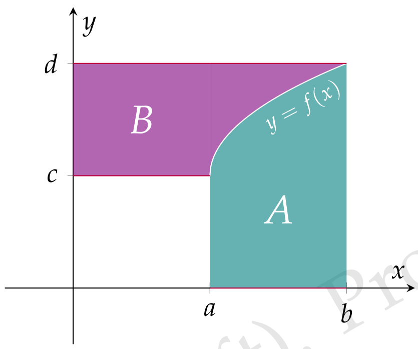
Aula 12. Revisão 1.

12.1 Volume dos sólidos de revolução

Lembrete da Aula 2. Seja $f(x)$ uma função contínua. Considere os seguintes conjuntos.

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{array} \right\},$$

$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{array} \right\},$$



conforme o desenho na figura do lado.

Assim o volume do sólido obtido pelo rotação de conjunto A em torno do eixo-x é:

$$\boxed{\pi \int_a^b f(x)^2 dx.} \tag{12.1}$$

O volume do sólido obtido pelo rotação de conjunto B em torno do eixo-y é:

$$\boxed{\pi \int_c^d g(y)^2 dy.} \tag{12.2}$$

O volume do sólido obtido pelo rotação de conjunto A em torno do eixo-y é

$$\boxed{2\pi \int_a^b x f(x) dx.} \tag{12.3}$$

O volume do sólido obtido pelo rotação de conjunto B em torno do eixo-x é

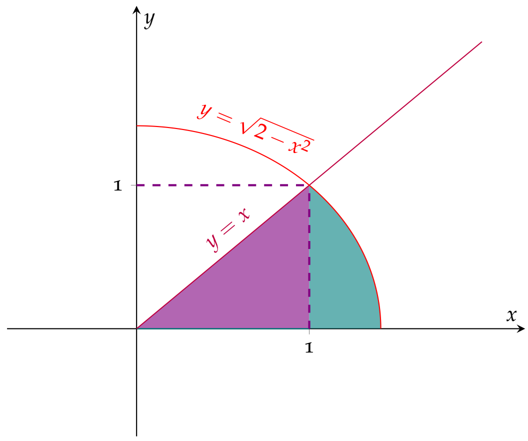
$$\boxed{2\pi \int_c^d y g(y) dy.} \tag{12.4}$$

Onde $g(y)$ é função inversa da $f(x)$.

Exercício 12.1: (Lista 1, 1e)

Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo-x, do conjunto de todos os pares (x, y) tais que:

$$0 \leq y \leq x, \quad x^2 + y^2 \leq 2.$$



Solução 12.1

Temos que a circunferência $x^2 + y^2 = 2$ e a reta $y = x$ se interceptam quando

$$x^2 + x^2 = 2 \implies x = \pm 1.$$

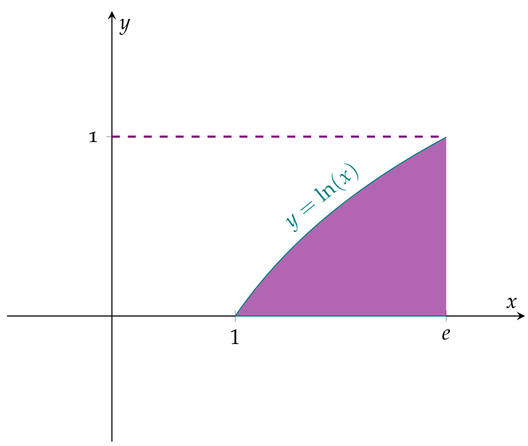
Podemos dividir a região, conforme a figura do lado

$$\begin{aligned}
V = V_1 + V_2 &= \pi \int_0^1 x^2 dx + \pi \int_1^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2 - y^2}\right)^2 dx \\
&= \pi \left(\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 + \left(2x - \frac{x^3}{3}\right)\bigg|_1^{\sqrt{2}} \right) \\
&= \pi \left(\frac{1}{3} + \left(2\sqrt{2} - 2 - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3} \right) \right) \\
&= \pi \left(-\frac{4}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3} \right) \\
&= \frac{4\pi}{3}(\sqrt{2} - 1).
\end{aligned}$$

