Aula 4. Curvas definidas por equações paramétricas

Nesta aula, examinaremos as equações paramétricas e seus gráficos. No sistema de coordenadas cartesianas planas, as equações paramétricas *são úteis* para descrever curvas que não são necessariamente funções. O parâmetro é uma variável independente de x e y e, à medida que o parâmetro aumenta, os valores de x e y traçam um caminho ao longo de uma curva plana. Por exemplo, se o parâmetro for t (uma escolha comum), então t pode representar o tempo. Então x e y são definidos como funções do tempo, e $(x(t), y(t))$ pode descrever a posição no plano de um dado objeto conforme ele se move ao longo de um caminho curvo.

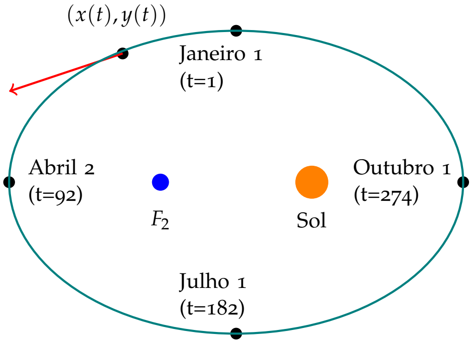
4.1 Equações paramétricas e seus gráficos

Considere a órbita da Terra em torno do Sol. Nosso ano dura 365 dias. Em 1-ro de janeiro de cada ano, a localização física da Terra em relação ao Sol é quase a mesma, exceto nos anos bissextos, quando a defasagem introduzida pelos 14 dias extras de órbita é inserida no calendário. Chamamos 1-ro de janeiro de “dia 1” do ano. Então, por exemplo, o dia 31 é 31 de janeiro, o dia 59 é 28 de fevereiro e assim por diante.

O número do dia em um ano pode ser considerado uma variável que determina a posição da Terra em sua órbita. À medida que a Terra gira em torno do Sol, sua localização física muda em relação ao Sol. Após um ano inteiro, estamos de volta ao ponto de partida e um novo ano começa. De acordo com as leis de movimento planetário de Kepler, a forma da órbita é elíptica, com o Sol em um dos focos da elipse.

Johannes Kepler (1571–1630)

A imagem do lado descreve a órbita da Terra em torno do Sol durante um ano. O ponto identificado como F_2 é um dos focos da elipse; o outro foco é ocupado pelo sol. Se sobrepormos eixos de coordenadas neste gráfico, podemos atribuir pares ordenados a cada ponto da elipse. Então, cada valor de x no gráfico é um valor de posição em função do tempo, e cada valor de y também é um valor de posição em função do tempo. Portanto, cada ponto no gráfico corresponde a um valor da posição da Terra em função do tempo.



Definição: Equações Paramétricas

Se x e y são funções contínuas de t num intervalo I, então as equações

$$x = x(t), \qquad y = y(t),$$

são chamadas de *equações paramétricas* e t é chamado de *parâmetro*. O conjunto de pontos (x, y) obtido conforme t varia no intervalo I é chamado de *gráfico das equações paramétricas*.

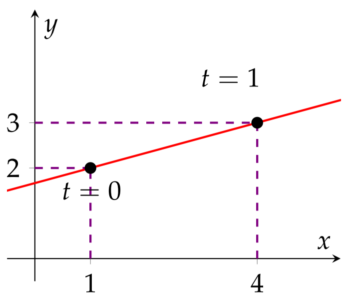
Exemplo 4.1

Considere a curva dada pela equação

$$x(t) = 1 + 3t, \; y(t) = 2 + t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Para desenhar o gráfico desta curva, primeiro configure uma tabela de valores. Como a variável independente em $x(t)$ e $y(t)$ é t, deixe t aparecer na primeira coluna. Então $x(t)$ e $y(t)$ aparecerão na segunda e terceira colunas da tabela.

