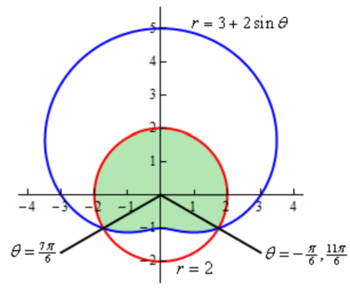
$$\begin{aligned} 3 + 2\sin\theta &= 2 \\ \sin\theta &= -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \end{aligned}$$

Então, esta é a região que obtemos usando os limites $\frac{7\pi}{6}$ para $\frac{11\pi}{6}$. Agora conforme imagem do lado temos e aplicando (13.5) temos:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} \frac{1}{2}\left((2)^2 - (3 + 2\sin\theta)^2\right) d\theta \\ &= \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} \frac{1}{2}\left(-5 - 12\sin\theta - 4\sin^2\theta\right) d\theta \\ &= \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} \frac{1}{2}(-7 - 12\sin\theta + 2\cos(2\theta))d\theta \\ &= \frac{1}{2}(-7\theta + 12\cos\theta + \sin(2\theta))\Big|_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} \\ &= \frac{11\sqrt{3}}{2} - \frac{7\pi}{3} \end{aligned}$$

Exercício 13.11: Aula 7, Trabalho p/ casa

Determine a área que dentro das ambas $\rho = 3 + 2\cos\theta$ e $\rho = 2$.



Solução 13.11

Neste caso, vamos notar que o círculo é dividido em duas partes e estamos atrás da parte superior. Observe também que encontramos a área da parte inferior no Exercício anterior. Portanto, a área é,

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \text{Area da Circumferencia} - \text{Area do Exercicio anterior} \\ &= \pi(2)^2 - \frac{11\sqrt{3}}{2} + \frac{7\pi}{3} \\ &= -\frac{11\sqrt{3}}{2} + \frac{19\pi}{3}. \end{aligned}$$