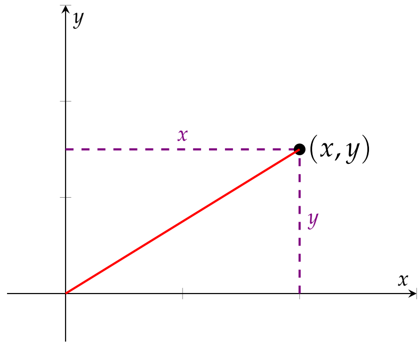
# Aula 5. As coordenadas polares

## 5.1 Noções básicas

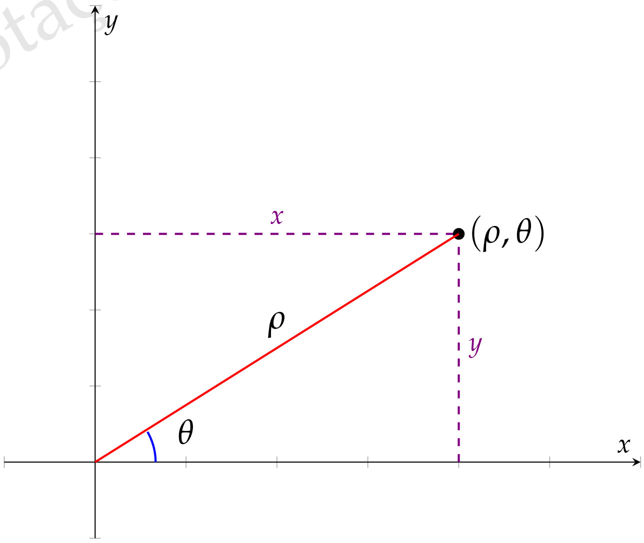
Até este ponto, lidamos exclusivamente com o sistema de coordenadas cartesianas (ou retangulares, ou $x$–$y$). No entanto, como veremos, esse nem sempre é o sistema de coordenadas mais fácil de trabalhar. Portanto, nesta aula, começaremos a examinar o sistema de coordenadas polares.

Os sistemas de coordenadas nada mais são do que uma forma de definir um ponto no espaço. Por exemplo, no sistema de coordenadas cartesianas (introduzidas pelo René Descartes), um ponto recebe as coordenadas $(x, y)$ e usamos isso para definir o ponto começando na origem e depois movendo $x$ unidades horizontalmente seguidas por $y$ unidades verticalmente. Isso é mostrado no esboço do lado.

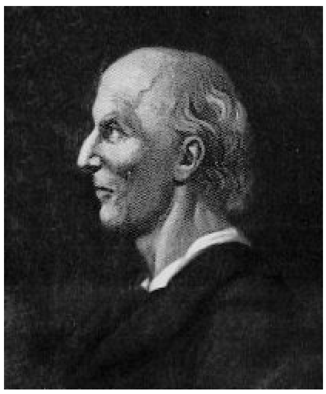
René Descartes (1596–1650)




Entretanto, isso não é a única maneira de definir um ponto no espaço bidimensional. Em vez de nos movermos verticalmente e horizontalmente da origem para chegar ao ponto, poderíamos ir direto para fora da origem até atingirmos o ponto e então determinar o ângulo que esta linha faz com o eixo $x$. Poderíamos então usar a distância do ponto da origem e a quantidade necessária para girar o eixo-x como as coordenadas do ponto. Isso é mostrado no esboço abaixo.

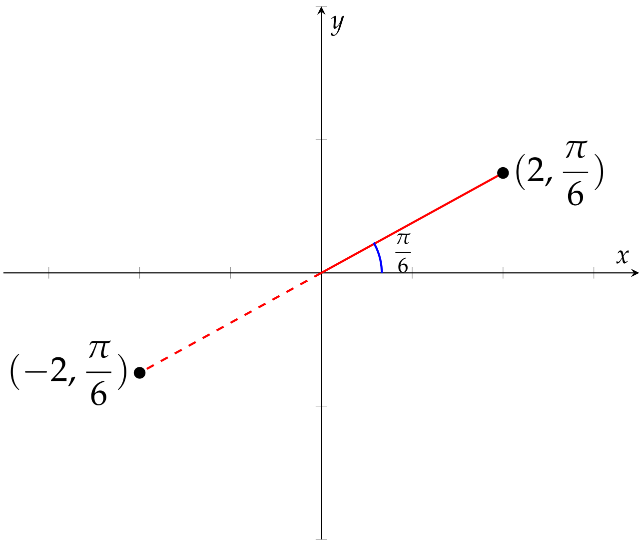



As coordenadas nesta forma são chamadas de *coordenadas polares* introduzidas pelo matemático italiano Gregório Fontana.