t	x	y
0	1	2
1	4	3
2	7	4
-1	-2	1



Assim, recebemos que a trajetória da curva é uma reta no plano. Neste caso podemos receber a equação da reta explicitamente. Observe que $y = 2 + t$ implica que $t = y - 2$, assim $x = 1 + 3t$ implica que $x = 1 + 3(y - 2)$, ou seja, a equação da reta é:

$$x - 3y + 5 = 0.$$

Exemplo 4.2

Suponha dada a reta $y = 1 + 2x$. A gente pode encontrar várias parametrizações para ela. Por exemplo:

$$x(t) = t, \; y(t) = 1 + 2t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização. Mas tem várias outras, por exemplo:

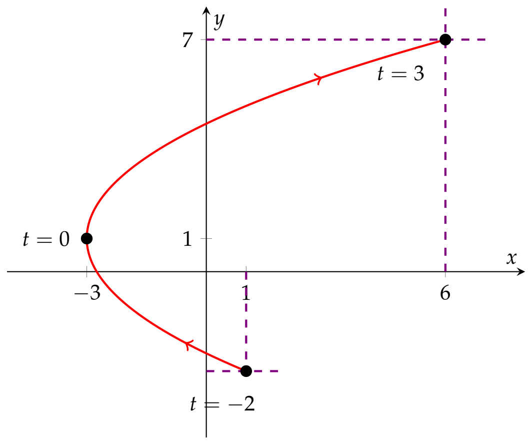
$$x(t) = -t, \; y(t) = 1 - 2t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

e

$$x(t) = 2t, \; y(t) = 1 + 4t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

mais 2 parametrizações que diferem no sentido e velocidade de percurso da curva.

4.2 *Eliminação do parâmetro*



Para entender melhor o gráfico de uma curva representada parametricamente, é útil reescrever as duas equações como uma única equação relacionando as variáveis x e y (como a gente fez no Exemplo 4.1). Então podemos aplicar qualquer conhecimento prévio de equações de curvas no plano para identificar a curva. Por exemplo, suponha dadas as equações que descrevem a curva plana:

$$x(t) = t^2 - 3 \quad y(t) = 2t + 1 \tag{4.1}$$

com $-2 \leq t \leq 3$. Resolvendo a Equação (4.1) para t dá

$$t = \frac{y-1}{2}. \tag{4.2}$$

Isso pode ser substituído na Equação (4.1)

$$\begin{aligned} x &= (\frac{y-1}{2})^2 - 3 \\ &= \frac{y^2 - 2y + 1}{4} - 3 \\ &= \frac{y^2 - 2y - 11}{4}. \end{aligned}$$

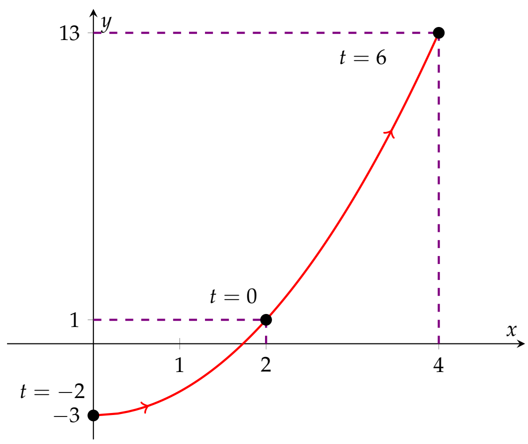
A equação $x = \dfrac{y^2 - 2y - 11}{4}$ descreve x como uma função de y. Essas etapas fornecem um exemplo de eliminação do parâmetro. O gráfico desta função é um pedaço de parábola à direita. A curva plana começa em $(1, -3)$ e termina em $(6, 7)$. Essas terminações foram devido à restrição do parâmetro $-2 \leq t \leq 3$.

