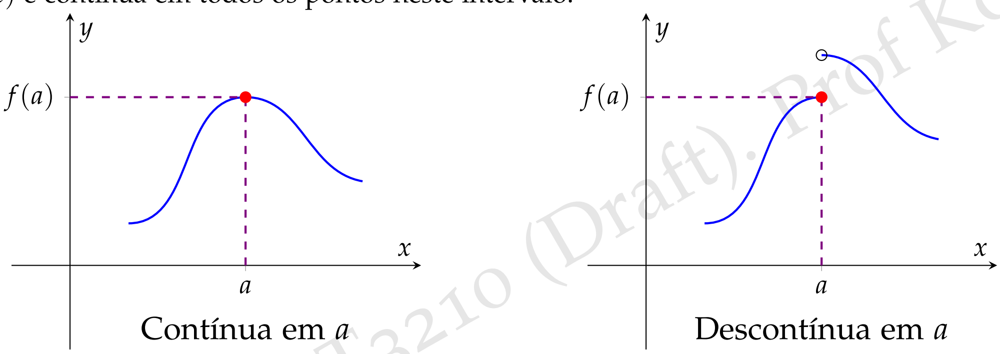
Aula 11. *Continuidade*

Em Calculo I, definimos a continuidade de uma função de uma variável e vimos como ela dependia do limite de uma função de uma variável. Em particular, uma função de uma variável real é chamada *contínua* no ponto a se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Respectivamente, dizemos que $f(x)$ é *contínua num intervalo* $[a, b]$ se $f(x)$ é contínua em todos os pontos neste intervalo.



Semelhantemente podemos definir a noção das funções contínuas para funções de duas variáveis.

Definição

Seja $f(x, y)$ uma função de duas variáveis reais e (a, b) um ponto no domínio da $f(x, y)$. Dizemos que $f(x, y)$ é **contínua** no (a, b), se

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

Respectivamente, função $f(x, y)$ é **contínua numa região** $B \subset D$ se ele é contínua para todos (a, b) em B.

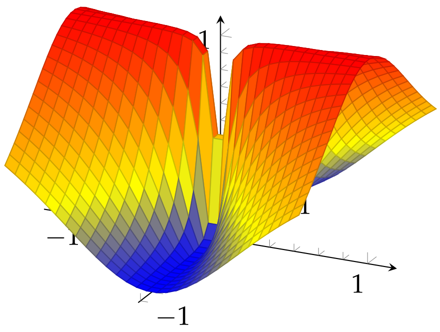
Para verificar que f é contínua no ponto (a, b) devemos confirmar as seguintes três condições:

(a) $f(a, b)$ existe, ou seja (a, b) está no domínio da função $f(x, y)$.

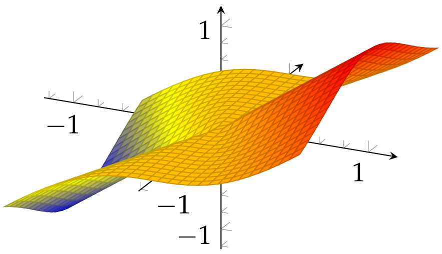
(b) O limite $\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y)$ existe.

(c) E finalmente, que $\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$.

As figuras de baixo mostram duas funções $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ e $g(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$. Função $f(x,y)$ é descontínua no ponto $(0,0)$, pois o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe (veja aula passada), mas função $g(x,y)$ é contínua no ponto $(0,0)$ definindo $g(0,0) = 0$ (veja Exercício 11.1 abaixo).



$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$$



$$g(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$$

Exemplo 11.1

Mostre que a função

$$f(x,y) = \frac{3x+2y}{x+y+1}.$$

é contínua no ponto $(5,-3)$.

Temos que $f(a,b)$ existe. Isso é verdade porque o domínio da função f consiste naqueles pares ordenados para os quais o denominador é diferente de zero (ou seja, $x+y+1 \neq 0$). O ponto $(5,-3)$ satisfaz essa condição. Além disso,

$$f(a,b) = f(5,-3) = \frac{3(5)+2(-3)}{5+(-3)+1} = \frac{15-6}{2+1} = 3$$

O limite $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ pode ser calculado usando as propriedades da Aula 10. Temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(5,-3)} \frac{3x+2y}{x+y+1} \\
&= \frac{\lim_{(x,y)\to(5,-3)}(3x+2y)}{\lim_{(x,y)\to(5,-3)}(x+y+1)} \\
&= \frac{15-6}{5-3+1} \\
&= 3.
\end{aligned}$$

Como $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 3 = f(5,-3)$, assim a função $f(x,y)$ é contínua no ponto $(5,-3)$.

