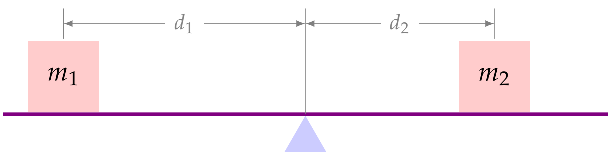
# Aula 8. Momentos e centro de massa

Nesta aula consideramos centros de massa e momentos. A ideia básica do centro de massa é a noção de um ponto de **equilíbrio**. Muitos de nós já vimos artistas que giram pratos nas pontas de palitos. Eles tentam manter vários deles girando sem permitir que nenhum deles caia. Se olharmos para um único prato (sem girá-lo), há um ponto ideal no prato onde ele se equilibra perfeitamente no palito. Se colocarmos o palito em qualquer lugar que não seja o ponto ideal, o prato não se equilibra e cai no chão. (É por isso que os artistas giram os pratos; o giro ajuda a evitar que os pratos caiam, mesmo que a vareta não esteja exatamente no lugar certo.) Matematicamente, esse ponto ideal é chamado de **centro de massa do prato**.

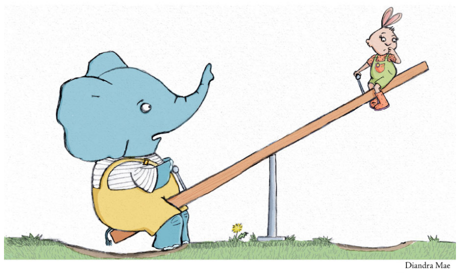
Nesta aula primeiro examinamos esses conceitos em um contexto unidimensional e, em seguida, expandiremos nosso desenvolvimento para considerar centros de massa de regiões bidimensionais e limitadas por gráficos de funções.

## 8.1 Centros de Massa e Momentos

Vamos começar olhando para o centro de massa em um contexto unidimensional. Considere um fio ou barra longa e fina de massa desprezível apoiada em um fulcro e suponha que colocamos objetos com massas $m_1$ e $m_2$ a distâncias $d_1$ e $d_2$ do fulcro, respectivamente, como mostrado na Figura de baixo.

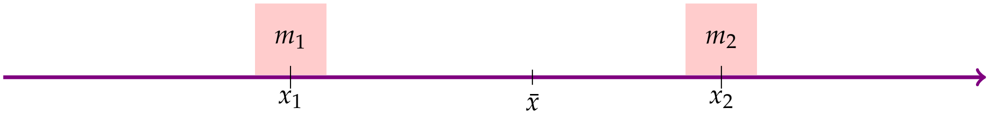



O exemplo mais comum da vida real de um sistema como este é uma gangorra de playground com crianças de pesos diferentes sentadas a distâncias diferentes do centro. Em uma gangorra, se uma criança se sentar em cada extremidade, a criança mais pesada afunda e a mais leve é erguida no ar. Se a criança mais pesada deslizar em direção ao centro, porém, a gangorra se equilibra. Aplicando este conceito às massas na barra, notamos que as massas se equilibram se e somente se




$$m_1 d_1 = m_2 d_2.$$

No exemplo da gangorra, equilibramos o sistema movendo as massas (crianças) em relação ao fulcro. No entanto, estamos realmente interessados em sistemas nos quais as massas não podem se mover e, em vez disso, equilibramos o sistema movendo o fulcro. Suponha que temos duas massas de pontos, $m_1$ e $m_2$, localizadas numa reta numérica nos pontos $x_1$ e $x_2$, respectivamente.




O centro de massa, $\bar{x}$, é o ponto onde o fulcro deve ser colocado para fazer o equilíbrio do sistema.

Assim, temos

$$\begin{aligned} m_1 \left| x_1 - \bar{x} \right| &= m_2 \left| x_2 - \bar{x} \right| \\ m_1 \left( \bar{x} - x_1 \right) &= m_2 \left( x_2 - \bar{x} \right) \\ m_1 \bar{x} - m_1 x_1 &= m_2 x_2 - m_2 \bar{x} \\ \bar{x} \left( m_1 + m_2 \right) &= m_1 x_1 + m_2 x_2 \end{aligned}$$

ou

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

A expressão no numerador da Equação acima, $m_1 x_1 + m_2 x_2$, é chamada de *primeiro momento do sistema em relação à origem*. Se o contexto for claro, geralmente abandonamos a palavra primeiro e apenas nos referimos a essa expressão como o *momento do sistema*. A expressão no denominador, $m_1 + m_2$, é a massa total do sistema. Assim, o centro de massa do sistema é o ponto no qual a massa total do sistema poderia ser concentrada sem alterar o momento.

