Aula 10. Limites

Nesta aula daremos uma olhada nos limites que envolvem funções de mais de uma variável. Na verdade, vamos nos concentrar principalmente nos limites das funções de duas variáveis, mas as ideias podem ser estendidas para funções com mais de duas variáveis.

Antes de entrarmos nisso, vamos relembrar brevemente como funcionam os limites das funções de uma variável. Nós dizemos isso,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Além disso, lembre-se disso,

$$\lim_{x \to a^+} f(x)$$

é um limite à direita e exige que olhemos apenas para os valores de que são maiores que a. Da mesma forma,

$$\lim_{x \to a^-} f(x)$$

é um limite do lado esquerdo e exige que olhemos apenas para os valores de x que são menores que a.

Em outras palavras, teremos $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se $f(x)$ aproxima L independendo como x aproxima o ponto a (do lado esquerdo, direito ou ambos).

Agora, observe que, neste caso, existem apenas dois caminhos que podemos tomar conforme avançamos em direção a $x = a$. Podemos nos mover da esquerda ou podemos mover da direita. Então, para que o limite de uma função de uma variável exista, a função deve estar se aproximando do mesmo valor conforme tomamos cada um desses caminhos em direção a $x = a$.

Com funções de duas variáveis, teremos que fazer algo semelhante, exceto que desta vez (potencialmente) haverá muito mais trabalho envolvido. Vamos primeiro abordar a notação e ter uma ideia do que vamos pedir nesses tipos de limites.

Estaremos pedindo para tomar o limite da função $f(x, y)$ se x aproxima a e y aproxima b. Isso pode ser escrito de várias maneiras. Aqui estão algumas das notações usuais:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) \qquad \lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y)$$

Usaremos a segunda notação com mais freqüência neste curso. A segunda notação também é um pouco mais útil para ilustrar o que realmente estamos fazendo aqui quando determinamos um limite. Ao tomar o limite de uma função de duas variáveis, estamos realmente perguntando o que o valor de f está fazendo enquanto movemos cada vez mais perto do ponto.

Assim como com os limites das funções de uma variável, para que esse limite exista, a função deve estar se aproximando do mesmo valor, independentemente do caminho que tomamos conforme avançamos em direção a.

O problema que imediatamente enfrentamos é que há literalmente um número infinito de caminhos que podemos seguir à medida que avançamos em direção a . Aqui estão alguns exemplos de caminhos que podemos seguir.

Vamos comparar o comportamento das funções

$$f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} \quad \text{e} \quad g(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

como x e y se aproximam de 0 [e, portanto, o ponto (x,y) se aproxima da origem].

Na tabela de baixo mostremos os valores da função $f(x,y)$ para os pontos (x,y) pertos da origem $(0,0)$.

$x \backslash y$	-1.0	-0.5	-0.2	0	0.2	0.5	1.0
-1.0	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455
-0.5	0.759	0.959	0.986	0.990	0.986	0.959	0.759
-0.2	0.829	0.986	0.999	1.000	0.999	0.986	0.829
0	0.841	0.990	1.000		1.000	0.990	0.841
0.2	0.829	0.986	0.999	1.000	0.999	0.986	0.829
0.5	0.759	0.959	0.986	0.990	0.986	0.959	0.759
1.0	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455

Respectivamente, na tabela de baixo mostremos os valores da função $g(x,y)$ para os pontos (x,y) perto da origem $(0,0)$.

