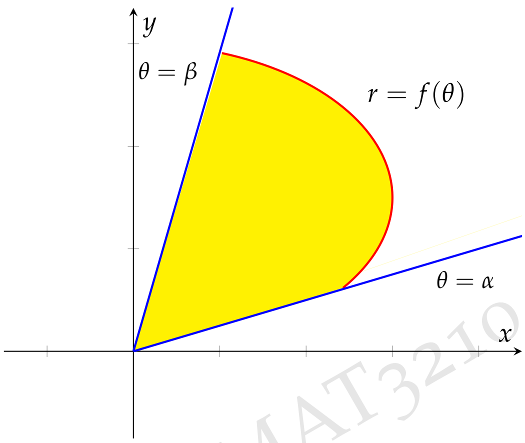
Aula 6. Áreas em coordenadas polares

Nesta Aula, veremos as áreas delimitadas por curvas polares. Observe também que dissemos "limitadas por" em vez de "abaixo", como costumamos fazer nesses problemas (como na Aula 1). Esses problemas funcionam de maneira um pouco diferente nas coordenadas polares. Aqui está um esboço de quais são os regiões para encontrar a área.



Estaremos procurando a área amarela no esboço acima do conjunto A, dado por

$$A = \left\{ (\rho, \theta) \;\middle|\; \begin{array}{c} 0 \leq \rho \leq f(\theta), \\ \alpha \leq \theta \leq \beta \end{array} \right\}.$$

A fórmula para encontrar esta área é,

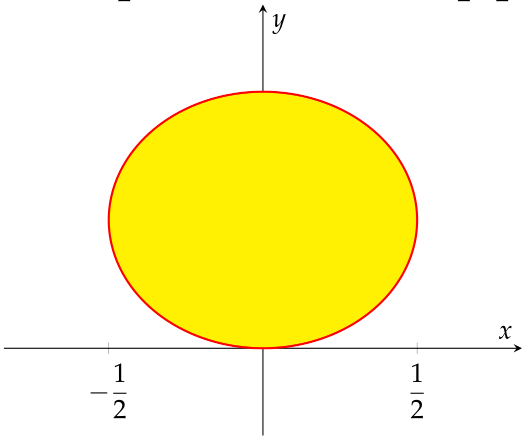
$$\boxed{\text{Área } A = \frac{1}{2} \int\limits_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta.}$$

Exemplo 6.1

Calcule área da região limitada por

$$\rho(\theta) = \operatorname{sen}\theta, \qquad 0 \le \theta \le \pi.$$

Como vimos na Aula 5, a região correspondente é uma circunferência com centro no ponto $(0, 0.5)$ com raio $\frac{1}{2}$. Assim a área deve ser $\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$.



Agora vamos ver como receber a mesma resposta usando a a fórmula acima. Temos

$$\begin{aligned}
\text{Área } A &= \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}^2\theta d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} (1 - \cos 2\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{4}\left[\theta - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right]\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

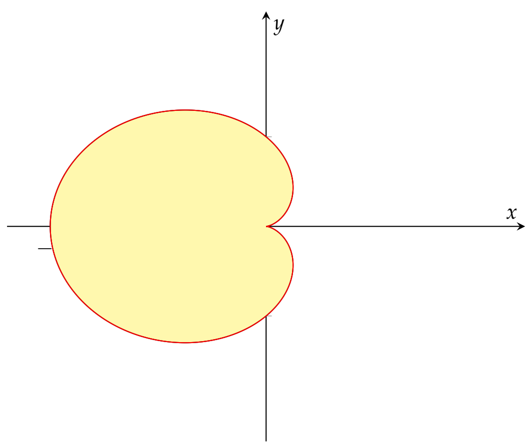
Exercício 6.1

Calcule área da região limitada por

$$\rho(\theta) = 1 - \cos\theta, \qquad 0 \le \theta \le \pi.$$

Solução 6.1

Como vimos na aula 5, a curva define o cardioide ao lado.
Usando a fórmula para calcular a área temos:



$$\text{Área } A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} [1 - \cos\theta]^2 d\theta$$