Exercício 12.2: (Lista 1, 2a)

Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo-y, do conjunto de todos os pares (x, y) tais que:

$$1 \leq x \leq e, \quad 0 \leq y \leq \ln x.$$



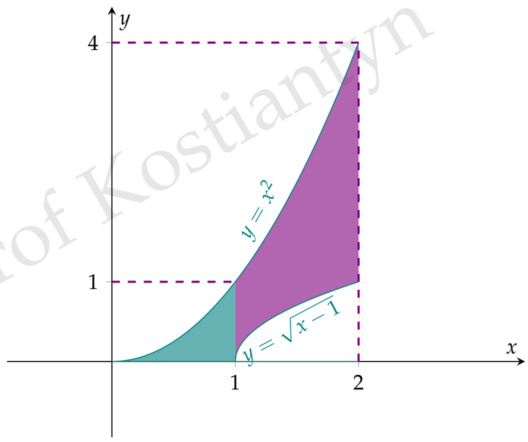
Solução 12.2

$$
\begin{aligned}
V = 2\pi \int_1^e x \ln x dy &= \left| \begin{array}{ll} f(x) = \ln x & f'(x) = 1/x \\ g'(x) = x & g(x) = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| \\
&= 2\pi \left(\frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \right) \\
&= 2\pi \left(\frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e \right) \\
&= 2\pi \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \right) \\
&= 2\pi \left(\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \right).
\end{aligned}
$$

Exercício 12.3: (Lista 1, 2g)

Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo-y, do conjunto de todos os pares (x, y) tais que:

$$0 \le x \le 2, \quad \sqrt{x-1} \le y, \quad 0 \le y \le x^2.$$



Solução 12.3

$$V = 2\pi \left(\int_0^2 x \cdot x^2 dx - \int_1^2 x \cdot \sqrt{x-1} dx \right)$$

$$
\begin{aligned}
\int x\sqrt{x-1} dx &= \left| \begin{array}{c} \sqrt{x-1} = u, \quad x = u^2 + 1 \\ dx = 2udu \end{array} \right| \\
&= \int \left(u^2+1\right) u \cdot 2udu \\
&= \frac{2}{5}u^5 + \frac{2}{3}u^3 = \frac{2}{5}\left(\sqrt{x-1}\right)^5 + \frac{2}{3}(\sqrt{x-1})^3.
\end{aligned}
$$

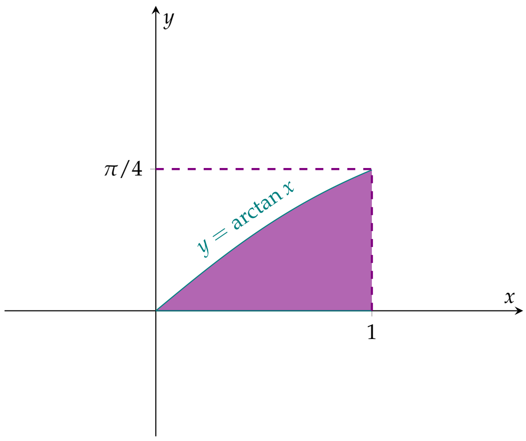
Logo

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi \Big(\frac{x^4}{4}\Big|_0^2 - [\frac{2}{5}\left(\sqrt{x-1}\right)^5 + \frac{2}{3}(\sqrt{x-1})^3] \Big|_1^2 \Big) \\
&= 2\pi \left(4 - \frac{2}{5} - \frac{2}{3} \right) = 2\pi \left(\frac{60 - 6 - 10}{15} \right) \\
&= 2\pi \frac{44}{15} = \frac{88\pi}{15}.
\end{aligned}
$$

Exercício 12.4: (Lista 1, 2d)

Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo-y, do conjunto de todos os pares (x, y) tais que:

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \arctan x.$$



Solução 12.4

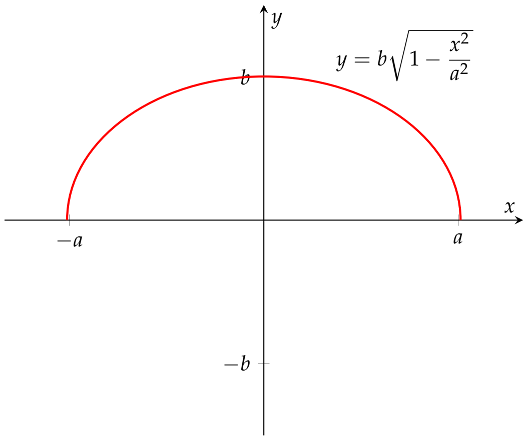
$$\begin{aligned}
V &= 2\pi \cdot \int_0^1 x \arctan(x)\, dx \\
&= \left| \begin{array}{ll} f(x) = \arctan x & f'(x) = 1/(1+x^2) \\ g'(x) = x & g(x) = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| \\
&= 2\pi \left[\frac{1}{2} x^2 \arctan(x) - \int \frac{x^2}{2(x^2+1)} dx \right]_0^1 \\
&= 2\pi \frac{\pi - 2}{4} = \pi \frac{\pi - 2}{2} \approx 1.7932
\end{aligned}$$

Durante as contas usamos que:

$$\int \frac{x^2}{2(x^2+1)} dx = \frac{1}{2} (-\arctan(x) + x)$$

Exercício 12.5: (Lista 1, 4)

Uma elípse com eixos $2a$ e $2b$ gira-se: 1) em torno do eixo x; 2) em torno do eixo y. Calcule os volumes dos sólidos correspondentes. Em caso particular $a = b$ calcule o volume da bola.



Solução 12.5

Temos que o arco (no quadrante 1 e 2) da elípse com eixos $2a$ e $2b$ tem equação:

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Assim o volume do sólido obtido em torno do eixo-x é

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-a}^{a} \left(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right)^2 dx \\
&= \pi b^2 \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi b^2 \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_{-a}^{a} = \\
&= 2\pi b^2 \left(a - \frac{a}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi b^2 a.
\end{aligned}$$

Semelhante, usando a fórmula para rotação em torno eixo-y, temos

$$V = 2\pi \int_0^b \left(a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \right)^2 dy = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

Quando $a = b$ recebemos $\frac{4}{3}\pi a^3$ o volume da esfera com raio a.

12.2 *Área da superfície da revolução*

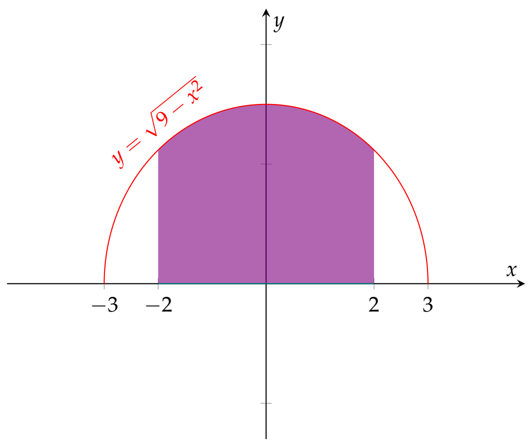
Lembrete (da Aula 3). As áreas superficiais de tais sólidos podem ser calculadas através os seguintes fórmulas:

Área da superfície do sólido obtido pela rotação em torno do eixo-x:

$$A(S) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx, \tag{12.5}$$

Área da superfície do sólido obtido pela rotação em torno do eixo-y:

$$A(S) = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \tag{12.6}$$



Exercício 12.6

Determine a área de superfície do sólido obtido por rotação do conjunto limitado por $y = \sqrt{9 - x^2}$, $-2 \le x \le 2$ em torno do eixo-x.

