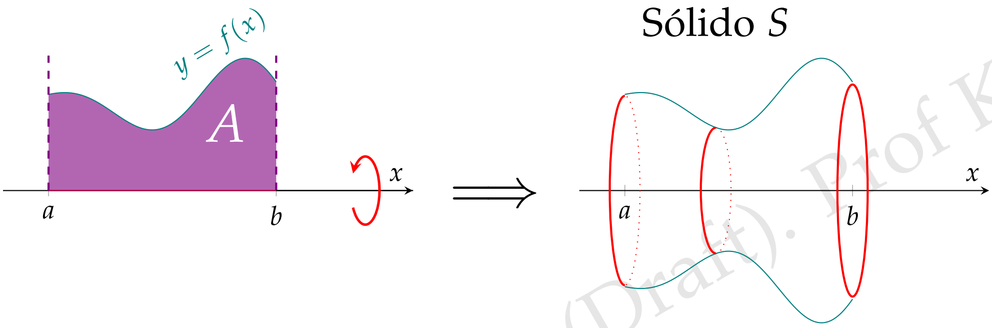
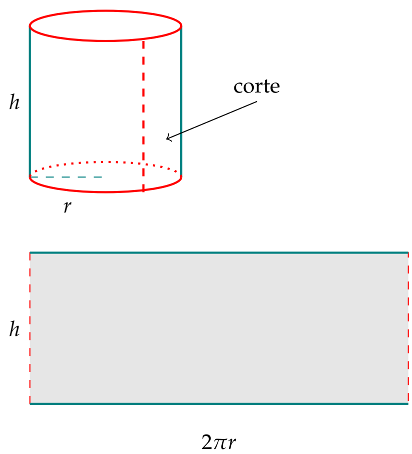
Aula 3. Área da superfície de revolução

A superfície de revolução é formada quando a curva é rotacionada em torno do eixo-x ou eixo-y. Na aula passada vimos que a integral definida é bem útil para calcular os volumes dos sólidos obtidos. Por exemplo, dado o sólido S obtido pela rotação do conjunto A em torno do eixo-x:



O volume $V(S)$ de S pode ser calculado como $V(S) = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$.

Nós queremos de definir a área da superfície de revolução de modo que ela corresponda com a nossa intuição. Se a área de tal superfície é A podemos imaginar que a pintura dessa superfície requer a mesma quantidade de tinta que uma região plana com a mesma área A.

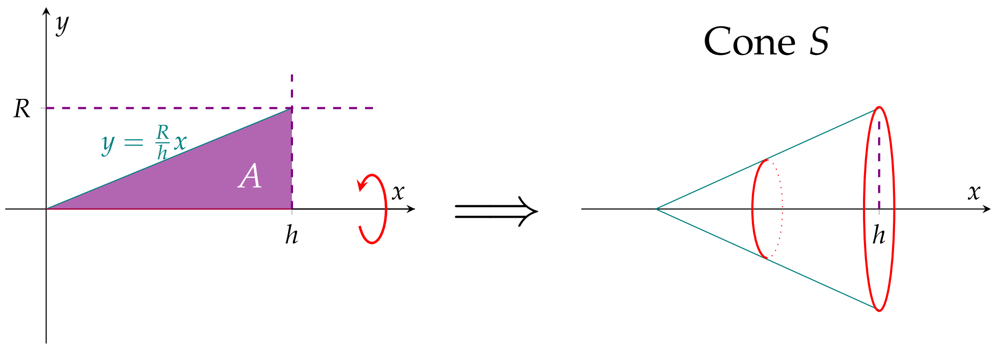


Considere alguns exemplos básicos. A área lateral do cilindro com raio r e altura h é $A = 2\pi rh$, pois podemos imaginar que cortando o cilindro e desenrolando ele obtemos o retângulo com as dimensões $2\pi r$ e h [como na figura do lado].

O primeiro objetivo dessa aula é entender como calcular a área de superfície de revolução. Considere o seguinte exemplo.