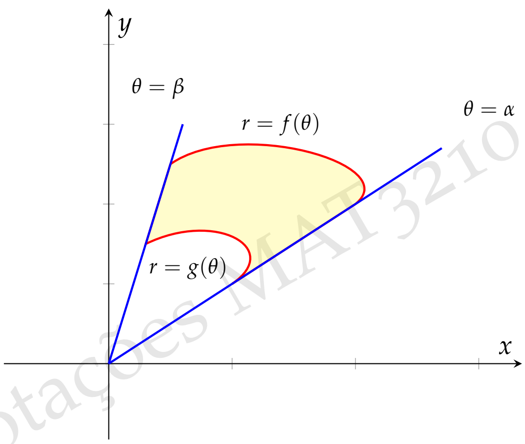
Temos,

$$\int_0^{\pi} [1 - \cos\theta]^2 d\theta = \int_0^{\pi} [1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta] d\theta$$
$$= 2\pi + \int_0^{\pi} \cos^2\theta d\theta$$
$$= 2\pi + \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta$$
$$= 2\pi + \pi = 3\pi.$$

Assim a área da cardioide igual a $\dfrac{3\pi}{2}$.

LEMBRETE: $\int_0^{2\pi} \cos x dx = 0$

Como vamos ver no vários exemplos a seguir, é bem útil calcular as áreas de regiões quando o raio varia entre duas curvas $f(\theta)$ e $g(\theta)$, como no esboço de baixo.



Estaremos procurando a área no esboço acima do conjunto A, dado por

$$A = \left\{ (\rho, \theta) \;\middle|\; \begin{array}{l} g(\theta) \leq \rho \leq f(\theta), \\ \alpha \leq \theta \leq \beta \end{array} \right\}.$$

A fórmula para encontrar esta área é,

$$\boxed{\text{Área } A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f^2(\theta) - g^2(\theta)] d\theta.} \tag{6.1}$$

Exercício 6.2

Encontre a área da região entre os círculos

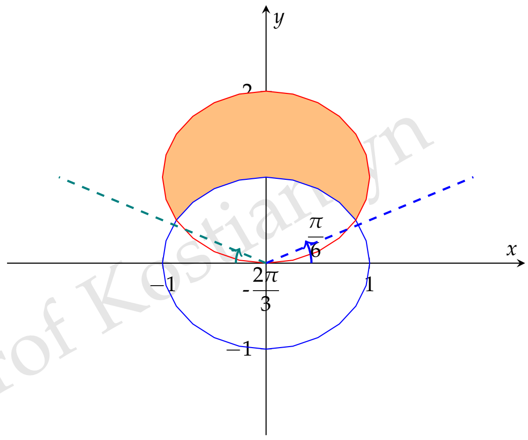
$$\rho = 1, \qquad \rho = 2\operatorname{sen}\theta,$$

tal que

$$1 \leq \rho \leq 2\operatorname{sen}\theta,$$

isto é a região interior da circunferência $\rho = 2\operatorname{sen}\theta$ e exterior da circunferência $\rho = 1$.

Solução 6.2



Os círculos interceptam onde $1 = 2\operatorname{sen}\theta$, ou seja $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$, assim $\theta = \frac{\pi}{6}$ ou $\theta = \frac{5\pi}{6}$. Assim, aplicando a fórmula (6.1), temos

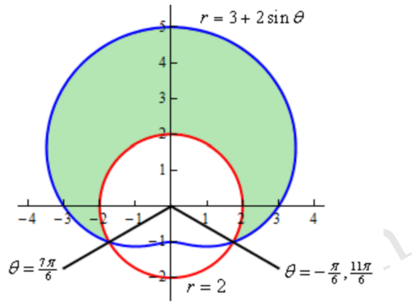
$$\begin{aligned}
\text{Área é} &= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} [4\operatorname{sen}^2\theta - 1]d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} [2(1-\cos 2\theta) - 1]d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left[\frac{1}{2} - \cos 2\theta\right]d\theta \\
&= \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right]\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \\
&= \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right] \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Exercício 6.3

Determine a área que está dentro de $\rho = 3 + 2\,\text{sen}\,\theta$ e fora de $\rho = 2$.

Solução 6.3

Do lado está um esboço da região que buscamos.