$x \backslash y$	-1.0	-0.5	-0.2	0	0.2	0.5	1.0
-1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000
-0.5	-0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	-0.600
-0.2	-0.923	-0.724	0.000	1.000	0.000	-0.724	-0.923
0	-1.000	-1.000	-1.000		-1.000	-1.000	-1.000
0.2	-0.923	-0.724	0.000	1.000	0.000	-0.724	-0.923
0.5	-0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	-0.600
1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000

Acontece que se (x,y) se aproxima de $(0,0)$ os valores de $f(x,y)$ se aproximam de 1, enquanto os valores de $g(x,y)$ não se aproximam de nenhum número. Acontece que essas suposições baseadas em evidências numéricas estão corretas, e escrevemos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \quad \text{não existe}$$

Em geral, usamos a notação

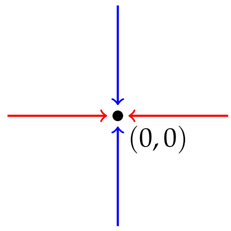
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

para indicar que os valores de $f(x,y)$ se aproximam do número L conforme o ponto (x,y) se aproxima do ponto (a,b) ao longo de qualquer caminho que permaneça dentro do domínio de f. Em outras palavras, podemos tornar os valores de $f(x,y)$ tão próximos de L quanto quisermos, levando o ponto (x,y) suficientemente próximo do ponto (a,b), mas não igual a (a,b).

Exemplo 10.1

Vamos mostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$$



não existe. Seja $f(x,y) = (x^2)\,/\,(x^2+y^2)$. Primeiro vamos nos aproximar $(0,0)$ ao longo do eixo x (caminho vermelho na figura do lado). Então $y = 0$ dá $f(x,0) = x^2/x^2 = 1$ para todos $x \neq 0$, então

$$f(x,y) \to 1 \quad \text{quando} \quad (x,y) \to (0,0),$$

ao longo do eixo x. Agora nos aproximamos ao longo do eixo y (caminho azul na figura do lado) colocando $x = 0$. Então $f(0,y) = \frac{0}{y^2} = 0$ para todos $y \neq 0$, assim

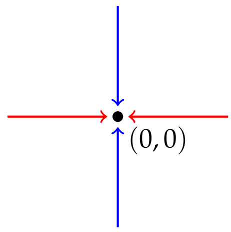
$$f(x,y) \to 0 \quad \text{quando} \quad (x,y) \to (0,0),$$

ao longo do eixo y. Como f tem dois limites diferentes ao longo de dois caminhos diferentes, o limite não existe.

Exemplo 10.2

Vamos mostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$



não existe. Seja $f(x,y) = (x^2-y^2)\,/\,(x^2+y^2)$. Primeiro vamos nos aproximar $(0,0)$ ao longo do eixo x. Então $y = 0$ dá $f(x,0) = x^2/x^2 = 1$ para todos $x \neq 0$, então

$$f(x,y) \to 1 \quad \text{quando} \quad (x,y) \to (0,0),$$

ao longo do eixo x. Agora nos aproximamos ao longo do eixo y colocando $x = 0$. Então $f(0,y) = \frac{-y^2}{y^2} = -1$ para todos $y \neq 0$, assim

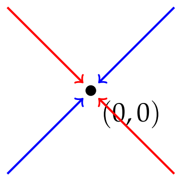
$$f(x,y) \to -1 \quad \text{quando} \quad (x,y) \to (0,0),$$

ao longo do eixo y. Como f tem dois limites diferentes ao longo de dois caminhos diferentes, o limite não existe.

Exemplo 10.3

Vamos mostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$



não existe. Seja $f(x,y) = (xy) / (x^2+y^2)$. Neste caso vamos primeiro aproximar $(0,0)$ ao longo do reta $x = y$. Então $y = x$ dá $f(x,x) = x^2/(x^2+x^2) = 1/2$ para todos $x \neq 0$, então

$$f(x,y) \to \frac{1}{2} \quad \text{quando} \quad (x,y) \to (0,0),$$

ao longo da reta $x = y$. Agora nos aproximamos ao longo da reta $y = -x$. Então $f(x,-x) = \dfrac{-xy}{x^2+y^2} = -\dfrac{1}{2}$ para todos $y \neq 0$, assim

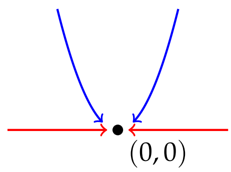
$$f(x,y) \to -\frac{1}{2} \quad \text{quando} \quad (x,y) \to (0,0),$$

ao longo da reta $x = -y$. Como f tem dois limites diferentes ao longo de dois caminhos diferentes, o limite não existe.