Exercício 4.1

Elimine o parâmetro para a curva plana descrita pelas seguintes equações paramétricas e descreva o gráfico resultante:

$$x(t) = \sqrt{2t+4}, \qquad y(t) = 2t + 1, \qquad -2 \leq t \leq 6.$$

Solução 4.1



Para eliminar o parâmetro, podemos resolver qualquer uma das equações para t. Por exemplo, resolver a primeira equação para t dá

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2t+4}, \\ x^2 &= 2t + 4, \\ x^2 - 4 &= 2t, \\ t &= \frac{x^2 - 4}{2}. \end{aligned}$$

Observe que quando elevamos ao quadrado ambos os lados, é importante observar que $x \geq 0$. Substituindo $t = \dfrac{x^2-4}{2}$ em $y(t)$

resulta

$$\begin{aligned} y(t) &= 2t+1, \\ y &= 2\frac{x^2-4}{2}+1, \\ y &= x^2-4+1, \\ y &= x^2-3. \end{aligned}$$

Esta é a equação de uma parábola virada para cima. Há, no entanto, uma restrição de domínio devido aos limites do parâmetro t. Quando $t = -2$, $x = \sqrt{2(-2)+4} = 0$, e quando $t = 6$, $x = \sqrt{2(6)+4} = 4$.

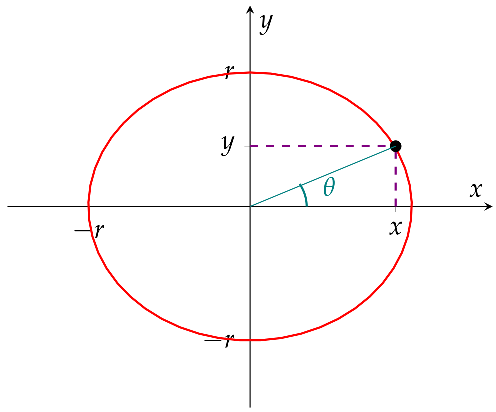
4.3 *Parametrização das circunferências e elipses*

Nos seguintes exemplos, a gente vai explicar como parametrizar as circunferências e elipses.

Exemplo 4.3

Suponha dada a circunferência com o centro na origem e raio r. Assim sua equação é

$$x^2 + y^2 = r^2.$$



Observe que para todo $0 \leq \theta \leq 2\pi$ temos

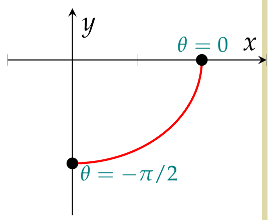
$$\frac{x}{r} = \cos\theta, \qquad \frac{y}{r} = \operatorname{sen}\theta.$$

Assim uma parametrização da circunferência é dada por

$$x(\theta) = r \cdot \cos\theta, \qquad y(\theta) = r \cdot \operatorname{sen}\theta, \tag{4.3}$$

onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Limitando o parâmetro θ para menor domínio, podemos receber a parte da circunferência. Por exemplo se o angulo θ, varia entre $-\frac{\pi}{2}$ e 0 assim a curva correspondente é o pedaço da circunferência com raio r com $x > 0$ e $y < 0$. Além disso modificando Equações (4.3) é fácil obter a equação da circunferência com centro no ponto arbitrário (x_0, y_0) do plano:



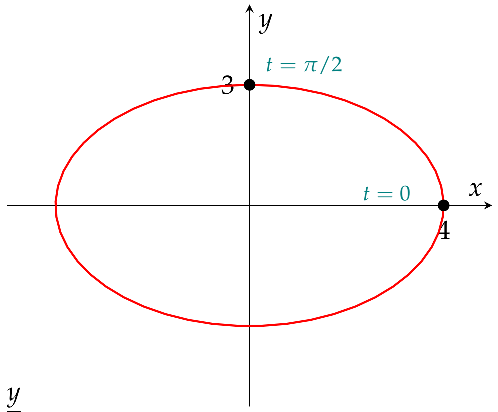
$$x(\theta) = r \cdot \cos\theta + x_0, \qquad y(\theta) = r \cdot \operatorname{sen}\theta + y_0,$$