Essa ideia não se limita apenas a massas de dois pontos. Em geral, se $n$ massas, $m_1, m_2, \ldots, m_n$, são colocados em uma reta numérica nos pontos $x_1, x_2, ..., x_n$, respectivamente, então o centro de massa do sistema é dado por

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.}$$

**Exemplo 8.1**

Suponha que quatro massas de pontos sejam colocadas em uma reta numérica da seguinte forma:

- $m_1 = 30\text{kg}$, colocado em $x_1 = -2m$
- $m_2 = 5\text{kg}$, colocado em $x_2 = 3m$
- $m_3 = 10\text{kg}$, colocado em $x_3 = 6m$
- $m_4 = 15\text{kg}$, colocado em $x_4 = -3m$.

Para encontrar o centro de massa primeiro precisamos calcular o momento do sistema:

$$M = \sum_{i=1}^{4} m_i x_i = -60 + 15 + 60 - 45 = -30$$

Agora, para encontrar o centro de massa, precisamos da massa total do sistema:

$$m = \sum_{i=1}^{4} m_i = 30 + 5 + 10 + 15 = 60\text{kg}$$

Assim, o centro de massa esta em:

$$\bar{x} = \frac{M}{m} = -\frac{30}{60} = -\frac{1}{2}$$

E o centro de massa está localizado 1/2 m à esquerda da origem.

Podemos generalizar este conceito para encontrar o centro de massa de um sistema de massas pontuais em um plano. O exemplo mais comum da vida é uma bandeja com copos que um garçom deve levar para os clientes (encontrando certo equilibro). Sejam $m_1, \ldots, m_n$ as massas pontuais localizadas nos pontos $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ do plano. Denote por $m = \sum_i^n m_i$ a massa total do sistema. Neste caso, para encontrar o centro de massa $(\bar{x}, \bar{y})$ do sistema precisamos encontrar os momentos $M_x$ e $M_y$ separadamente para os eixos $x$ e $y$ seguindo a mesma ideia acima. Os momentos $M_x$ e $M_y$ do sistema em relação aos eixos $x$ e $y$, respectivamente, são dados por:

$$\boxed{M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \qquad M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i}$$

Observe que a coordenada $x$ do ponto é usada para calcular o momento em relação ao eixo $y$ e vice-versa. A razão é que a coordenada $x$ fornece a distância do ponto de massa ao eixo $y$, e a coordenada $y$ fornece a distância ao eixo $x$. Dados os momentos as coordenadas do centro de massa $(\bar{x}, \bar{y})$ do sistema são:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m}}$$

**Exemplo 8.2**

Suponha que quatro massas de pontos sejam colocadas em uma reta numérica da seguinte forma:

- $m_1 = 2\text{kg}$, colocado em $(-1, 3)$,
- $m_2 = 6\text{kg}$, colocado em $(1, 1)$,
- $m_3 = 4\text{kg}$, colocado em $(2, -2)$.

Primeiro calculamos a massa total do sistema:

$$m = \sum_{i=1}^{3} m_i = 2 + 6 + 4 = 12\text{kg}.$$

Em seguida, encontramos os momentos em relação aos eixos x e y:

$$\begin{aligned} M_y &= \sum_{i=1}^{3} m_i x_i = -2 + 6 + 8 = 12, \\ M_x &= \sum_{i=1}^{3} m_i y_i = 6 + 6 - 8 = 4. \end{aligned}$$

Então nós temos

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{M_y}{m} = \frac{12}{12} = 1, \\ \bar{y} &= \frac{M_x}{m} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

O centro de massa do sistema é $(1, 1/3)$, em metros.

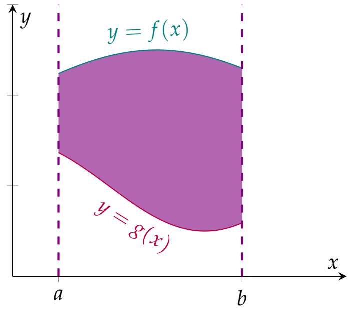
## 8.2 *Centro de massa de placas finas*

Até agora, examinamos sistemas de massas pontuais em uma linha e em um plano. Agora, em vez de ter a massa de um sistema concentrada em pontos discretos, queremos olhar para sistemas nos quais a massa do sistema é distribuída continuamente por uma fina folha de material. Para nossos propósitos, presumimos que a folha é fina o suficiente para que possa ser tratada como se fosse bidimensional. Essa folha é chamada de **lâmina**. A seguir, desenvolvemos técnicas para encontrar o centro de massa de uma lâmina. Nesta seção, também assumimos que a densidade da lâmina é constante e igual 1.

As lâminas são frequentemente representadas por uma região bidimensional em um plano. Visto que assumimos que a densidade da lâmina é constante, o centro de massa da lâmina depende apenas da forma da região correspondente no plano; não depende da densidade. Tal como acontece com os sistemas de massas pontuais, precisamos encontrar a massa total da lâmina, bem como os momentos da lâmina em relação aos eixos $x$ e $y$.

Consideramos primeiro uma lâmina em forma de retângulo. Lembre-se de que o centro de massa de uma lâmina é o ponto onde a lâmina se equilibra. Para um retângulo, esse ponto é o centro horizontal e vertical do retângulo. Com base nesse entendimento, fica claro que o centro de massa de uma lâmina retangular é o ponto de intersecção das diagonais.

Vamos voltar para lâminas mais gerais. Suponha que temos uma lâmina limitada acima pelo gráfico de uma função contínua $f(x)$, abaixo pelo gráfico de outra função contínua $g(x)$, e entre as retas $x = a$ e $x = b$, respectivamente, conforme mostrado na figura do lado.




**Theorem 8.1: Centro de massa da lâmina**

Seja $R$ uma região limitada acima pelo gráfico de uma função contínua $f(x)$, abaixo pelo gráfico de outra função contínua $g(x)$ e entre as retas $x = a$ e $x = b$, respectivamente. Assim: a massa da lâmina é

$$\boxed{m = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.} \tag{8.1}$$

Os momentos $M_x$ e $M_y$ da lâmina em relação aos eixos $x$ e $y$, respectivamente, são

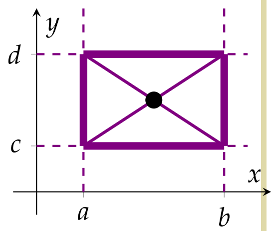
$$\boxed{M_x = \int_a^b \frac{[f(x)]^2 - [g(x)]^2}{2}dx, \qquad M_y = \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx.} \tag{8.2}$$

As coordenadas do centro de massa $(\bar{x}, \bar{y})$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m}.} \tag{8.3}$$

**Exemplo 8.3**

Considere o retângulo conforme figura do lado. Suponha que o ponto $P$ é a interseção das diagonais em retângulo. As coordenadas do ponto $P$ são $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right)$. Por outro lado esse retângulo pode ser visto como a região limitada pelas retas $y = d$, $y = c$, $x = a$ e $x = b$, assim aplicando as fórmulas (8.1)–(8.3) temos:




$$\text{Massa} = \int_a^b [d - c]dx = (d - c) \cdot (b - a).$$

$$M_y = \int_a^b x[d - c]dx = (d - c)\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = (d - c) \cdot \frac{b^2 - a^2}{2},$$
$$M_x = \int_a^b \frac{d^2 - c^2}{2}dx = \frac{d^2 - c^2}{2} \cdot (b - a).$$

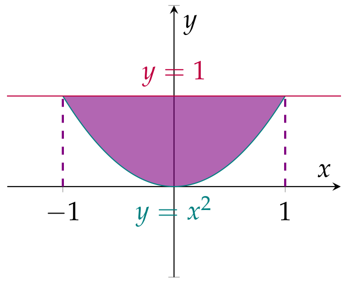
Assim

$$\bar{x} = \frac{(d - c) \cdot \frac{b^2 - a^2}{2}}{(d - c) \cdot (b - a)} = \frac{a + b}{2}, \qquad \bar{y} = \frac{\frac{d^2 - c^2}{2} \cdot (b - a)}{(d - c) \cdot (b - a)} = \frac{c + d}{2}.$$

Assim, ponto $P = (\bar{x}, \bar{y})$ é centro de massa do retângulo.

**Exemplo 8.4**

Vamos determinar o centro de massa da região limitada pela reta $y = 1$ e parábola $y = x^2$. Temos que os dois gráficos se encontram quando $x^2 = 1$ ou seja $x = \pm 1$. Assim aplicando as fórmulas (8.1)–(8.3) temos:




$$\text{Massa m} = \int_{-1}^{1} \left[1 - x^2\right] dx$$
$$= \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}$$
$$= \left[1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right] = \frac{4}{3}.$$

Momentos:

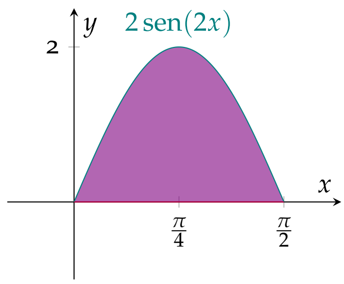
$$M_y = \int_{-1}^{1} x \cdot \left(1 - x^2\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]\Big|_{-1}^{1} = 0,$$
$$M_x = \frac{1}{4}\int_{0}^{1} \left[1^2 - x^4\right] dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \left(1 - x^4\right) dx = \frac{1}{4}\left(x - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{1} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{0}{\frac{4}{3}} = 0, \qquad \bar{y} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{4}{3}} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5}.$$

Assim o centro de massa está no $(0, 3/5)$.

**Exemplo 8.5**

Vamos determinar o centro de massa da região limitada pela reta $y = 0$ e $y = 2\,\text{sen}(2x)$ no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Temos que os dois gráficos se encontram em $x = 0$ ou $x = \frac{\pi}{2}$. Assim aplicando as fórmulas (8.1)–(8.3) temos:




$$\text{Massa m} = \int_{0}^{\pi/2} 2\,\text{sen}\,2x dx = 2 \cdot \left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)\Big|_{0}^{\pi/2} = [1 + 1] = 2.$$

$$M_y = \int_{0}^{\pi/2} x \cdot 2\,\text{sen}\,2x dx = -x \cdot \cos 2x\Big|_{0}^{\pi/2} + \int_{0}^{\pi/2} \cos 2x dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\text{sen}^2\, x}{2}\Big|_{0}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2},$$
$$M_x = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2} 4\,\text{sen}^2\, 2x dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2} 2(1 - \cos 4x) dx = \frac{1}{2}[2x - \frac{\text{sen}\,4x}{2}\Big|_{0}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

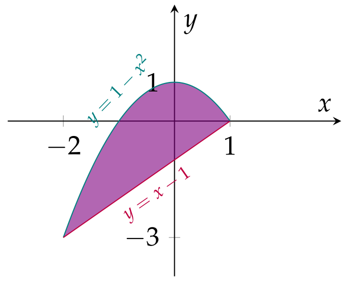
Assim

$$\bar{x} = \frac{\pi/2}{2} = \frac{\pi}{4}, \qquad \bar{y} = \frac{\pi/2}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Assim o centro de massa está no $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

**Exemplo 8.6**

Vamos determinar o centro de massa da região limitada pela reta $y = 1$ e parábola $y = 1 - x^2$. Temos que os dois gráficos se encontram quando $1 - x^2 = x - 1$ ou seja $x = -2$ ou $x = 1$. Assim aplicando as fórmulas (8.1)–(8.3) temos:




$$
\begin{aligned}
\text{Massa m} &= \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \\
&= \int_{-2}^{1} \left[1 - x^2 - (x-1)\right] dx \\
&= \int_{-2}^{1} \left(2 - x^2 - x\right) dx \\
&= \left[2x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]\Bigg|_{-2}^{1} \\
&= \left[2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right] - \left[-4 + \frac{8}{3} - 2\right] \\
&= \frac{9}{2}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_x &= \int_a^b \frac{1}{2}\left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right) dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{1} \left(\left(1 - x^2\right)^2 - (x-1)^2\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-2}^{1} \left(x^4 - 3x^2 + 2x\right) dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5} - x^3 + x^2\right]\Bigg|_{-2}^{1} = -\frac{27}{10}, \\
M_y &= \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx = \int_{-2}^{1} x\left[\left(1 - x^2\right) - (x-1)\right] dx \\
&= \int_{-2}^{1} x\left[2 - x^2 - x\right] dx = \int_{-2}^{1} \left(2x - x^3 - x^2\right) dx \\
&= \left[x^2 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{-2}^{1} = -\frac{9}{4}.
\end{aligned}
$$

Assim

$$
\bar{x} = \frac{-9/4}{9/2} = -\frac{1}{2}, \qquad \bar{y} = \frac{-27/10}{9/2} = -\frac{3}{5}.
$$

Assim o centro de massa está no $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}\right]$.

**Exercício 8.1: (Trabalho p/ casa)**

Calcule o centro de massa da região limitada por $y = \sqrt{x}$, eixo-x, e as retas $x = 0$ e $x = 4$.

**Resposta:** $(12/5, 3/4)$.

**Exercício 8.2: (Trabalho p/ casa)**

Calcule o centro de massa da região limitada por $y = x^2$, eixo-x, e as retas $x = 0$ e $x = 2$.

**Resposta:** $(3/2, 6/5)$.

**Exercício 8.3: (Trabalho p/ casa)**

Calcule o centro de massa da região limitada por $y = 1 - x^2$ e eixo-x.

**Resposta:** $(0, 2/5)$.

**Exercício 8.4: (Trabalho p/ casa)**

Calcule o centro de massa da região limitada por $y = x^3$ e $y = \sqrt{x}$.

**Resposta:** $(12/25, 3/7)$.