Aula 7. Comprimento das curvas

Nesta aula, usamos integrais definidas para encontrar o comprimento do arco de uma curva. Podemos pensar no comprimento do arco como a distância que você viajaria se estivesse caminhando ao longo do caminho da curva. Muitas aplicações do mundo real envolvem comprimento de arco. Se um foguete é lançado ao longo de um caminho parabólico, podemos querer saber a que distância o foguete viaja. Ou, se uma curva em um mapa representa uma estrada, podemos querer saber a distância que temos que dirigir para chegar ao nosso destino.

Começamos calculando o comprimento do arco de curvas definidas como funções de x, depois examinamos o mesmo processo para curvas definidas como funções de y. (O processo é idêntico, com os papéis de x e y invertidos.)

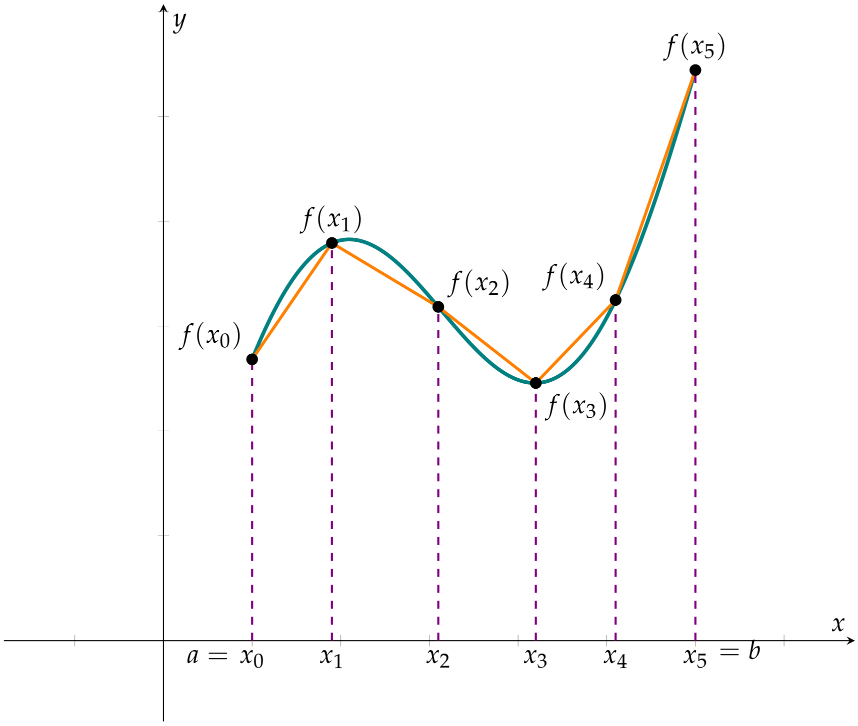
7.1 Comprimento do arco da curva $y = f(x)$

Em aplicações anteriores de integração, exigíamos que a função $f(x)$ fosse integrável ou, no máximo, contínua. No entanto, para calcular o comprimento do arco, temos um requisito mais rigoroso para $f(x)$. Aqui exigimos que $f(x)$ seja diferenciável e, além disso, exigimos que sua derivada, $f'(x)$, seja contínua. Funções como essa, que têm derivadas contínuas, são chamadas de **suaves**.

Seja $f(x)$ uma função suave definida em $[a, b]$. Queremos calcular o comprimento da curva do ponto $(a, f(a))$ ao ponto $(b, f(b))$. Começamos usando segmentos de linha para aproximar o comprimento da curva. Para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, seja $P = x_i$ uma partição de $[a, b]$, ou seja

$$P : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Então, para $i = 1, 2, \ldots, n$, construa um segmento de reta do ponto $((x_{i-1}), f(x_{i-1}))$ ao ponto $(x_i, f(x_i))$. Embora possa parecer lógico usar segmentos de linha horizontais ou verticais, queremos que nossos segmentos de linha se aproximem da curva o mais próximo possível. A Figura de baixo mostra essa construção para $n = 5$.



Para nos ajudar a encontrar o comprimento de cada segmento de linha, observamos a mudança na distância vertical, bem como a mudança na distância horizontal em cada intervalo. Como usamos uma partição regular, a mudança na distância horizontal em cada intervalo é dada por $\triangle x = \triangle x_i = x_i - x_{i-1}$. A mudança na distância vertical varia de intervalo para intervalo, portanto, usamos $\triangle y_i = f(x_i) - f(x_i - 1)$ para representar a mudança na distância vertical ao longo do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Observe que alguns (ou todos) $\triangle y_i$ podem ser negativos.