com $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Exemplo 4.4

Deformando as formulas (4.3), suponha que a curva dada pelas equações,

$$x(t) = 4\cos t, \qquad y(t) = 3\,\mathrm{sen}\, t,$$



com $0 \leq t \leq 2pi$.
Às vezes é necessário ser um pouco criativo para eliminar o parâmetro. Resolver qualquer uma das equações para t diretamente não é aconselhável porque seno e cosseno não são funções um-para-um. No entanto, dividindo a primeira equação por 4 e a segunda equação por 3 (e suprimir o t) nos dá

$$\cos t = \frac{x}{4} \qquad \mathrm{sen}\, t = \frac{y}{3}.$$

Agora usando a identidade Pitagórica

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

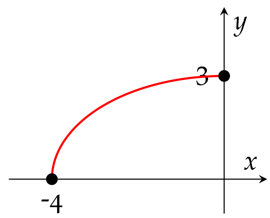
e substituindo as expressões para $\mathrm{sen}\, t$ e $\cos t$ pelas expressões equivalentes em termos de x e y, implica que

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1,$$

ou seja

$$\frac{x}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Esta é a equação de uma elipse horizontal centrada na origem, com semi-eixo maior 4 e semi-eixo menor 3 como mostrado no gráfico.
De novo, limitando o parâmetro θ para menor domínio, podemos receber a parte da circunferência. Por exemplo se o angulo θ, varia entre $\frac{\pi}{2}$ e π assim a curva correspondente é o pedaço da elipse com raio com $x < 0$ e $y > 0$.
Além disso modificando as equações dadas é fácil obter a equação da elipse com centro no ponto arbitrário (x_0, y_0) do plano:



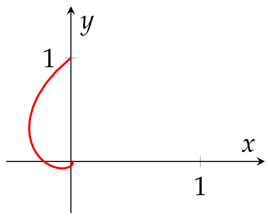
$$x(\theta) = a \cdot \cos\theta + x_0, \qquad y(\theta) = b \cdot \mathrm{sen}\,\theta + y_0,$$

com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e a, b são semi-eixos correspondentes.

Exemplo 4.5

Suponha dada uma curva pelas equações paramétricas:

$$x(\theta) = e^{-\theta} \cdot \cos\theta, \qquad y(\theta) = e^{-\theta} \cdot \mathrm{sen}\,\theta,$$

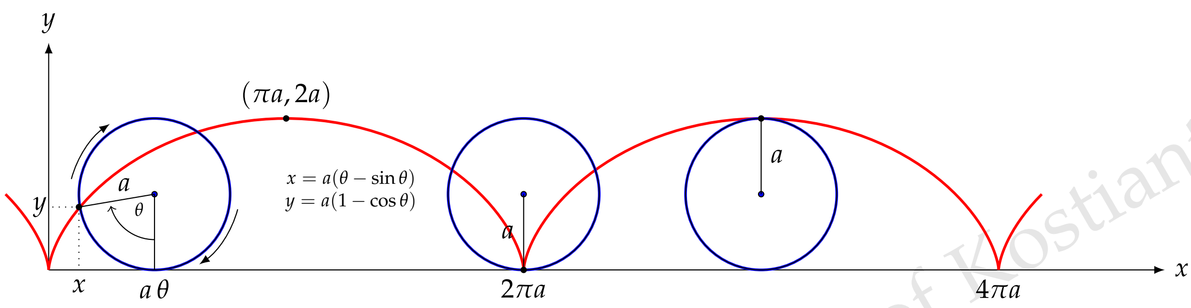


onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Para todo θ fixo o ponto correspondete está na circunferência com raio e^{-t}. Mas quando θ aproxima o valor π o raio correspondente $e^{-\theta}$ aproxima o 0. Assim a curva correspondente é parte da espiral como na figura do lado.