Exemplo 10.4

Vamos mostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$



não existe. Seja $f(x,y) = (x^2y) / (x^4+y^2)$. Aproximando $(0,0)$ ao longo do eixo x, temos $f(x,0) = 0/(x^4) = 0$ para todos $x \neq 0$, então

$$f(x,y) \to 0 \quad \text{quando} \quad (x,y) \to (0,0),$$

ao longo de eixo x. Aproximando ao longo do eixo y temos $f(0,y) = \dfrac{0}{y^2} = 0$ para todos $y \neq 0$, assim

$$f(0,y) \to 0 \quad \text{quando} \quad (x,y) \to (0,0),$$

ao longo do eixo y. Agora aproximando ao longo da reta $x = y$ temos $f(x,x) = \dfrac{x^3}{x^4+x^2} = \dfrac{x}{x^2+1}$ para todos $x \neq 0$. Lembra-se que $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$, assim

$$f(x,x) \to 0 \quad \text{quando} \quad (x,y) \to (0,0),$$

ao longo do reta $x = y$. Temos que 3 caminhos diferentes dão a mesma resposta, mas isso não garante que o limite existe e igual a zero. Considere o caminho quando $y = x^2$ (caminho azul na figura). Assim $f(x,x^2) = x^4/(x^4+x^4) = 1/2$ para todos $x \neq 0$, ou seja

$$f(x,x^2) \to \frac{1}{2} \quad \text{quando} \quad (x,y) \to (0,0),$$

ao longo do caminho $y = x^2$. Como f tem dois limites diferentes ao longo de dois caminhos diferentes, o limite não existe.

10.1 Teorema do Confronto

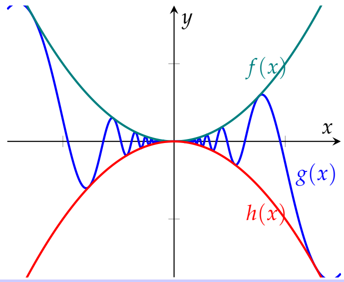
Lembrete. Sejam $f(x), g(x)$ e $h(x)$ e seja a um ponto, tais que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L = \lim_{x\to a} h(x)$$

e

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Então, resulta destas condições que: $\cdot \lim_{x\to a} g(x) = L$



Lembra-se que para calcular os limites da função de uma variável real um resultado bem útil é o Teorema de confronto (veja Lembrete do lado). Temos um análogo desse Teorema para funções de duas variáveis reais.

Theorem 10.1: Teorema de confronto. Versão 1.

Sejam $f(x,y), g(x,y)$ e $h(x,y)$ e seja (a,b) um ponto, tais que:

$$\cdot \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L = \lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y)$$

e

$$f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y),$$

para todos (x,y) "pertos" do ponto (a,b). Então, resulta destas condições que:

$$\cdot \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L.$$

Na pratica vamos aplicar muito a seguinte versão do Teorema de Confronto (que segue direitamente da primeira versão).

Theorem 10.2: Teorema de confronto. Versão 2.

Sejam $f(x,y)$ e $g(x,y)$ e seja (a,b) um ponto, tais que:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0$$

e $g(x,y)$ é uma função limitada em ponto (a,b), ou seja existe M tal que

$$|g(x,y)| \leq M,$$

para todos (x,y) "pertos" do ponto (a,b). Então, resulta destas condições que:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \cdot g(x,y) = 0.$$

Antes de ver alguns exemplos, vamos observar que função $g(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ é limitada no todo plano xy. De fato

$$0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2.$$

assim

$$0 \leq \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1.$$

Exemplo 10.5

Vamos calcular

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}.$$

Temos que $h(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ é função limitada, assim

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} = 0.$$

Aplicando o Teorema 10.2 pois, obviamente que $x \to 0$ quando $(x,y) \to (0,0)$.