Pelo Teorema de Pitágoras, o comprimento do segmento de linha é

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

Também podemos escrever isso como

$$\Delta x \sqrt{1 + ((\Delta y_i) / (\Delta x))^2}$$

Agora, pelo Teorema do Valor Médio, existe um ponto $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que $f'(x_i^*) = (\Delta y_i) / (\Delta x)$. Então o comprimento do segmento de linha é dado por

$$\Delta x \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}.$$

Somando os comprimentos de todos os segmentos de linha, obtemos

$$\text{Comprimento do Arco} \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$, temos

$$\begin{aligned} \text{Comprimento do Arco} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \end{aligned}$$

Theorem 7.1: Comprimento do Arco

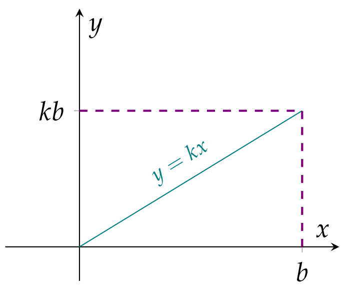
Seja $f(x)$ uma função suave no intervalo $[a, b]$. Então o comprimento do arco da porção do gráfico de $f(x)$ do ponto $(a, f(a))$ ao ponto $(b, f(b))$ é dado por:

$$\boxed{\text{Comprimento do Arco} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.} \tag{7.1}$$

Observe que estamos integrando uma expressão envolvendo $f'(x)$, portanto, precisamos ter certeza de que $f'(x)$ é integrável. É por isso que exigimos que $f(x)$ seja suave. Os exemplos a seguir mostram como aplicar o teorema.

Exemplo 7.1

Considere exemplo quando $f(x) = k \cdot x$, onde k é uma constante. Pelo Teorema de Pitágoras o comprimento do Arco da curva $y = kx$ no intervalo $[0, b]$ igual



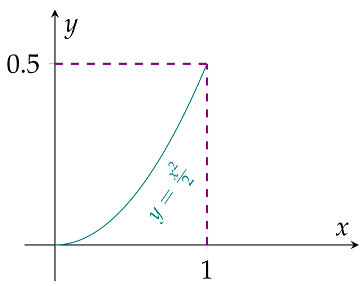
$$\sqrt{b^2 + (kb)^2} = b\sqrt{1 + x^2},$$

para todo b. Agora vamos ver como receber a mesma resposta usando (7.1). Neste caso $f'(x) = k$, assim $[f']^2 = k^2$. Portanto, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^b \sqrt{1 + k^2} dx &= \sqrt{1 + k^2} \int_0^b dx \\ &= \sqrt{1 + k^2} \cdot x \Big|_0^b \\ &= b \cdot \sqrt{1 + k^2}. \end{aligned}$$

Exemplo 7.2

Considere exemplo quando $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$, com $0 \le x \le 1$. Assim $f'(x) = x$ e $[f'(x)]^2 = x^2$. Aplicando (7.1), temos:



$$\text{Comprimento do Arco} = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx.$$

Agora proseguindo como no Exercício 3.1 (da Aula 3) e fazendo a mudança $x = \tan u$ temos:

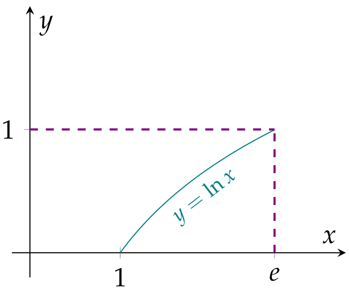
$$\int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \tan^2 u} \cdot \sec^2 u du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 u du$$

Agora, de novo como no Exercício 3.1 (da Aula 3), temos

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 u du = \frac{1}{2}\left[\sec u \tan u + \ln|\sec u + \tan u|\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)].$$

Exemplo 7.3

Considere exemplo quando $f(x) = \ln x$, com $1 \leq x \leq e$. Assim $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ e $[f'(x)]^2 = \dfrac{1}{x^2}$. Aplicando (7.1), temos:



$$\begin{aligned}
\text{Comprimento do Arco} &= \int_1^e \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx \\
&= \int_1^e \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx \\
&= \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & x = 1 \to u = 1 \\ du = 2x & x = e^1 \to u = e^2 \end{array} \right| \\
&= \frac{1}{2}\int_1^{e^2} \frac{\sqrt{1+u}}{u}du.
\end{aligned}$$

Calculando integral indefinido, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1+u}}{u}du &= \left| \begin{array}{l} \sqrt{1+u} = v \\ dv = \frac{1}{2}\cdot\frac{du}{\sqrt{1+u}} \end{array} \right| \\
&= \frac{1}{2}\cdot 2\int \frac{v^2}{v^2-1}dv \\
&= \int \frac{v^2-1+1}{v^2-1}dv \\
&= \int dv + \int \frac{dv}{v^2-1} = v + \frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{v-1} + \frac{1}{v+1}\right] dv \\
&= v + \frac{1}{2}\left[\ln|v-1| - \ln|v+1|\right] \\
&= \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+1}-1\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+1}+1\right| + C.
\end{aligned}$$

Voltando para integral definida, temos que o comprimetro do arco da curva igual:

$$-\frac{\ln\left(\sqrt{e^4+1}+1\right) - \ln\left(\sqrt{e^4+1}-1\right) - \ln\left(\sqrt{2}+1\right) + \ln\left(\sqrt{2}-1\right)}{2} + \sqrt{e^4+1} - \sqrt{2}.$$

7.2 *Comprimento da curvas em equações paramétricas*

Suponha que a curva dada pelas equações paramétricas (como na Aula 4):

$$x = x(t), \qquad y = y(t),$$

onde t varia num intervalo $[c,d]$, de modo que $x(c) = a$ e $x(d) = b$ (ou seja x varia no intervalo $[a,b]$). Assim a relação $y = f(x)$ podemos escrever como

$$y(t) = f(x(t)).$$

Observe que aplicando regra de cadeia temos

$$y'(t) = f'(x(t))x'(t),$$

assim:

$$\begin{aligned}
\text{Comprimento do Arco} &= \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx \\
&= \int_c^d \sqrt{1+[f'(x(t))]^2}x'(t)dt \\
&= \int_c^d \sqrt{[x'(t)]^2+[f'(x(t))x'(t)]^2}dt \\
&= \int_c^d \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt
\end{aligned}$$

Assim, resumindo, temos que

Theorem 7.2: Comprimento do Arco em equações paramétricas

Dada uma curva

$$\gamma = (x(t), y(t)),$$

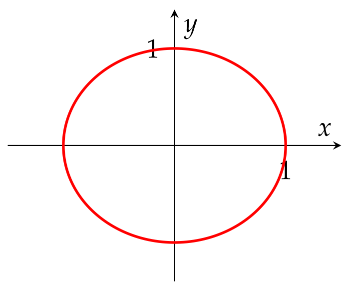
com $x(t), y(t)$ funções suaves no intervalo $[c, d]$. Então o comprimento do arco da porção do gráfico da curva $(x(t), y(t))$ do ponto $(x(c), y(c))$ ao ponto $(x(d), y(d))$ é dado por:

$$\boxed{\text{Comprimento da curva } = \int_c^d \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt.} \tag{7.2}$$

Exemplo 7.4

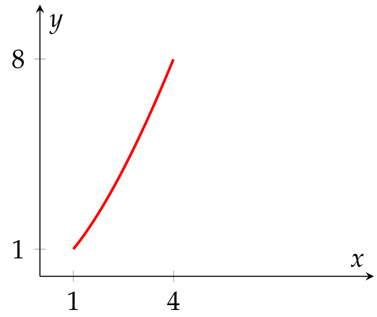
Considere a curva dada por $\gamma = (\operatorname{sen} t, \cos t)$ com $t \in [0, 2\pi]$. Assim a curva é a circunferência com raio 1 (veja Aula 4). Aplicando a fórmula (7.2), temos

$$\begin{aligned}
\text{Comprimento da curva} &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{[\cos t]^2+[-\operatorname{sen} t]^2}dt \\
&= \int_0^{2\pi} dt = t\Big|_0^{2\pi} = 2\pi.
\end{aligned}$$



Exemplo 7.5

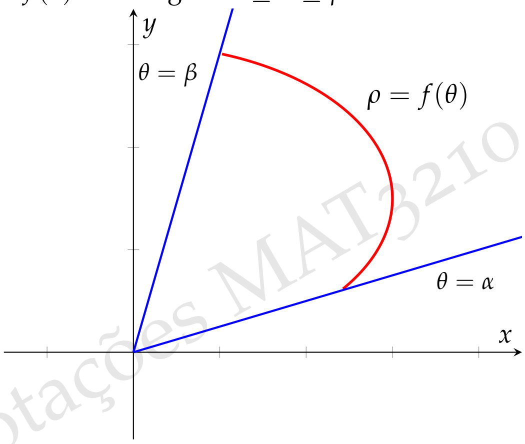
Sejam as equações do movimento da uma partícula dadas por $\gamma = (t^2, t^3)$, com $t \in [1,2]$. Qual é distância a percorrida? Neste caso $x(t) = t^2$ e $y(t) = t^3$. Assim a distância percorrida é (aplicando (7.2)):



$$\begin{aligned}
\int_1^2 \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2}dt &= \int_1^2 \sqrt{4t^2 + 9t^4}dt \\
&= \int_1^2 t \cdot \sqrt{4 + 9t^2}dt = \left| \begin{array}{l} u = 4 + 9t^2 \\ du = 18tdt \\ t = 1 \to u = 13 \\ t = 2 \to u = 40 \end{array} \right| \\
&= \int_{13}^{40} \frac{1}{18}\sqrt{u}du = \frac{1}{18 \cdot 3/2} \cdot u^{3/2}\Big|_{13}^{40} \\
&= \frac{1}{27}\left[40^{3/2} - 13^{3/2}\right] = \frac{1}{27}[80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}].
\end{aligned}$$

7.3 Comprimento da curvas em coordenadas polares

Nesta seção veremos o comprimento do arco da curva dada por $\rho = f(\theta)$ com ângulo $\alpha \leq \theta \leq \beta$.



Passando para equações paramétricas, temos

$$\begin{aligned}
x(\theta) &= f(\theta) \cdot \cos\theta \\
y(\theta) &= f(\theta) \cdot \operatorname{sen}\theta.
\end{aligned}$$

Agora derivando as equações, temos

$$\begin{aligned}
x'(\theta) &= f'(\theta) \cdot \cos\theta - f(\theta) \cdot \operatorname{sen}\theta \\
y'(\theta) &= f'(\theta) \cdot \operatorname{sen}\theta + f(\theta) \cdot \cos\theta
\end{aligned}$$

Alem disso observem que

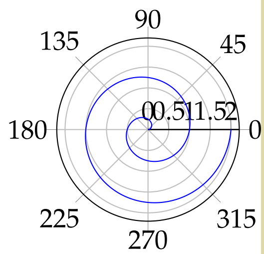
$$\begin{aligned}
\left[x'(\theta)\right]^2 + \left[y'(\theta)\right]^2 &= \left[f'(\theta) \cdot \cos\theta - f \cdot \operatorname{sen}\theta\right]^2 + \left[f'(\theta)\operatorname{sen}\theta + f \cdot \cos\theta\right]^2 \\
&= f'(\theta) \cdot \cos^2\theta - 2f'(\theta) f \cos\theta \operatorname{sen}\theta + f^2 \operatorname{sen}^2\theta + [f'(\theta)]^2 \operatorname{sen}^2\theta + 2f'(\theta) f \cdot \operatorname{sen}\theta\cos\theta + f^2\cos^2\theta \\
&= f^2 \cdot \left(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right) + [f'(\theta)]^2 \cdot \left(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta\right) = f^2 + [f'(\theta)]^2.
\end{aligned}$$

Agora, usando a fórmula (7.2), temos que o comprimento do arco da curva $\rho = f(\theta)$ com ângulo $\alpha \leq \theta \leq \beta$ é dado por

$$\boxed{\text{Comprimento da curva } = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta.} \qquad (7.3)$$

Exemplo 7.6

Vamos calcular o comprimento da curva $\rho = \theta$, com $0 \leq \theta \leq 1$. Observe que a curva é espiral como na figura do lado. Aplicando a fórmula (7.3) temos



$$\text{Comprimento} = \int_0^1 \sqrt{\theta^2 + 1} d\theta$$

Proseguindo como nos exercícios acima (veja também a Aula 3), temos

$$\begin{aligned}
\text{Comprimento} &= \int_0^1 \sqrt{\theta^2 + 1} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 x dx \\
&= \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))
\end{aligned}$$

Exercício 7.1: (Trabalho p/ casa)

Seja $f(x) = 2x^{3/2}$. Calcule o comprimento do arco do gráfico de $f(x)$ no intervalo $[0, 1]$. Arredonde a resposta para três casas decimais após da vírgula.

Resposta: $\frac{2}{27}[10\sqrt{10} - 1] \approx 2.268$

Exercício 7.2: (Trabalho p/ casa)

Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$. Calcule o comprimento do arco do gráfico de $f(x)$ no intervalo $[0, \pi]$. Use um computador ou calculadora para aproximar o valor da integral.

Resposta: ≈ 3.8202

Exercício 7.3: (Trabalho p/ casa)

Calcule o comprimento da curva $x(t) = 2\cos^2 t$, $y(t) = 2\cos t \operatorname{sen} t$, onde $0 \leq t \leq \pi$. Explique a resposta.

Resposta: 2π

Exercício 7.4: (Trabalho p/ casa)

Calcule o comprimento da curva $x(t) = t \operatorname{sen} t$, $y(t) = t \cos t$, onde $0 \leq t \leq 2\pi$.

Resposta: $\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+(2\pi)^2}(2\pi)+\ln\left|\sqrt{1+(2\pi)^2}+2\pi\right|\right]$.

Exercício 7.5: (Trabalho p/ casa)

Calcule o comprimento da curva $\rho(\theta) = 1/\theta$, onde $1 \leq \theta \leq 2$.

Resposta: $-\frac{\sqrt{5}}{2}+\ln(\sqrt{5}+2)+\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}+1)$.