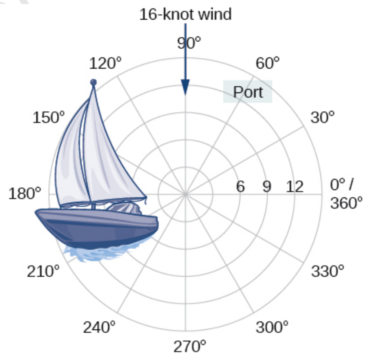


Gregorio Fontana (1735–1803)

A discussão acima pode levar alguém a pensar que $\rho$ deve ser um número positivo. No entanto, também permitimos $r$ ser negativo. Abaixo está um esboço dos dois pontos $(2, \frac{\pi}{6})$ e $(-2, \frac{\pi}{6})$.



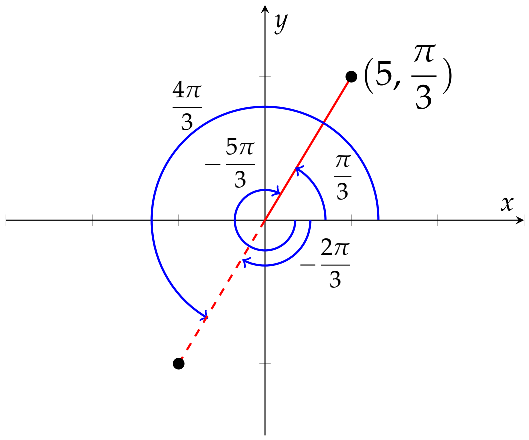

A partir deste esboço, podemos ver que se $\rho$ é positivo, o ponto estará no mesmo quadrante que $\theta$. Por outro lado, se $\rho$ for negativo, o ponto está no quadrante oposto. Observe também que as coordenadas $(-2, \frac{\pi}{6})$ descrevem o mesmo ponto que as coordenadas $(2, \frac{7\pi}{6})$. As coordenadas $(2, \frac{7\pi}{6})$ nos dizem para girar o eixo-x por um ângulo de $\frac{7\pi}{6}$, isso nos colocaria na linha tracejada no esboço acima e, em seguida, se moveria para uma distância de 2.




Isso leva a uma diferença importante entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas polares. Nas coordenadas cartesianas as coordenadas para qualquer ponto são unicamente determinadas. Com coordenadas polares, isso não é verdade. Em coordenadas polares, existe literalmente um número infinito de coordenadas para um determinado ponto. Por exemplo, os quatro pontos a seguir são coordenadas para o mesmo ponto.

$$(5, \frac{\pi}{3}) = (5, -\frac{5\pi}{3}) = (-5, \frac{4\pi}{3}) = (-5, -\frac{2\pi}{3}).$$

Abaixo está um esboço dos ângulos usados nesses quatro conjuntos de coordenadas.




No segundo par de coordenadas, giramos no sentido horário para chegar ao ponto. Não devemos esquecer de girar no sentido horário. Às vezes é o que temos que fazer!

Os dois últimos pares de coordenadas usam o fato de que, se terminarmos no quadrante oposto do ponto, podemos usar um negativo $\rho$ para voltar ao ponto e, claro, há uma rotação no sentido horário e anti-horário para chegar ao ângulo.

Esses quatro pontos representam apenas as coordenadas do ponto sem girar em torno do sistema mais de uma vez. Se permitirmos que o ângulo faça quantas rotações completas quanto quisermos em torno do sistema de eixos, haverá um número infinito de coordenadas para o mesmo ponto. Na verdade, o ponto $(\rho, \theta)$ pode ser representado por qualquer um dos seguintes pares de coordenadas.

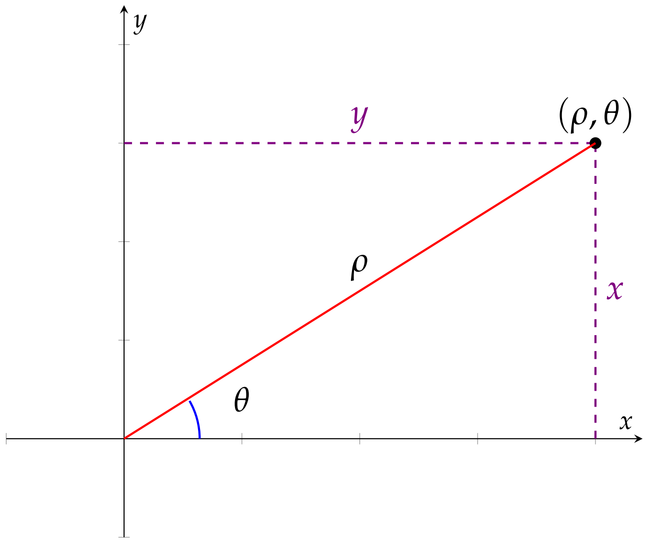
$$(\rho, \theta + 2\pi n), \qquad (-\rho, \theta + (2n+1)\pi),$$

onde $n$ é qualquer inteiro.

A seguir, devemos falar sobre a origem do sistema de coordenadas. Nas coordenadas polares, a origem costuma ser chamada de *pólo*. Como não estamos realmente afastando da origem/pólo, sabemos que $r = 0$. No entanto, ainda podemos girar o sistema em qualquer ângulo $\theta$ que quisermos e, portanto, as coordenadas da origem/pólo são $(0, \theta)$.

## 5.2 *Relação entre coordenadas polares e cartesianas*

Agora que temos uma compreensão das coordenadas polares, precisamos pensar sobre a conversão entre os dois sistemas de coordenadas. Vamos começar com o seguinte esboço, nos lembrando de como funcionam os dois sistemas de coordenadas.




Observe que temos um triângulo retângulo acima e com isso podemos obter as seguintes equações que converterão as coordenadas polares em coordenadas cartesianas.

**Fórmulas de conversão polar para cartesiana:**

$$x = \rho \cdot \cos\theta, \qquad y = \rho \cdot \operatorname{sen}\theta.$$

Converter do cartesiano é também fácil. Vamos primeiro observar o seguinte.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (\rho\cos\theta)^2 + (\rho\operatorname{sen}\theta)^2 \\ &= \rho^2\cos^2\theta + \rho^2\operatorname{sen}^2\theta \\ &= \rho^2(\cos^2 + \operatorname{sen}^2) = \rho^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Observe que, tecnicamente, devemos ter um sinal de mais ou menos na frente da raiz, pois sabemos que $\rho$ pode ser positivo ou negativo. Vamos continuar com a convenção que $\rho$ é positivo aqui.

Obter uma equação para $\theta$ também é simples. Vamos começar com

$$\frac{y}{x} = \frac{\rho\operatorname{sen}\theta}{\rho\cos\theta} = \tan\theta.$$

Portanto,

$$\theta = \arctan\frac{y}{x}.$$

Precisamos ter cuidado com isso porque a função arco tangente retorna apenas valores no intervalo $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Lembre-se de que existe um segundo ângulo possível e que o segundo ângulo é dado por $\theta + \pi$.

Assim, **Fórmulas de conversão cartesiana para polar:** são

$$x^2 + y^2 = r^2, \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \arctan\frac{y}{x}.$$

**Exemplo 5.1**

Vamos converter cada um dos pontos a seguir no sistema de coordenadas fornecido.

(a) Converter $(-4, \dfrac{2\pi}{3})$ para coordenadas cartesianas.

(b) Converter $(-1, -1)$ para coordenadas polares.

*(a)*. Usando os formulas acima, temos

$$\begin{aligned} x &= -4\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -4\left(-\frac{1}{2}\right) = 2, \\ y &= -4\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Assim as coordenadas cartesianas desse ponto são $(2, -2\sqrt{3})$.
*(b)*. De novo usando as formulas acima, temos

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \\ \theta &= \arctan\frac{-1}{-1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

No entanto, este não é o ângulo correto. Este valor de $\theta$ está no primeiro quadrante e o ponto $(-1, -1)$ está no terceiro quadrante. Conforme observado acima, podemos obter o ângulo correto adicionando $\pi$. Portanto, o ângulo correto é,

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}.$$

Então, em coordenadas polares, o ponto é $\left(\sqrt{2}, \dfrac{5\pi}{4}\right)$. Observe também que poderíamos ter usado o primeiro $\theta$ com $\rho$ negativo. Neste caso, o ponto também pode ser escrito em coordenadas polares como $\left(-\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

**Exemplo 5.2**

(a) Converter $2x - 5x^3 = 1 + xy$ para coordenadas polares.

(b) Converter $\rho = -2\cos\theta$ para as coordenadas Cartesianas.
*(a)*. Usando os formulas acima, temos

$$\begin{aligned} 2\rho\cos\theta - 5(\rho\cos\theta)^3 &= 1 + (\rho\cos\theta)(\rho\,\mathrm{sen}\,\theta), \\ \Longrightarrow 2\rho\cos\theta - 5\rho^3\cos^3\theta &= 1 + \rho^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta. \end{aligned}$$

*(b)*. Este é um pouco mais complicado, mas não muito. Primeiro, observe que podemos substituir diretamente $\rho$ mas não há uma substituição direta para o cosseno. Se tivéssemos um $\rho$ à direita junto com o cosseno então poderíamos fazer uma substituição direta. Assim,

$$\begin{aligned} \rho^2 &= -2\rho\cos\theta, \\ \Longrightarrow x^2 + y^2 &= -2x. \end{aligned}$$

**Exercício 5.1**

Escreva a equação polar em coordenadas cartesianas:

$$\rho = \operatorname{sen}(2\theta).$$

**Solução 5.1**

Temos:

$$\begin{aligned}
\rho &= \operatorname{sen}(2\theta), && \text{Usando arco duplo}\\
\rho &= 2\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta, && \text{Usando } \frac{x}{\rho} = \cos\theta, \frac{y}{\rho} = \operatorname{sen}\theta\\
\rho &= 2\cdot\frac{x}{\rho}\cdot\frac{y}{\rho}\\
\rho &= 2\cdot\frac{xy}{\rho^2},\\
\rho^3 &= 2xy\\
\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3 &= 2xy, && \text{Pois } \rho^2 = x^2+y^2.
\end{aligned}$$

A equação também pode ser escrita como:

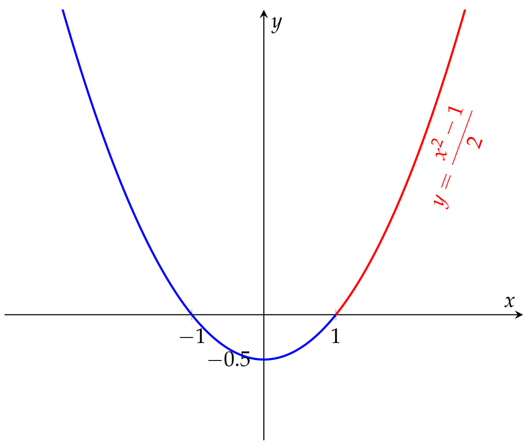
$$(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} = 2xy, \qquad \text{ou} \quad (x^2+y^2) = (2xy)^{\frac{2}{3}}.$$

## 5.3 *Curvas em coordenadas polares*

**Exercício 5.2**

Desenhe a curva cuja equação em coordenadas polares é dada pela equação:

$$\rho(\theta) = \frac{1}{1-\operatorname{sen}\theta}.$$

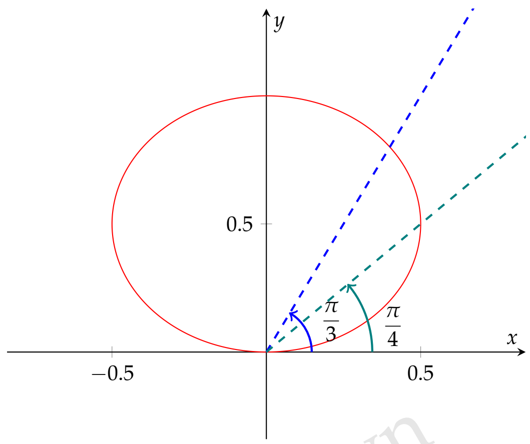



**Solução 5.2**

Observe que a curva está bem definida quando $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, ou seja, quando $\operatorname{sen}\theta \neq 1$. Como no exemplo anterior, temos

$$\begin{aligned}
&\rho - \rho\operatorname{sen}\theta = 1,\\
\implies &\sqrt{x^2+y^2} - y = 1,\\
\implies &x^2+y^2 = (1+y)^2,\\
\implies &x^2+y^2 = 1+2y+y^2,\\
\implies &y = \frac{x^2-1}{2}.
\end{aligned}$$

Assim a curva é parábola do lado. Se $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ assim temos a parte vermelha e se $\frac{\pi}{2} < \theta \leq 2\pi$ temos a parte azul. Dois pedaços do gráfico se interceptam no ponto $(1, 0)$ quando $\theta = 0 = 2\pi$.




**Exercício 5.3**

Desenhe a curva cuja equação em coordenadas polares é dada pela equação:

$$\rho(\theta) = \operatorname{sen}\theta, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

**Solução 5.3**

Proseguindo como no Exemplo 5.2 temos:

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \rho \operatorname{sen}\theta, \\ \Longrightarrow x^2 + y^2 &= y, \\ \Longrightarrow x^2 + y^2 - y + \frac{1}{4} &= \frac{1}{4}, \\ \Longrightarrow x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 &= (\frac{1}{2})^2. \end{aligned}$$

equação da circunferência com raio $\frac{1}{2}$ e centro no ponto $(0, \frac{1}{2})$.



**Exemplo 5.3**

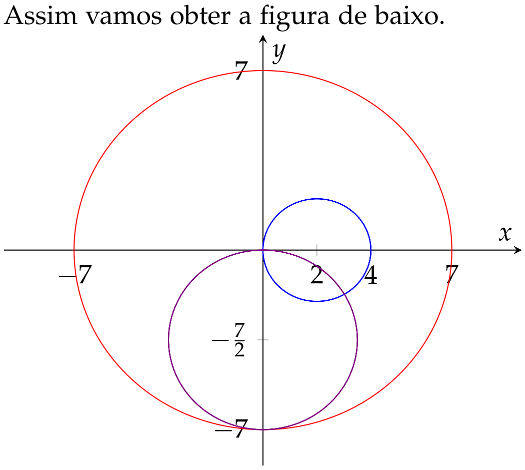
Vamos desenhar as curvas $\rho = 7$, $\rho = 4\cos\theta$, e $\rho = -7\operatorname{sen}\theta$ no mesmo sistema de eixos.

Primeiramente, observamos que a equação $\rho = 7$, é equivalente à $x^2 + y^2 = 7^2$, assim define a circunferência de raio 7 com o centro na origem (círculo vermelho na figura de baixo).

Proseguindo como no Exercício 5.3 temos que a curva $\rho = -7\operatorname{sen}\theta$ é a circunferência de raio $\frac{7}{2}$ com o centro no ponto $\left(0, -\frac{7}{2}\right)$ (círculo violeta na figura de baixo).

Analogamente, a curva $\rho = 4\cos\theta$ é a circunferência de raio 2 com centro em $(2, 0)$ (círculo azul na figura de baixo).

Assim vamos obter a figura de baixo.



**Exercício 5.4: (Trabalho p/ casa)**

(a) Determine as coordenadas polares dos seguintes pontos:

$$(-1,-2),\ (-3,3),\ (2,-6).$$

(b) Determine as coordenadas cartesianas dos seguintes pontos:

$$(-1,\frac{\pi}{4}),\ (2,\frac{2\pi}{3}),\ (3,\frac{\pi}{6}).$$

**Exercício 5.5: (Trabalho p/ casa)**

Converter em coordenadas cartesianas as seguintes equações:

$$6\rho^3 \operatorname{sen}\theta = 4 - \cos\theta, \qquad \frac{2}{\rho} = \operatorname{sen}\theta - \sec\theta.$$

**Respostas:** $6(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}y = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} - x$
e $2x = xy - x^2 - y^2$, respectivamente.

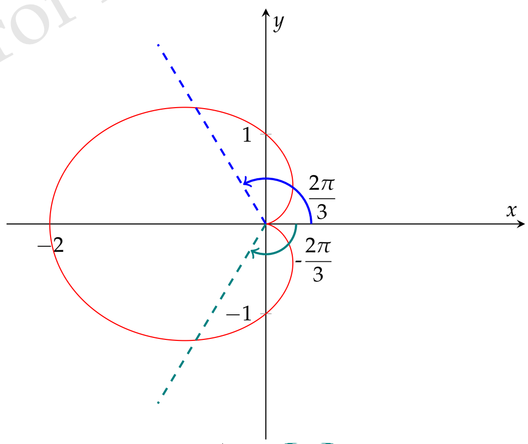


**Exercício 5.6: (Trabalho p/ casa)**

Desenhe a curva cuja equação em coordenadas polares dada é pela equação:

$$\rho(\theta) = 1 - \cos\theta, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

calculando os valores de $\rho(\theta)$ para ângulos simples como $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ etc. recebendo o cardioide do lado.




**Exercício 5.7: (Trabalho p/ casa)**

Desenha no mesmo plano as seguintes curvas:

$$\rho(\theta) = 1 + \cos\theta,$$
$$\rho(\theta) = 3\cos\theta,$$
$$\rho(\theta) = 2\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta.$$