Observação 10.1

A cima vimos que a função $g(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ é limitada, mas o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

não existe pelo Exemplo 10.1. Se a função $\tilde{g}(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ fosse limitada o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \frac{x}{x^2+y^2},$$

existiria. De fato, temos

$$\begin{aligned} x = 10^{-1},\ y = 0, \quad &\Rightarrow \quad \tilde{g}(10^{-1},0) = \frac{10^{-1}}{10^{-2}+0} = 10 \\ x = 10^{-10},\ y = 0, \quad &\Rightarrow \quad \tilde{g}(10^{-10},0) = \frac{10^{-10}}{10^{-20}+0} = 10^{10} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Assim os valores da função $\tilde{g}(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ crescem ilimitadamente quando (x,y) aproximam o ponto $(0,0)$ é portanto $\tilde{g}(x,y)$ não é limitada em ponto $(0,0)$.

Exemplo 10.6

Vamos calcular

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Temos que $h(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ é função limitada, pois

$$0 \le x \le \sqrt{x^2+y^2},$$

para todos (x,y). Assim

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Aplicando o Teorema 10.2 pois, obviamente que $y \to 0$ quando $(x,y) \to (0,0)$.

Exemplo 10.7

Vamos calcular

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{x^6}{x^6+y^2} \cdot \operatorname{sen}(x^3 \cdot y)\right].$$

Função $f(x,y) = \dfrac{x^6}{x^6+y^2}$ é função limitada (mostre!), alem disso

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{sen}(x^3 \cdot y) = 0,$$

pois $x^3 \cdot y \to 0$ quando $(x,y) \to (0,0)$ e sen é uma função continua (vamos explicar melhor isso na próxima aula). Assim o Teorema 10.2 temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{x^6}{x^6+y^2} \cdot \operatorname{sen}(x^3 \cdot y)\right] = 0.$$

10.2 *Propriedades de Limites*

Alem do Teorema do confronto, na pratica é bem util aplicar as seguintes propriedades dos limites:

Theorem 10.3: Propriedades dos limites.

Sejam $f(x,y)$, $g(x,y)$ duas funções. Assim

(1) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0$ se e somente se $\lim_{(x,y)\to(a,b)} |f(x,y)| = 0$.

(2) Se $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L_1$ e $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L_2$, então:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} [c \cdot f(x,y)] = c \cdot L_1$, para qualquer constante c;

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} [f(x,y) + g(x,y)] = L_1 + L_2$;

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} [f(x,y) \cdot g(x,y)] = L_1 \cdot L_2$;

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, se $L_2 \neq 0$.

Exemplo 10.8

Vamos calcular

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}.$$

Aplicando o Exemplo 10.6 temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2}.$$

Assim, aplicando a propriedade da soma de limites, temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2} = 0+0 = 0.$$

Exemplo 10.9

Vamos calcular

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot (x^2+1)}{x^2+y^2}.$$

Aplicando o fato que $\dfrac{x^2}{x^2+1}$ é limitada e o Teorema de confronto, temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \cdot \operatorname{sen} x}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{sen} x \frac{x^2}{x^2+y^2} = 0$$

Assim, aplicando a propriedade do produto de limites, temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot (x^2+1)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \cdot \operatorname{sen} x}{x^2+y^2} \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+1) = 0 \cdot 1 = 1.$$

Exercício 10.1: (Trabalho p/ casa)

Mostre que
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{x^2+y^4},$$
não existe.

Exercício 10.2: (Trabalho p/ casa)

Mostre que
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y},$$
não existe.

Exercício 10.3: (Trabalho p/ casa)

Calcule
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y-x^3}{x^2+y^2},$$
usando o Teorema 10.2.

Exercício 10.4: (Trabalho p/ casa)

Calcule
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$
usando o Teorema 10.2.