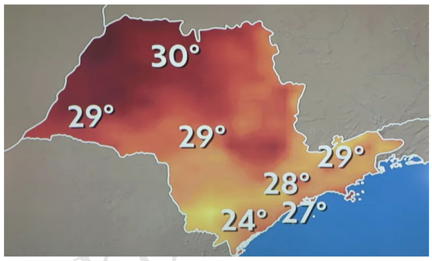
Aula 9. Funções de várias variáveis

Até agora a gente trabalhou somente com funções de uma variável real. Mas, no mundo real, as quantidades físicas muitas vezes dependem de duas ou mais variáveis. Por exemplo, a temperatura no estado de São Paulo depende de duas coordenadas do local (como na imagem do lado). A partir dessa aula (e até final do curso) vamos estudar as funções de várias variáveis e estenderemos as ideias básicas do cálculo diferencial para tais funções.

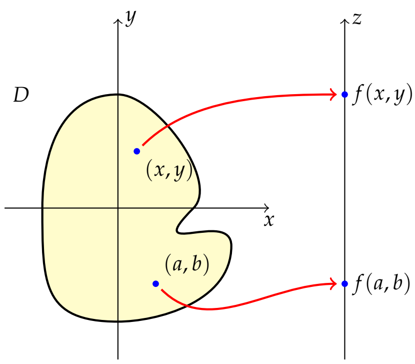


9.1 Funções de duas variáveis

A definição de uma função de duas variáveis é muito semelhante à definição de uma função de uma variável. A principal diferença é que, em vez de mapear valores de uma variável para valores de outra variável, mapeamos pares ordenados de variáveis para outra variável.

Definição

Uma função f **de duas variáveis** é uma regra que atribui a cada par ordenado de números reais (x, y) em um conjunto D, um único número real denotado por $f(x, y)$. O conjunto D é o **domínio** de f e sua **imagem** é o conjunto de valores que f assume, ou seja, $\{f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$.



Muitas vezes escrevemos $z = f(x, y)$ para tornar explícito o valor assumido pela f no ponto geral (x, y). As variáveis x e y são **variáveis independentes** e z é a **variável dependente**.

Uma função de duas variáveis é apenas uma função cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ e cuja imagem é um subconjunto de $\mathbb{R}$. Uma forma de visualizar tal função é por meio de um diagrama de setas (veja a Figura do lado), onde o domínio D é representado como um subconjunto do plano e imagem é um conjunto de números em uma linha real, mostrado como um eixo-z. Por exemplo, se $f(x, y)$ representa a temperatura em um ponto (x, y) em uma placa de metal plana com a forma de D, podemos pensar no eixo-z como um termômetro exibindo as temperaturas registradas.

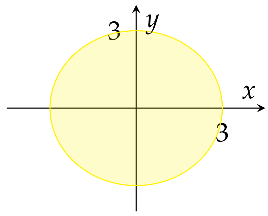
Se uma função f é dada por uma fórmula e nenhum domínio é especificado, então o domínio de f é entendido como o conjunto de todos os pares para os quais a expressão dada é um número real bem definido.

Exemplo 9.1

Encontre o domínio e a imagem de cada uma das seguintes funções:

(a) $f(x,y) = 3x + 5y + 2$,

(b) $g(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.



(a). Este é um exemplo de função linear em duas variáveis. Não há valores ou combinações de x e y tais que $f(x,y)$ seja indefinido, então o domínio de f é $\mathbb{R}^2$. Para determinar a imagem, primeiro escolha um valor para z. Precisamos encontrar uma solução para a equação $f(x,y) = z$, ou $3x - 5y + 2 = z$. Uma dessas soluções pode ser obtida definindo primeiro $y = 0$, o que resulta na equação $3x + 2 = z$. A solução para esta equação é $x = \dfrac{z-2}{3}$, o que dá o par ordenado $(\dfrac{z-2}{3}, 0)$ como uma solução para a equação $f(x,y) = z$ para qualquer valor de z. Portanto, a imagem da função são todos os números reais, ou $\mathbb{R}$.