Este é o gráfico de $\rho = 3 + 2\,\text{sen}\,\theta$. O círculo e o cardioide se cruzam nos 3º e 4º quadrantes. A área do coração até o círculo que está no primeiro e segundo quadrantes está sombreada. Para determinar esta área, precisamos conhecer os valores de θ para

o qual as duas curvas se cruzam. Podemos determinar esses pontos definindo as duas equações e resolvendo.

$$\begin{aligned} 3 + 2\sin\theta &= 2 \\ \sin\theta &= -\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \end{aligned}$$

Observe também aqui que também reconhecemos que outra representação para o ângulo $\frac{11\pi}{6}$ é $-\frac{\pi}{6}$. Isso é importante para este problema. Para usar a fórmula acima, a área deve ser delimitada conforme aumentamos do ângulo menor para o maior. Portanto, se usarmos $\frac{7\pi}{6}$ para $\frac{11\pi}{6}$ não incluiremos a área sombreada, em vez disso, incluiremos a parte inferior das três regiões. No entanto, se usarmos os ângulos $-\frac{\pi}{6}$ para $\frac{7\pi}{6}$, incluiremos a área que buscamos.

Assim aplicando a fórmula (6.1).

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} \frac{1}{2}\left((3 + 2\sin\theta)^2 - (2)^2\right)\,d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} \frac{1}{2}\left(5 + 12\sin\theta + 4\sin^2\theta\right)\,d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} \frac{1}{2}\left(7 + 12\sin\theta - 2\cos(2\theta)\right)\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left(7\theta - 12\cos\theta - \sin(2\theta)\right)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} \\ &= \frac{11\sqrt{3}}{2} + \frac{14\pi}{3} \end{aligned}$$

Exercício 6.4

Calcule a área interior das ambas as curvas:

$$\rho = \operatorname{sen}\theta, \qquad \rho = \cos\theta.$$

Solução 6.4

A curva $\rho = \operatorname{sen}\theta$ é a circunferência azul e $\rho = \cos\theta$ a circunferência vermelha na figura do lado. As circunferências se encontram quando

$$\operatorname{sen}\theta = \cos\theta,$$

ou seja $\theta = \dfrac{\pi}{4}$. Observe que para calcular a área interior das ambas as circunferências, podemos dividir a região em duas: quando o ângulo varia entre o e $\pi/4$ e quando o ângulo varia entre $\pi/4$ e $\pi/2$ (como na figura do lado). Assim temos:

$$A_1 = \left\{ (\theta, \rho) \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}, \\ 0 \le \rho \le \operatorname{sen}\theta \end{array} \right\}$$

e

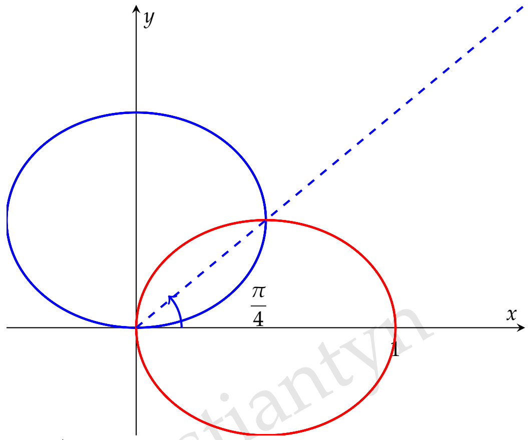
$$A_2 = \left\{ (\theta, \rho) \;\middle|\; \begin{array}{l} \dfrac{\pi}{4} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 \le \rho \le \cos\theta \end{array} \right\},$$

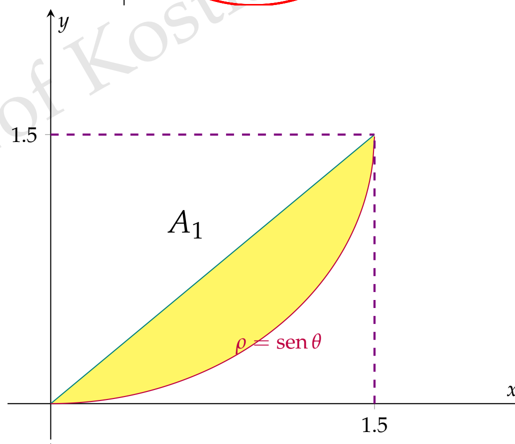
com

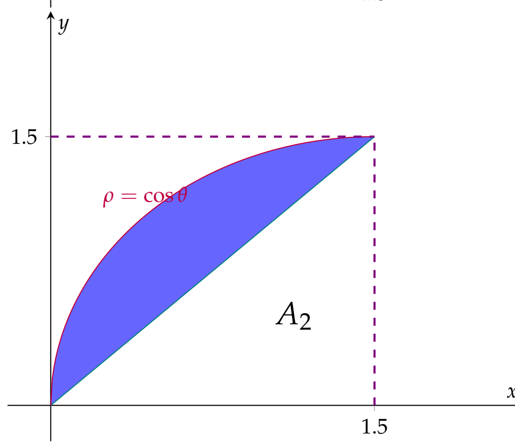
$$\text{Área total} = \text{área } A_1 + \text{ área } A_2.$$

Assim

$$\begin{aligned}
\text{Área total} &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^2\theta d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2\theta) d\theta + \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{4}\left[\left(\theta - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \left(\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) \right] = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$







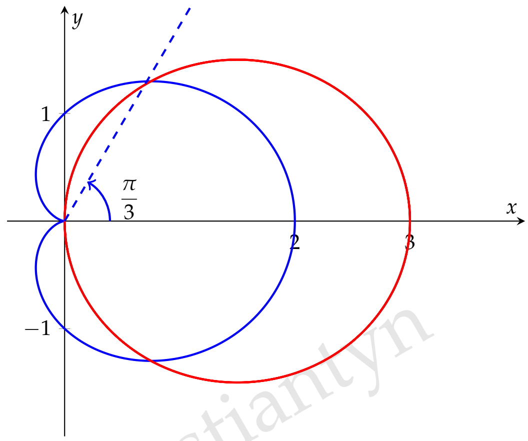
Exercício 6.5

Calcule a área da região interior de ambas as curvas:

$$\rho = 3 \cdot \cos\theta, \qquad \rho = 1 + \cos\theta.$$

Solução 6.5

A curva $\rho = 3\cos\theta$ é a circunferência vermelha e $\rho = 1 + \cos\theta$ é o cardioide azul na figura do lado. Observe que para calcular a área interior das ambas as curvas podemos calcular a área com ângulo θ variando entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ multiplicando por 2 no final. Além disso a região laranja interior de duas podemos dividir a região em duas: quando o ângulo varia entre 0 e $\pi/3$ e quando o ângulo varia entre $\pi/3$ e $\pi/2$ (como na figura do lado). Assim temos:



$$A_1 = \left\{ (\theta, \rho) \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, \\ 0 \leq \rho \leq 1 + \cos\theta \end{array} \right\}$$

e

$$A_2 = \left\{ (\theta, \rho) \;\middle|\; \begin{array}{l} \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leq \rho \leq 3 \cdot \cos\theta \end{array} \right\},$$

com

$$\text{Área total} = 2[\text{área } A_1 + \text{ área } A_2].$$

Assim

$$\begin{aligned} \text{Área } A_1 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos\theta)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{3\theta}{2} + 2\,\text{sen}\,\theta + \frac{\text{sen}\,2\theta}{4} \right] \Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{3\pi}{6} + 2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3} + \frac{\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}}{4} \right] = \frac{\pi}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{16}. \end{aligned}$$

Semelhante,

$$\text{Área } A_2 = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos\theta)^2 d\theta = \frac{3\pi}{8} - \frac{9\sqrt{3}}{16}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \text{Área total} &= 2[\text{área } A_1 + \text{ área } A_2] \\ &= 2\left[\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{8} \right] = \frac{5\pi}{4}. \end{aligned}$$

Exercício 6.6: (Trabalho p/ casa)

- Determine a área que está fora do $\rho = 3 + 2\cos\theta$ e dentro do $\rho = 2$. **Resposta:** $\frac{11\sqrt{3}}{2} - \frac{7\pi}{3}$.
- Determine a área que dentro das ambas $\rho = 3 + 2\cos\theta$ e $\rho = 2$. **Resposta:** $-\frac{11\sqrt{3}}{2} + \frac{19\pi}{3}$.