Solução 12.6

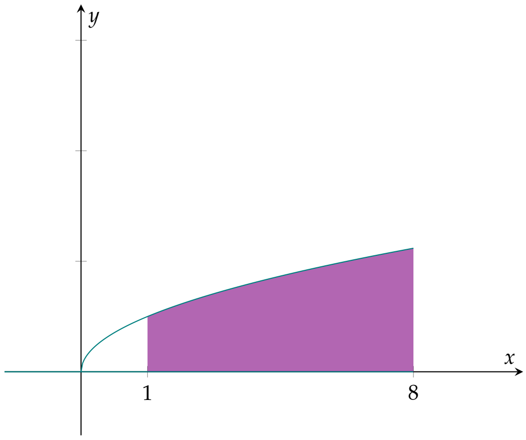
Vamos primeiro cuidar da derivada e da raiz.

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(9 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = -\frac{x}{(9 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{9 - x^2}} = \sqrt{\frac{9}{9 - x^2}} = \frac{3}{\sqrt{9 - x^2}}$$

Agora, aplicando fórmula (12.5), temos

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_{-2}^{2} 2\pi\sqrt{9 - x^2}\frac{3}{\sqrt{9 - x^2}} dx \\ &= \int_{-2}^{2} 6\pi \, dx \\ &= 24\pi \end{aligned}$$



Exercício 12.7

Determine a área de superfície do sólido obtido por rotação do conjunto limitado por $y = \sqrt[3]{x}$, $1 \leq x \leq 8$ em torno do eixo-y.

Solução 12.7

Vamos primeiro cuidar da derivada e da raiz.

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt{1+f'(x)^2} = \sqrt{1+\frac{1}{9x^{\frac{4}{3}}}} = \sqrt{\frac{9x^{\frac{4}{3}}+1}{9x^{\frac{4}{3}}}} = \frac{\sqrt{9x^{\frac{4}{3}}+1}}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

Agora, aplicando a fórmula (12.6), temos

$$A(S) = \int_1^8 2\pi x \frac{\sqrt{9x^{\frac{4}{3}}+1}}{3x^{\frac{2}{3}}} dx = \frac{2\pi}{3}\int_1^8 x^{\frac{1}{3}}\sqrt{9x^{\frac{4}{3}}+1}dx$$

Usando substituição

$$u = 9x^{\frac{4}{3}}+1 \quad du = 12x^{\frac{1}{3}}dx$$

a integral fica

$$\begin{aligned} A(S) &= \frac{\pi}{18}\int_{10}^{145}\sqrt{u}du \\ &= \frac{\pi}{27}u^{\frac{3}{2}}\Big|_{10}^{145} \\ &= \frac{\pi}{27}\left(145^{\frac{3}{2}} - 10^{\frac{3}{2}}\right) \approx 199.48 \end{aligned}$$

Exercício 12.8: (Lista 1, 1a)

Determine a área de superfície do sólido obtido por rotação do conjunto limitado por

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad -1 \leq x \leq 1$$

Solução 12.8

Vamos primeiro cuidar da derivada e da raiz.

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+f'(x)^2} &= \sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2} \\
&= \frac{\sqrt{4-2+e^{2x}+e^{-2x}}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2+e^{2x}+e^{-2x}}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{(e^x+e^{-x})^2}}{2} \\
&= \frac{(e^x+e^{-x})}{2}.
\end{aligned}$$

Agora, aplicando fórmula (12.5), temos

$$\begin{aligned}
A(S) &= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\left(e^x+e^{-x}\right)\left(e^x+e^{-x}\right)dx \\
&= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{-1} e^{2x}+2+e^{-2x}dx \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}+2x-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_{-1}^{1} \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\left(e^2-e^{-2}\right)+4-\frac{1}{2}\left(e^{-2}-e^2\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\left(e^2-e^{-2}+4\right)
\end{aligned}$$

12.3 *Centro de massa*

Lembrete da Aula 8. Seja R uma região limitada acima pelo gráfico de uma função contínua $f(x)$, abaixo pelo gráfico de outra função contínua $g(x)$ e entre as retas $x = a$ e $x = b$, respectivamente. Assim: a massa da lâmina é