(b). Para que a função $g(x,y)$ tenha um valor real, a quantidade sob a raiz quadrada deve ser não negativa: $9 - x^2 - y^2 \geq 0$. Essa desigualdade pode ser escrita na forma $x^2 + y^2 \leq 9$. Portanto, o domínio de $g(x,y)$ é $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$. O desenho deste conjunto de pontos pode ser descrito como um disco de raio 3 centrado na origem. O domínio inclui o círculo de fronteira, conforme mostrado no desenho acima.

Para determinar a imagem de $g(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ começamos com um ponto (x_0, y_0) na fronteira do domínio, que é definido pela relação $x^2 + y^2 = 9$. Segue-se que $x_0^2 + y_0^2 = 9$ e

$$g(x_0, y_0) = \sqrt{9 - x_0^2 - y_0^2} = \sqrt{9 - (x_0^2 + y_0^2)} = \sqrt{9 - 9} = 0.$$

Se $x_0^2 + y_0^2 = 0$ (em outras palavras, $x_0 = y_0 = 0$), então

$$g(x_0, y_0) = \sqrt{9 - x_0^2 - y_0^2} = \sqrt{9 - (x_0^2 + y_0^2)} = \sqrt{9 - 0} = 3.$$

Este é o valor máximo da função. Dado qualquer valor c entre 0 e 3, podemos encontrar todo um conjunto de pontos dentro do domínio de g tal que $g(x,y) = c$:

$$\begin{aligned} \sqrt{9 - x^2 - y^2} &= c, \\ 9 - x^2 - y^2 &= c^2, \\ x^2 + y^2 &= 9 - c^2. \end{aligned}$$

Como $9 - c^2 > 0$, isso descreve um círculo de raio $\sqrt{9 - c^2}$ centrado na origem. Qualquer ponto neste círculo satisfaz a equação $g(x,y) = c$. Portanto, a imagem desta função é o intervalo $[0, 3]$.

Exercício 9.1

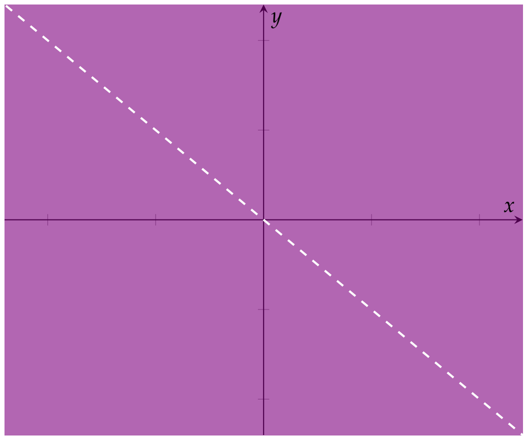
Encontre e desenhe o domínio da função $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$.

Solução 9.1

A função está definida para todos pontos onde denominador da expressão $\dfrac{x-y}{x+y}$ é não-nulo. Assim o domínio é dado por

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq -y\}.$$

O desenho é do lado.



Exercício 9.2

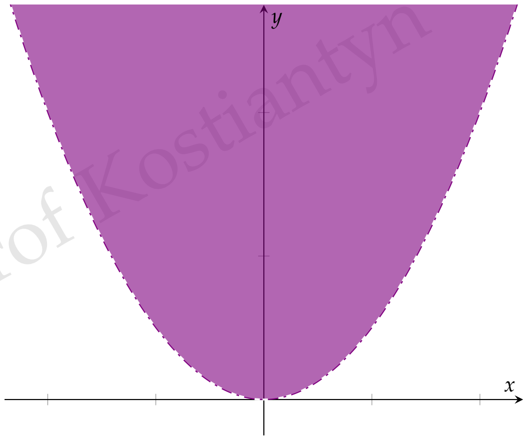
Encontre e desenhe o domínio da função $f(x,y) = \ln(y - x^2)$.

Solução 9.2

A função está definida quando o argumento da ln é positivo. Assim o domínio é dado por

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}.$$

O desenho é do lado. Observe que precisamos tirar a fronteira (é parábola $y = x^2$) do domínio.



Exercício 9.3

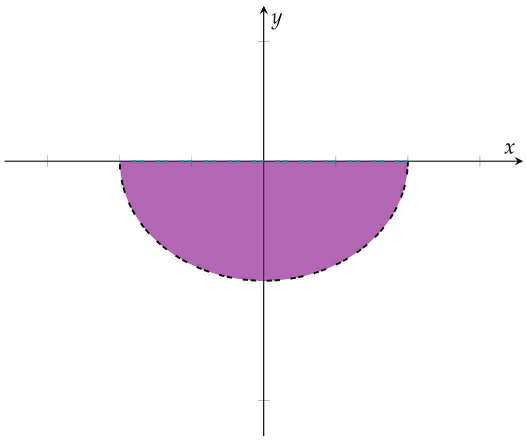
Encontre e desenha o domínio da função $f(x,y) = \dfrac{\ln(-y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

Solução 9.3

A função está definida quando o argumento da ln é positivo e argumento de raiz é positivo também. Assim o domínio é dado por

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0, x^2 + y^2 < 1\}.$$

O desenho é do lado. Observe que precisamos tirar a fronteira do domínio.

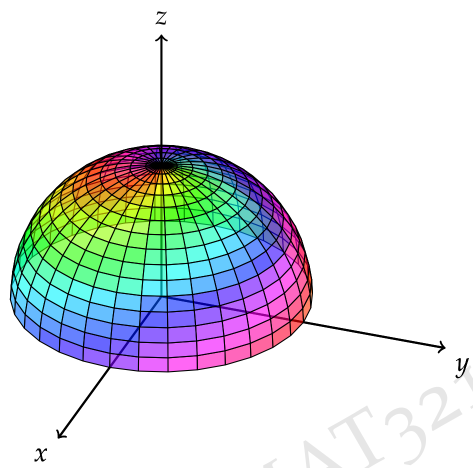


9.2 *Gráficos das Funções de Duas Variáveis*

Suponha que desejamos representar graficamente a função $z = f(x,y)$. Esta função possui duas variáveis independentes x e y e uma variável dependente z. Ao representar graficamente uma função $y = g(x)$ de uma variável, usamos o plano cartesiano. Podemos representar graficamente qualquer par ordenado (x,y) no plano, e cada ponto no plano tem um par ordenado (x,y) associado a ele. Com uma função de duas variáveis, cada par ordenado (x, y) no domínio da função é mapeado para um número real z. Portanto, o gráfico da função f consiste em triplas ordenadas (x, y, z). O gráfico de uma função $z = f(x, y)$ de duas variáveis é chamado de **superfície**.

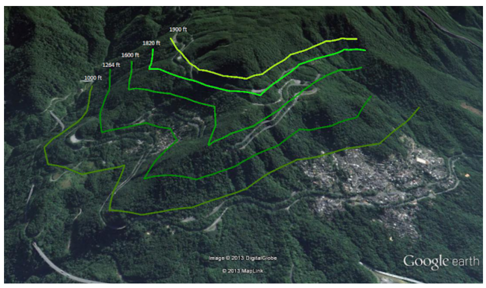
Para entender melhor o conceito de traçar um conjunto de triplas ordenadas para obter uma superfície no espaço tridimensional, imagine o sistema de coordenadas (x, y) plano. Então cada ponto no domínio da função f tem um valor z exclusivo associado a ele. Se z for positivo, o ponto representado no gráfico estará localizado acima do plano xy; se z for negativo, o ponto representado no gráfico estará localizado abaixo do plano xy. O conjunto de todos os pontos representados no gráfico torna-se a superfície bidimensional que é o gráfico da função f.

Por exemplo, abaixo representamos o gráfico da função do Exemplo acima onde $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

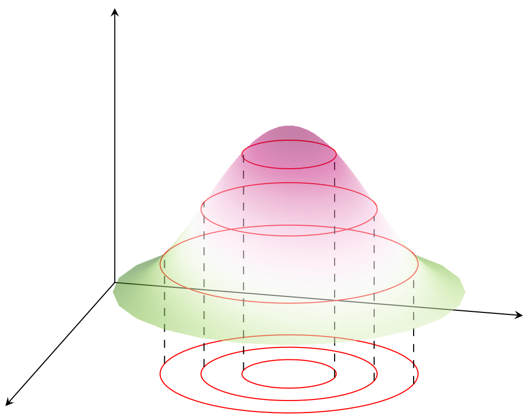


9.3 *Curvas de Nível*

Para caminhar por trilhas acidentadas, pode-se utilizar um mapa topográfico que mostra como as trilhas mudam de forma abrupta. Um mapa topográfico contém linhas curvas chamadas linhas de contorno. Cada linha de contorno corresponde aos pontos no mapa que têm a mesma elevação (veja figura de baixo). Uma curva de nível de uma função de duas variáveis $f(x, y)$ é completamente análoga a uma linha de contorno em um mapa topográfico.



Mapa topográfico da Serra do Mar



Definição

Dada uma função $f(x, y)$ e um número c na imagem de f, uma curva de nível de uma função de duas variáveis para o valor c é definida como o conjunto de pontos que satisfazem a equação $f(x, y) = c$.

Voltando à função $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, podemos determinar as curvas de nível desta função. A imagem de g é o intervalo fechado $[0, 3]$. Primeiro, escolhemos qualquer número neste intervalo fechado – digamos, $c = 2$. A curva de nível correspondente a $c = 2$ é descrita pela equação

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} = 2.$$

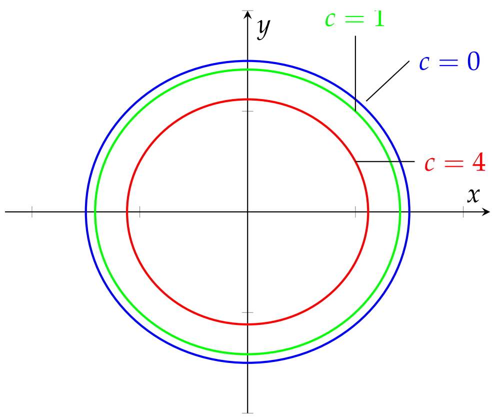
Para simplificar, eleve ao quadrado ambos os lados desta equação:

$$9 - x^2 - y^2 = 4.$$

Agora, multiplique ambos os lados da equação por -1 e adicione 9 a cada lado:

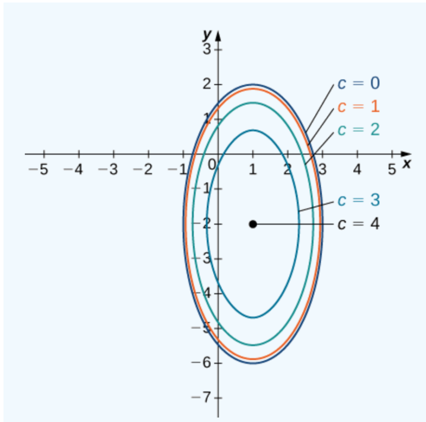
$$x^2 + y^2 = 5.$$

Esta equação descreve um círculo centrado na origem com raio $\sqrt{5}$. Usar valores de c entre 0 e 3 produz outros círculos também centralizados na origem. Se $c = 3$, então o círculo tem raio 0, então ele consiste apenas da origem. Abaixo temos o desenho das curvas de nível desta função correspondendo a $c = 0, 1, 2$ e 3.



Exemplo 9.2

Dada a função $f(x,y) = \sqrt{8+8x-4y-4x^2-y^2}$, encontre a curva de nível correspondente a $c = 0$. Em seguida, crie um mapa de contorno para esta função. Quais são o domínio e a imagem de f?



Para encontrar a curva de nível para $c = 0$, precisamos resolver $f(x,y) = 0$. Isto dá

$$0 = \sqrt{8+8x-4y-4x^2-y^2}.$$

Em seguida, elevamos ao quadrado ambos os lados e multiplicamos ambos os lados da equação por -1:

$$4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 8 = 0.$$

Agora, nós reorganizamos os termos, colocando os termos x e os termos y juntos, e adicionamos 8 a cada lado:

$$4x^2 - 8x + y^2 + 4y = 8.$$

Em seguida, agrupamos os pares de termos contendo a mesma variável entre parênteses e fator 4 do primeiro par:

$$4(x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) = 8.$$

Agora completamos o quadrado em cada par de parênteses e adicionamos o valor correto ao lado direito:

$$4(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 8 + 4(1) + 4.$$

Em seguida, fatoramos o lado esquerdo e simplificamos o lado direito:

$$4(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16.$$

Por último, dividimos ambos os lados por 16:

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1.$$

Esta equação descreve uma elipse centrada em $(1,-2)$. Podemos repetir o mesmo argumento para valores de c menores que 4. Então, a Equação torna-se

$$\frac{4(x-1)^2}{16-c^2} + \frac{(y+2)^2}{16-c^2} = 1.$$

para um valor arbitrário de c. A figura de baixo mostra um mapa de contorno para $f(x,y)$ usando os valores $c = 0, 1, 2$ e 3. Quando $c = 4$, a curva de nível é o ponto $(-1, 2)$.

Na prática para desenhar os gráficos é bem útil fazer vários cortes simples como $x = 0$ e $y = 0$ para ter ideia de como o gráfico deve aparecer. Vamos fazer vários exemplos para ver isso.

Exemplo 9.3

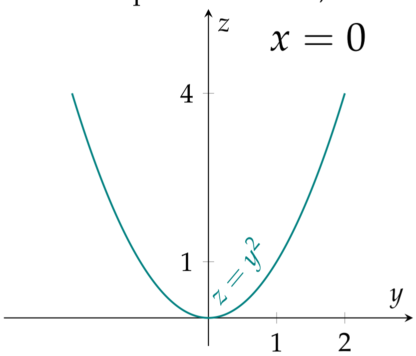
Vamos desenhar o gráfico da função $f(x,y) = x^2 + y^2$. Primeiramente observe que as curvas de nível tem forma

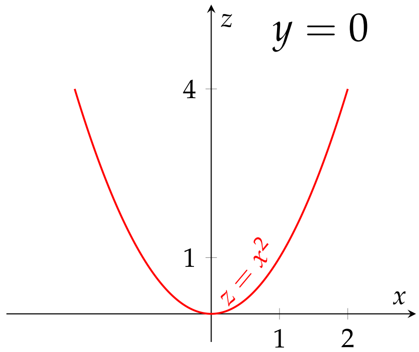
$$x^2 + y^2 = c,$$

ou seja são circunferências de raio $\sqrt{c}$. Assim quanto "mais longe" o ponto da origem sua imagem no gráfico é "mais alto". Agora fazendo os cortes simples $x = 0$ e $y = 0$ temos

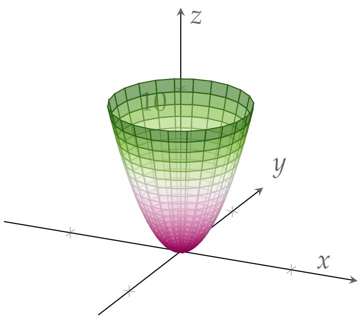
$$z = f(0,y) = y^2, \qquad z = f(x,0) = x^2.$$

Assim contando com plano $x = 0$ recebemos a parábola $z = y^2$ e cortando com o plano $y = 0$ recebemos a parábola $z = x^2$, conforme imagens abaixo.





Juntando a informação sobre as curvas de nível e os cortes temos que o gráfico da função $f(x,y) = x^2 + y^2$ é o **paraboloide** abaixo.



Exemplo 9.4

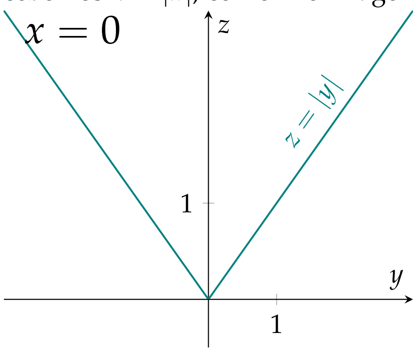
Vamos desenhar o gráfico da função $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Primeiramente observe que as curvas de nível tem forma

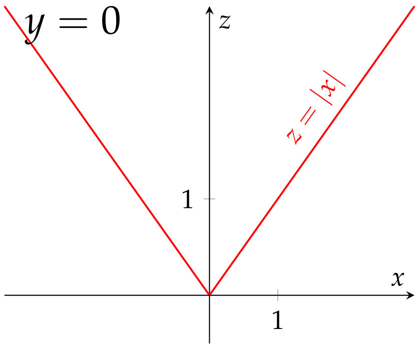
$$x^2+y^2=c^2,$$

ou seja são circunferências de raio c. Agora fazendo os cortes simples $x=0$ e $y=0$ temos

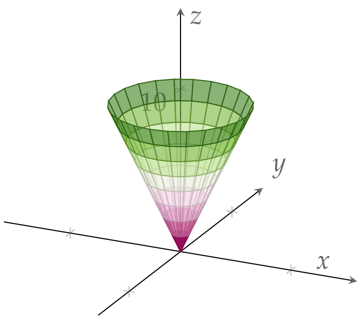
$$z=f(0,y)=\sqrt{y^2}=|y|, \qquad z=f(x,0)=\sqrt{x^2}=|x|.$$

Assim contando com plano $x=0$ recebemos o gráfico a $z=|y|$ e cortando com o plano $y=0$ recebemos $z=|x|$, conforme imagens abaixo.





Juntando a informação sobre as curvas de nível e os cortes temos que o gráfico da função $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ é o **cone** abaixo.



Exemplo 9.5

Vamos desenhar o gráfico da função $f(x,y) = y^2 - y^2$. Primeiramente observe que as curvas de nível tem forma

$$y^2 - x^2 = c,$$

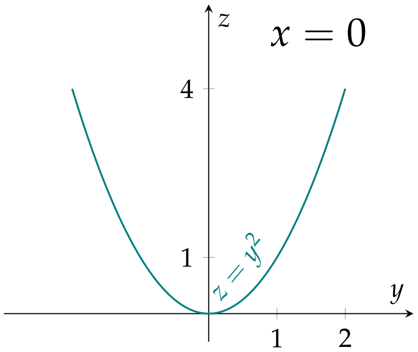
No caso particular $c = 0$ temos

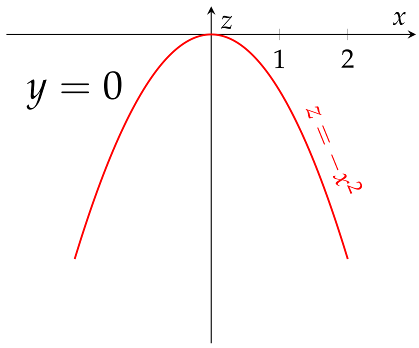
$$(x-y)(y+x) = 0,$$

ou seja par das retas $x = y$ e $x = -y$ no plano. Quando $c \neq 0$ a curva de nível correspondente é uma hipérbole.
Agora fazendo os cortes simples $x = 0$ e $y = 0$ temos

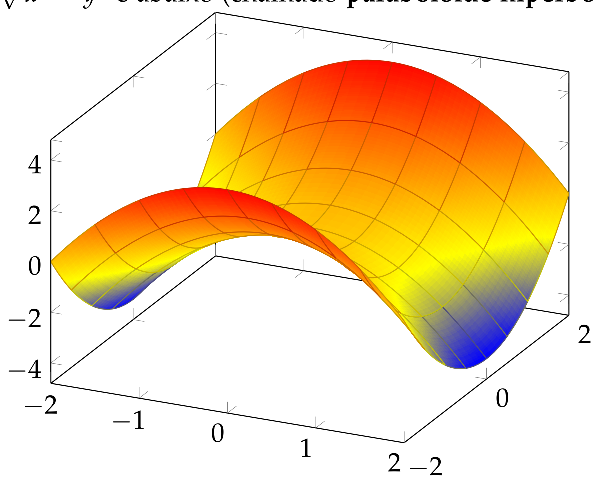
$$z = f(0,y) = y^2, \qquad z = f(x,0) = -x^2.$$

Assim contando com plano $x = 0$ recebemos a parábola $z = y^2$ e cortando com o plano $y = 0$ recebemos a parábola $z = -x^2$, conforme imagens abaixo.





Juntando a informação sobre as curvas de nível e os cortes temos que o gráfico da função $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ é abaixo (chamado **paraboloide hiperbólico**).



Exercício 9.4: (Trabalho p/ casa)

Encontre e esboce o domínio das seguintes funções:

(a) $f(x,y) = \sqrt{2x - y}$,

(b) $f(x,y) = \sqrt{xy}$,

(c) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{y - x^2}}{1 - x^2}$.

Exercício 9.5: (Trabalho p/ casa)

Encontre e represente graficamente a curva de nível da função

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 6x + 2y$$

correspondendo a $c = 15$.

Resposta: O círculo com raio 5 centrado em $(3, -1)$.