Exemplo 3.1

O cone com raio de base R e altura h pode ser obtido como o sólido S rotacionando, em torno de eixo-x, do conjunto A limitado pelas retas $x = 0$, $x = h$, $y = \frac{R}{h}x$. Sua área superficial total (sem a tampa) = $\pi \cdot \sqrt{R^2 + h^2} \cdot R$ (a fórmula que aprendemos na escola).



As áreas superficiais de tais sólidos podem ser calculadas através das seguintes fórmulas:

Área da superfície do sólido obtido pela rotação em torno do eixo-x:

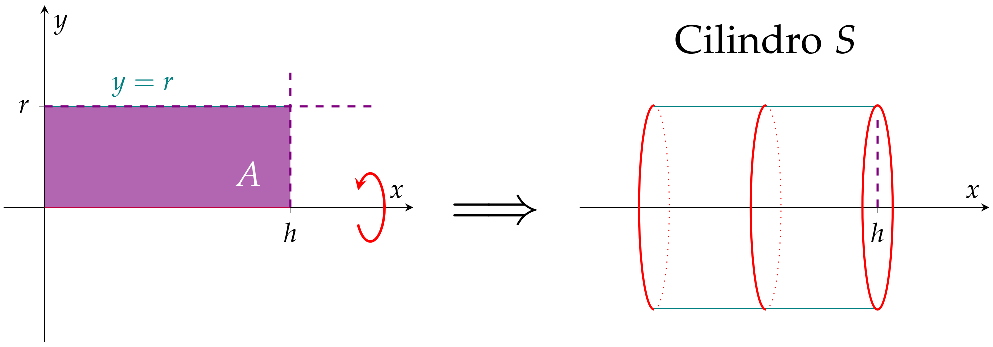
$$\boxed{A(S) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx,} \tag{3.1}$$

Área da superfície do sólido obtido pela rotação em torno do eixo-y:

$$\boxed{A(S) = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.} \tag{3.2}$$

Exemplo 3.2

Observe que o cilindro com raio r pode ser obtido rotacionando o gráfico da função $f(x) = r$ em torno do eixo-x.

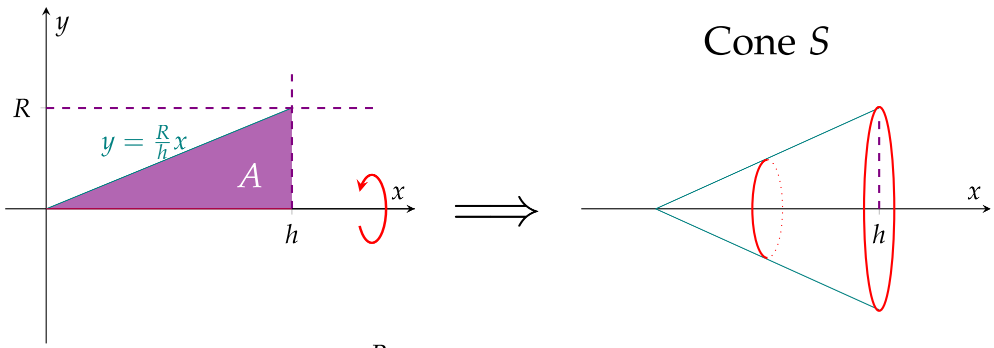


Assim $a = 0$ e $b = h$ e $f'(x) = 0$. Agora, aplicando a fórmula (3.1), temos

$$A(S) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx = 2\pi \int_0^h r\sqrt{1 + 0^2}dx$$
$$= 2\pi r x\Big|_0^h = 2\pi r h.$$

Exemplo 3.3

Voltando para exemplo anterior com o cone, temos que $0 \leq x \leq h$ e $f(x) = \frac{R}{h}x$. Onde h é altura e R é raio da base do cone.



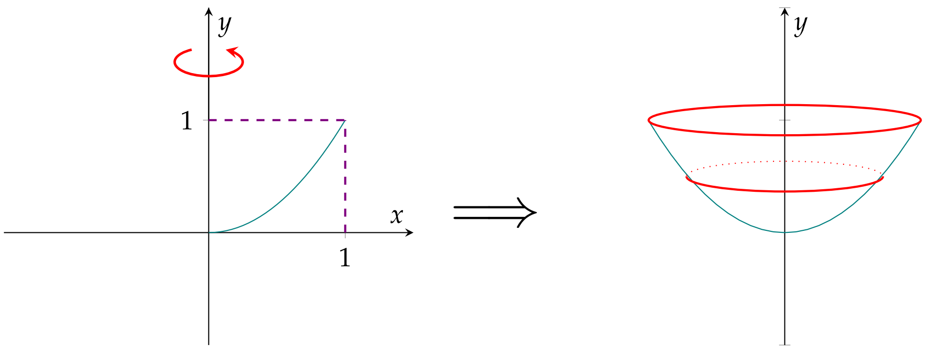
Assim $a = 0$ e $b = h$ e $f'(x) = \frac{R}{h}$. Agora, aplicando a fórmula (3.1), temos

$$A(S) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx = 2\pi \int_0^h \frac{R}{h}x\sqrt{1 + \frac{R^2}{h^2}}dx$$
$$= 2\pi \frac{R}{h}\sqrt{\frac{h^2 + R^2}{h^2}} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^h = 2\pi \frac{R\sqrt{h^2 + R^2}}{h^2} \cdot \frac{h^2}{2} = \pi\sqrt{R^2 + h^2}R.$$

Exatamente o que deve ser seguindo a fórmula do Exemplo 3.1.

Exemplo 3.4

Agora vamos determinar a área superficial do sólido obtido pela rotação em torno do eixo-y do gráfico $y = x^2$ com $0 \leq x \leq 1$.

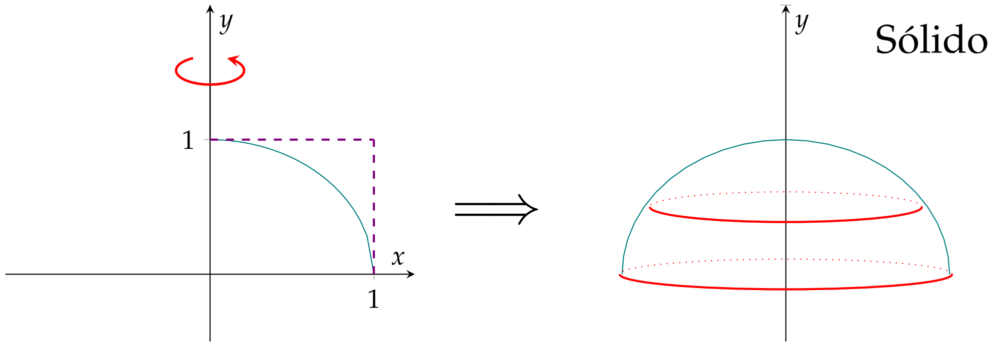


Temos que $a = 0$, $b = 1$, e $f(x) = x^2$. Assim $f'(x) = 2x$ e $f'(x)^2 = 4x^2$. Agora aplicando a fórmula (3.2), temos

$$
\begin{aligned}
A(S) = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}dx &= \left| \begin{array}{c} u = 4x^2 \\ du = 8xdx \end{array} \right| \\
&= \frac{2\pi}{8} \cdot \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}d(4x^2) \\
&= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{(1+4x^2)^{3/2}}{3/2}\Big|_0^1 \\
&= \frac{\pi}{6} \cdot \left[(1+4)^{3/2} - (1)^{3/2}\right] \\
&= \frac{\pi}{6} \cdot \left[5^{3/2} - 1\right] \\
&= \frac{\pi}{6} \cdot \left[\sqrt{125} - 1\right].
\end{aligned}
$$

Exemplo 3.5

Agora vamos determinar a área superficial da semi-esfera com raio 1. Equação da esfera com raio 1 é $x^2 + y^2 = 1$, assim isolando y, vamos considerar a função $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ com $0 \leq x \leq 1$. Rotacionando o gráfico em torno do eixo-y vamos receber:



Assim o sólido obtido é a semi-esfera raio 1. Sabemos que a área superficial da esfera com raio r é $4\pi r^2$, assim a área superficial da semi-esfera com raio 1 é 2π. Vamos ver como obter isso através da fórmula (3.2). Temos que $a = 0$, $b = 1$, e $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Assim $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ e $[f'(x)]^2 = \dfrac{x^2}{1-x^2}$. Agora, aplicando a fórmula (3.2), a área é igual a

$$
\begin{aligned}
A(S) &= 2\pi \cdot \int_0^1 x\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}dx = 2\pi \cdot \int_0^1 x\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}dx \\
&= \left| \begin{aligned} u &= 1-x^2 \\ du &= -2xdx \end{aligned} \right| = -\pi \cdot \int_0^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) \\
&= -\pi \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Big|_0^1 = -\pi \cdot \left[\frac{(1-1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{(1-0)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right] \\
&= -\pi \cdot [0-2] = 2\pi.
\end{aligned}
$$

Exatamente o que deve ser!

Antes de fazer mais um exemplo, vamos resolver o seguinte exercício bastante útil para as contas de certas integrais, que é calcular a integral da função $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

Exercício 3.1

Calcule $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$.

Solução 3.1

Primeiramente, aplicando a troca de variáves $x = \tan u$, vamos receber:

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx = \left| \begin{array}{ll} x = \tan u, & x = 1 \Rightarrow u = \dfrac{\pi}{4} \\ dx = \sec^2 u du, & x = 0 \Rightarrow u = 0 \end{array} \right| = $$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\tan^2 u} \sec^2 u du$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 u du.$$

Agora para integrar $\sec^3 u$ escrevemos $\sec^3 u = \sec u \cdot \sec^2 u$ e aplicamos integração por partes (usando Lembrete do lado).

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec u \cdot \sec^2 u du = \left| \begin{array}{ll} f(u) = \sec u, & f'(u) = \sec u \cdot \tan u \\ g'(u) = \sec^2, & g(u) = \tan u \end{array} \right|$$
$$= \sec u \cdot \tan u \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec u \cdot \tan^2 u du$$
$$= \sec u \cdot \tan u \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec u \cdot (\sec^2 u - 1) du$$
$$= \sec u \cdot \tan u \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 u du + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec u du$$

Assim,

$$2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 u du = \sec u \cdot \tan u \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec u du$$

e, portanto,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 u du = \frac{1}{2}\left[\sec u \cdot \tan u \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \ln|\sec u + \tan u| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right]$$
$$= \frac{1}{2}\Big[[\sqrt{2} \cdot 1 - 1 \cdot 0] + [\ln|\sqrt{2}+1| - \ln|1+0|] \Big]$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\ln|\sqrt{2}+1|}{2}.$$

Observe que proseguindo na mesma maneira, podemos concluir que

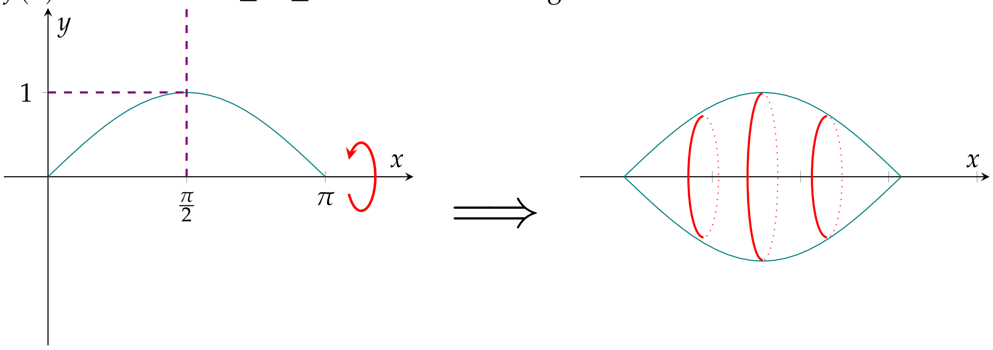
$$\int_{-1}^1 \sqrt{1+x^2}dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 u du = \sqrt{2} + \ln|\sqrt{2}+1|.$$

Lembrete:

1. $(\tan x)' = \sec^2 x,$
2. $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C,$
3. $(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x,$
4. $\tan^2 x = \sec^2 u - 1,$
5. $\tan 0 = 0,\ \tan \frac{\pi}{4} = 1,$
6. $\sec 0 = 1,\ \sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}.$

Exemplo 3.6

Vamos determinar a área superficial do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo-x, da função $f(x) = \operatorname{sen} x$ com $0 \leq x \leq \pi$. Rotacionando o gráfico em torno do eixo-x vamos receber:



Temos que $a = 0$, $b = \pi$, e $f(x) = \operatorname{sen} x$. Assim $f'(x) = \cos x$ e $[f'(x)]^2 = \cos^2 x$. Agora, aplicando a fórmula (3.1), a área é igual a

$$A(S) = 2\pi \cdot \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cdot \sqrt{1+\cos^2 x}dx = \left| \begin{array}{ll} u = \cos x, & x = 0 \Rightarrow u = 1 \\ dx = -\operatorname{sen} x dx, & x = \pi \Rightarrow u = -1 \end{array} \right|$$

$$= 2\pi \cdot \int_1^{-1} \sqrt{1+u^2}(-1)du = 2\pi \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1+u^2}du.$$

Agora aplicando Exercício 3.1 temos

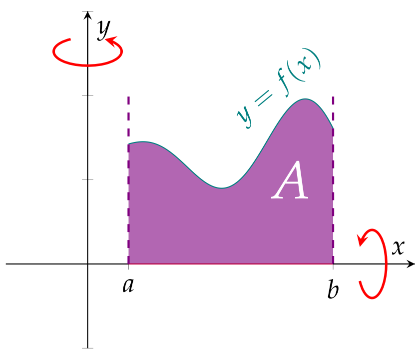
$$A(S) = 2\pi \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1+u^2}du = 2\pi[\sqrt{2} + \ln|\sqrt{2}+1|].$$

3.1 Resumo da aula:

Resumindo o conteúdo dessa aula temos, se

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{c} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{array} \right\}.$$

como na figura do lado.



Assim:

- $2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ — Área da superfície do sólido obtido pela rotação de conjunto A em torno do eixo-x;

- $2\pi \int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$ — Área da superfície do sólido obtido pelo rotação de conjunto A em torno do eixo-y.

Exercício 3.2: (Trabalho p/ casa)

Calcule a área superficial do sólido S obtido pela rotação do gráfico da função $y = f(x)$ para casos de baixo:

(a) $f(x) = e^x$, $0 \leq x \leq 1$, em torno do eixo-x;

Resposta:

$$\pi\left(e\sqrt{e^2+1} + \ln\left(\sqrt{e^2+1}+e\right) - \sqrt{2} - \ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right).$$

(b) $f(x) = 1 - x^2$, $0 \leq x \leq 1$, em torno do eixo-y;

Resposta:

$$\frac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi.$$

(c) $f(x) = x^3$, $0 \leq x \leq 1$, em torno do eixo-x;

Resposta:

$$\frac{10\sqrt{10}-1}{27}\pi.$$

(d) $f(x) = \sqrt{x}$, $4 \leq x \leq 9$, em torno do eixo-x;

Resposta:

$$\frac{37\sqrt{37}-17\sqrt{17}}{6}\pi.$$