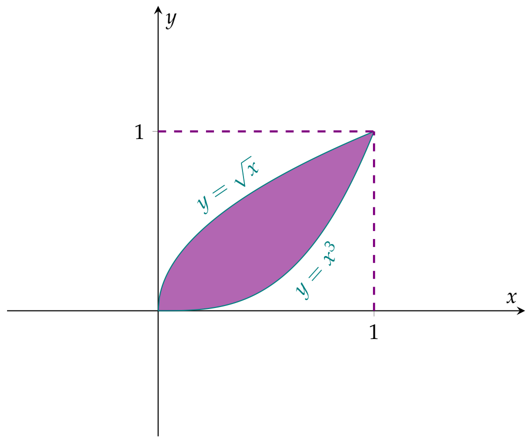
$$\boxed{m = \int_a^b [f(x)-g(x)]dx.} \tag{12.7}$$

Os momentos M_x e M_y da lâmina em relação aos eixos x e y, respectivamente, são

$$\boxed{M_x = \int_a^b \frac{[f(x)]^2-[g(x)]^2}{2}dx, \qquad M_y = \int_a^b x[f(x)-g(x)]dx.} \tag{12.8}$$

As coordenadas do centro de massa $(\bar{x}, \bar{y})$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m}.} \tag{12.9}$$



Exercício 12.9: (Aula 8, Trabalho p/ casa)

Calcule o centro de massa da região limitada por $y = x^3$ e $y = \sqrt{x}$.

Solução 12.9

Primeiramente calculamos a massa da lâmina,

$$\begin{aligned} m &= \int_0^1 \sqrt{x} - x^3 dx \\ &= \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}x^4 \right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

Calculando momentos, temos

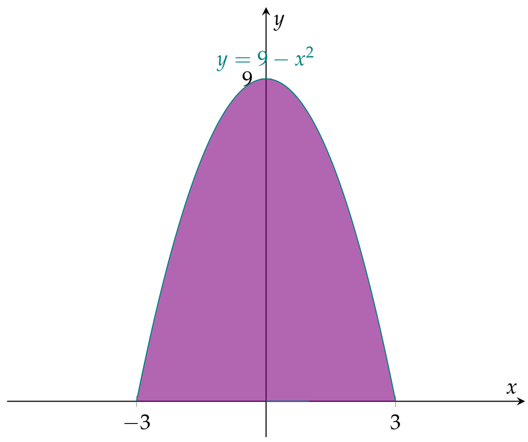
$$M_x = \int_0^1 \frac{1}{2}\left(x - x^6\right) dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{7}x^7\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{28},$$

$$M_y = \int_0^1 x\left(\sqrt{x} - x^3\right) dx = \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} - x^4 dx = \left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{5}.$$

Assim as coordenadas do centro são

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \tfrac{1/5}{5/12} = \tfrac{12}{25} \\ \bar{y} &= \tfrac{5/28}{5/12} = \tfrac{3}{7} \end{aligned}$$

Assim o centro de massa tem as coordenadas $\left(\frac{12}{25}, \frac{3}{7}\right)$.



Exercício 12.10: (Lista 1, Exer 2)

Calcule o centro de massa da região limitada por $y = 9 - x^2$ com $-3 \leq x \leq 3$.

Solução 12.10

Primeiramente calculamos a massa da lâmina,

$$m = \int_{-3}^{3} (9 - x^2) dx = (9x - \frac{x^3}{3})\Big|_{-3}^{3} = 54.$$

Calculando momentos, temos

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-3}^{3} \frac{1}{2}(9 - x^2)^2 dx = \frac{648}{5}, \\ M_y &= \int_{-3}^{3} x(9 - x^2) dx = 0. \end{aligned}$$

Assim as coordenadas do centro são

$$\bar{x} = \frac{0}{54} = 0$$
$$\bar{y} = \frac{648/5}{54} = \frac{12}{5}$$

Assim o centro de massa tem as coordenadas $\left(0, \frac{12}{5}\right)$.