4.4 Ciclóide e outras curvas paramétricas

4.4.1 Ciclóide

Imagine fazer um passeio de bicicleta pelo país. Os pneus ficam em contato com a via e giram em um padrão previsível. Agora, suponha que uma formiga muito determinada esteja cansada após um longo dia e queira voltar para casa. Então ela se pendura na lateral do pneu e ganha uma carona gratuita. O caminho que essa formiga percorre por uma estrada reta é chamado de *ciclóide* (na figura abaixo).



Um ciclóide gerado por um círculo (ou roda de bicicleta) de raio a é dado pelas equações paramétricas:

$$x(\theta) = a(\theta - \operatorname{sen}\theta), \quad y(\theta) = a(1 - \cos\theta).$$

Para ver por que isso é verdade, considere o caminho que o centro da roda segue. O centro se move ao longo do eixo x a uma altura constante igual ao raio da roda. Se o raio for a, então as coordenadas do centro podem ser dadas pelas equações

$$x(\theta) = a\theta, \qquad y(\theta) = a.$$

para qualquer valor de θ. Em seguida, considere a formiga, que gira em torno do centro ao longo de um caminho circular. Se a bicicleta estiver se movendo da esquerda para a direita, as rodas estão girando no sentido horário. Uma possível parametrização do movimento circular da formiga (em relação ao centro da roda) é dada por

$$x(\theta) = -a\operatorname{sen}\theta, \qquad y(t) = -a\cos\theta.$$

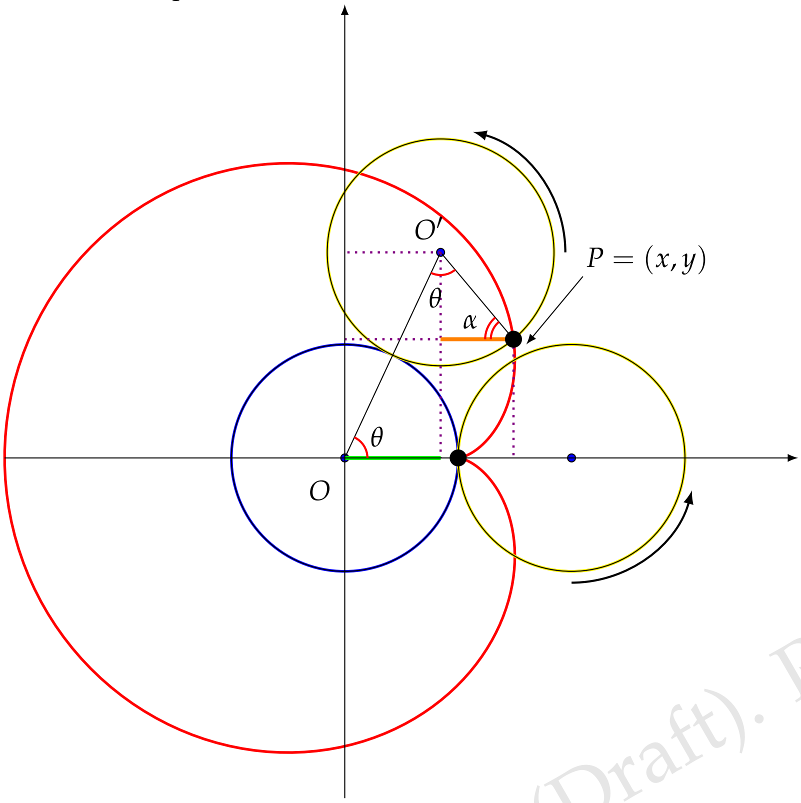
(O sinal negativo é necessário para inverter a orientação da curva. Se o sinal negativo não estivesse lá, teríamos que imaginar a roda girando no sentido anti-horário.) A soma dessas equações fornece as equações para o ciclóide.

$$x(\theta) = a(\theta - \operatorname{sen}\theta), \quad y(\theta) = a(1 - \cos\theta).$$

4.4.2 Cardióide

O *cardióide* é gerado rolando um círculo sobre o outro. Os dois círculos venham com o mesmo raio a. Então — o círculo amarelo é rolado para o azul.