Exemplo 11.2

Suponha que $f(x,y)$ dada como:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \text{ se } & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Como no exemplo anterior o limite se $(a,b) \neq (0,0)$ pode ser calculado como:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \frac{\lim_{(x,y)\to(a,b)}(x^2-y^2)}{\lim_{(x,y)\to(a,b)}(x^2+y^2)} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

Vamos mostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

não existe. Primeiro, vamos aproximar $(0,0)$ ao longo do eixo x. Então $y=0$ dá $f(x,0) = x^2/x^2 = 1$ para todos $x \neq 0$, então

$$f(x,y) \to 1 \quad \text{quando} \quad (x,y) \to (0,0),$$

ao longo do eixo x. Agora nos aproximamos ao longo da eixo y. Então $f(0,y) = \frac{-y^2}{y^2} = -1$ para todos $y \neq 0$, assim

$$f(x,y) \to -1 \quad \text{quando} \quad (x,y) \to (0,0),$$

ao longo da eixo y. Como f tem dois limites diferentes ao longo de dois caminhos diferentes, o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ não existe. Assim função $f(x,y)$ é contínua para todos pontos $(a,b) \neq (0,0)$.

Theorem 11.1: Propriedades das funções contínuas.

Sejam $f(x,y)$, $g(x,y)$ duas funções contínuas no ponto (a,b). Assim:

- $cf(x,y)$ é função contínua no ponto (a,b) para qualquer constante c.
- $f(x,y) + g(x,y)$ é função contínua no ponto (a,b) (ou seja, **a soma das funções contínuas é contínua**).
- $f(x,y) \cdot g(x,y)$ é função contínua no ponto (a,b) (**o produto de funções contínuas é contínua**).
- $\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ é função contínua no ponto (a,b), se $g(a,b) \neq 0$ (**o quociente de funções contínuas é contínua**).

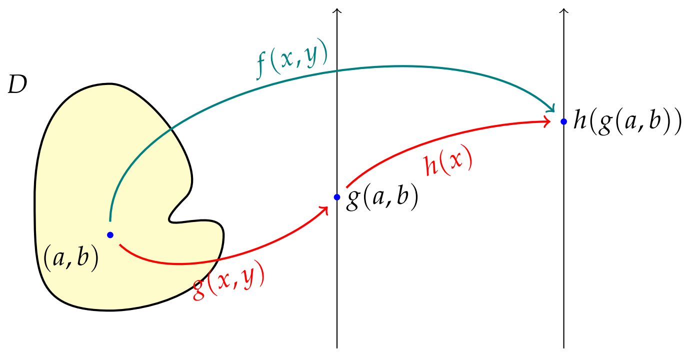
Theorem 11.2: Composição das funções contínuas.

Seja g uma função de duas variáveis de um domínio $D \subset \mathbb{R}^2$. Suponha que g seja contínua em algum ponto $(a,b) \in D$. Se h é uma função de uma variável real contínua no ponto $g(a,b)$, então a função composta

$$f(x,y) = h(g(x,y)),$$

é função contínua no ponto (a,b) também.

A função composta $h(x,y)$ pode ser vista através a seguinte ilustração:



Exemplo 11.3

Mostre que as funções $f(x,y) = 4x^3y^2$ e $g(x,y) = \cos(4x^3y^2)$ são contínuas em todos os pontos.

Os polinômios $g(x) = 4x^3$ e $h(y) = y^2$ são contínuos em todos os números reais e, portanto, pelo produto do teorema das funções contínuas, temos que

$$f(x,y) = 4x^3y^2$$

é contínua em todos os pontos (x,y) no plano xy. Uma vez que $f(x,y) = 4x^3y^2$ é contínua em todos os pontos (x,y) no plano xy e $g(x) = \cos x$ é contínua em cada número real x, a continuidade da composição das funções nos diz que

$$g(x,y) = \cos(4x^3y^2)$$

é contínua em todos os pontos (x,y) no plano xy.

Exemplo 11.4

Semelhante se

$$h(x,y) = \text{sen}\left(x^2+y^2\right).$$

Temos que x^2, y^2, x^2+y^2 são funções contínuas como produto e soma das funções contínuas. Uma vez que $f(x,y) = x^2+y^2$ é contínua em todos os pontos (x,y) no plano xy e $g(x) = \text{sen}\, x$ é contínua em cada número real x, a continuidade da composição das funções nos diz que

$$h(x,y) = g(f(x,y)) = \text{sen}(x^2+y^2),$$

é contínua em todos os pontos (x,y) no plano xy.

Exercício 11.1

Seja:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{ge} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Determine os pontos de continuidade de f.

Solução 11.1

Quando $(a,b) \neq (0,0)$, vale que $a^2+b^2 \neq 0$. Usando Propriedades acima, temos que $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ é função contínua como quociente das funções contínuas x^3 e x^2+y^2. Agora considere caso $(a,b) = (0,0)$. Assim

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0).$$

Pois $x \to 0$ e função $\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ é limitada (veja Aula 10 e teorema do confronto). Assim $f(x,y)$ é contínua no ponto $(0,0)$ também.

Resumindo, a função $f(x,y)$ é contínua no todo plano xy.

Exercício 11.2

Seja:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\cdot(y-1)^2}{2x^2+3(y-1)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,1) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,1) \end{cases}$$

Determine os pontos de continuidade de f.

Solução 11.2

Quando $(a,b) \neq (0,1)$, assim $2a^2+3(b-1)^2 \neq 0$. Usando Propriedades acima, temos que $f(x,y) = \dfrac{x\cdot(y-1)^2}{2x^2+3(y-1)^2}$ é função contínua como quociente das funções contínuas $x\cdot(y-1)^2$ e $2x^2+3(y-1)^2$. Agora considere caso $(a,b) = (0,1)$. Observe que

$$0 \leq (y-1)^2 \leq 3(y-1)^2 \leq 2x^2+3(y-1)^2.$$

Assim a função $\frac{(y-1)^2}{2x^2+3(y-1)^2}$ é limitada. Aplicando o Teorema do Confronto, temos

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x\cdot(y-1)^2}{2x^2+3(y-1)^2} &= \lim_{(x,y)\to(0,1)} x \cdot \frac{(y-1)^2}{2x^2+3(y-1)^2} \\ &= 0 = f(0,1).\end{aligned}$$

e $f(x,y)$ é contínua no ponto $(0,1)$.

Resumindo, a função $f(x,y)$ é contínua no todo plano xy.

Exercício 11.3

Mostre que função $f(x,y) = e^{\operatorname{sen}(x^2y)}$ é função contínua para todos os pontos x, y.

Solução 11.3

Funções x^2, y são funções contínuas, assim $h(x,y) = x^2y$ é uma função contínua (como produto das funções contínuas). Observe que a função $g_1(x) = \operatorname{sen} x$ é uma função contínua, assim

$$\tilde{f}(x,y) = g_1(h(x,y)) = \operatorname{sen}(x^2y)$$

é contínua também pelo Teorema acima (como composição das funções h e g_1). Além disso $g_2(x) = e^x$ é também função contínua, assim função

$$f(x,y) = g_2(\tilde{f}(x,y)) = e^{\operatorname{sen}(x^2y)}$$

é contínua, pois é composição das funções contínuas $\tilde{f}$ e g_2.

Exercício 11.4

Seja:

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}.$$

Determine os pontos de continuidade de f.

Solução 11.4

Observe que o dominio da função $f(x,y)$ é

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq -y\}.$$

Considere qualquer ponto (a,b) no plano tal que $a \neq -b$. Neste caso a função $f(x,y)$ é contínua no ponto (a,b) como o quociente das funções contínuas $x-y$ e $x+y$ e temos

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{x-y}{x+y} = \frac{a-b}{a+b}.$$

Quando (a,b) é ponto tal que $a+b = 0$, então o limite $f(x,y)$ não existe! (Mostre.)

Exercício 11.5

Seja:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Determine o valor $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que f seja contínua no ponto $(0,0)$.

LEMBRETE:
(1) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. – **Limite fundamental**.
(2) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. – **regra l'Hôpital**.

Solução 11.5

Podemos determinar α pela igualdade

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = \alpha,$$

pois f deve ser contínua em $(0,0)$. Agora, fazendo a substituição $t = \sqrt{x^2+y^2}$, temos que

$$t \to 0, \qquad \text{se e somente se} \qquad (x,y) \to (0,0).$$

Assim

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{2t} \qquad \text{Aplicando Regra l'Hôpital} \\
&= \frac{1}{2}, \qquad \text{pelo limite fundamental.}
\end{aligned}$$

Ou seja $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Exercício 11.6

Seja:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^2-y^2)(x-1)^2}{(x^2+y^2)[(x-1)^2+(y-1)^2]} & (x,y) \neq (0,0),(1,1) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \\ 0 & (x,y) = (1,1) \end{cases}$$

Determine os pontos de continuidade de f.

Solução 11.6

Primeiro observe que se $(a,b) \neq (0,0),(1,1)$ assim f é contínua em (a,b) aplicando as propriedades acima.

Se $(a,b) = (0,0)$ e seguinte limite não existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(x^2-y^2\right)(x-1)^2}{\left(x^2+y^2\right)\left[(x-1)^2+(y-1)^2\right]}$$

Assim $f(x,y)$ é descontínua no ponto $(0,0)$.

Por outro lado

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\left(x^2-y^2\right)(x-1)^2}{\left(x^2+y^2\right)\left[(x-1)^2+(y-1)^2\right]} = 0 = f(1,1)$$

Pois
$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \to 0, \text{ quando } \quad (x, y) \to (1, 1)$$
e $\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)^2 + (y-1)^2}$ é limitada.

Assim $f(x, y)$ é contínua no ponto $(1, 1)$.

Resumindo f é contínua em todos os pontos do plano xy exceto o ponto $(0, 0)$.

Exercício 11.7: (Trabalho p/ casa)

Mostre que
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{yx^2 + xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{ge} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
é contínua em todo plano xy.

Exercício 11.8: (Trabalho p/ casa)

Mostre que
$$f(x, y) = \cos(\ln(x^y)).$$
é contínua no seu domínio.

Exercício 11.9: (Trabalho p/ casa)

Seja:
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x^2 y + y^2}{x^2 + y^2} & \text{se} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{se} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
Determine α de modo que f seja contínua em $(0, 0)$.

Resposta: 1.