Imagine que você deu ao círculo amarelo no início uma caneta vermelha em seu pólo leste. Como o efeito do rolamento, essa caneta vermelha produzirá a curva vermelha do *cardióide*.



Observe que o tamanho do segmento OO' é $2a$, onde a é raio das circunferências. E por outro lado o tamanho do segmento $O'P$ é a. Além disso o angulo α pode ser calculado como

$$\alpha = 180^0 - 2\theta.$$

Assim os segmentos verde e laranja podem ser calculados como:

$$\begin{aligned} \text{segmento verde} &= OO' \cos\theta = 2a\cos\theta, \\ \text{segmento laranja} &= O'P\cos\alpha = a\cos(180 - 2\theta). \end{aligned}$$

Observe que a coordenada x do Ponto P, pode ser calculado como

$$\begin{aligned} \text{segmento verde} + \text{segmento laranja} &= 2a\cos\theta + a\cos(180 - 2\theta) \\ &= 2a\cos\theta - a\cos(2\theta). \end{aligned}$$

Analogamente, a coordenada y do Ponto P, pode ser calculado como

$$2a\,\text{sen}\,\theta - a\,\text{sen}(180 - 2\theta) = 2a\,\text{sen}\,\theta - a\,\text{sen}(2\theta).$$

Assim, as equações da cardioide são

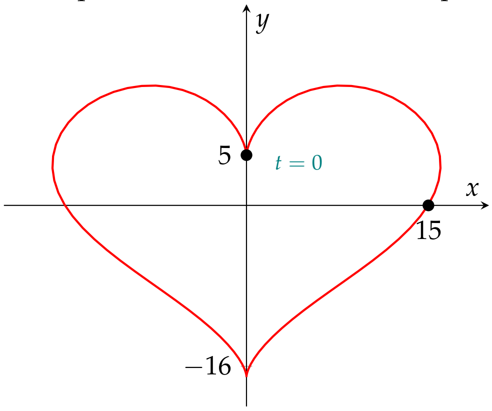
$$\begin{aligned} x(\theta) &= 2a\cos\theta - a\cos(2\theta), \\ y(\theta) &= 2a\,\text{sen}\,\theta - a\,\text{sen}(2\theta), \qquad 0 \le \theta \le 2\pi. \end{aligned}$$

4.4.3 *Coração*

Finalmente considere as seguintes equações paramétricas:

$$x(\theta) = 16 \operatorname{sen}^3 \theta,$$
$$y(\theta) = 13\cos\theta - 5\cos(2\theta) - 2\cos(3\theta) - \cos(4\theta).$$

Tais equação descrevem o *coração* no plano.



O gráfico dessa curva pode ser verificado no Desmos (é uma calculadora gráfica avançada implementada como um aplicativo da web e um aplicativo móvel escrito em JavaScript).

A curva em Desmos está disponível neste endereço https://www.desmos.com/calculator/cesv2ys7sb.

Exercício 4.2: (Trabalho p/ casa)

- Elimine o parâmetro da curva plana definida pelas seguintes equações paramétricas e descreva o gráfico resultante.

$$x(t) = 2 + \frac{3}{t}, \quad y(t) = t - 1, \qquad 2 \le t \le 6.$$

Resposta: $y = -1 + \frac{3}{x-2}$ - uma hipérbole no plano.

- Encontre dois pares diferentes de equações paramétricas para representar o gráfico de $y = 2x^2 - 3$.

- Encontre dois pares diferentes de equações paramétricas para representar o gráfico de $y = x^2 + 2x$.

- Descreva a curva dada pelas equações paramétricas:

$$x(t) = 3\cos t + \cos 3t, \qquad y(t) = 3 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 3t.$$

Resposta: