

Aula 1. Revisão da integral (definida e indefinida)

1.1 Lembrete sobre a integral

1.1.1 Definições e notações

- Seja $f(x)$ uma função real de uma variável. Uma *primitiva* da $f(x)$ é uma função $F(x)$ cuja derivada $F'(x)$ é igual a $f(x)$, ou seja $F'(x) = f(x)$.
- Integral indefinida* da f é conjunto de todas as primitivas da f .
Notação: $\int f(x)dx = F(x) + C$.
- Integral definida* dada pela fórmula:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

onde $F(x)$ é qualquer primitiva da $f(x)$.

ALGUMAS REGRAS DA INTEGRAÇÃO:

- $\int dx = x + C,$
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$
- $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C,$
- $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C,$
- $\int e^x dx = e^x + C.$

1.1.2 Regras da Integração [Substituição e Integração por partes]

Integração pela substituição:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du,$$

onde $u = g(x)$.

Integração por partes:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

1.2 Exemplos e Exercícios

Exercício 1.1

Calcule

$$\int \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2} dx.$$

Solução 1.1

Temos

$$\int \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2} dx = \int \left[2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right] dx = 2x - 3 \ln |x| - \frac{1}{x} + C.$$

LEMBRETE:

1. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx,$
2. $\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx.$

Exercício 1.2Calcule $\int e^{-x} dx$.**Solução 1.2**

Temos

$$\begin{aligned} \int e^{-x} dx &= \int e^{-x} \cdot (-1) d(-x) = \\ &= - \int e^{-x} d(-x) = \left| u = -x \right| = \\ &= - \int e^u du = -e^u + C = -e^{-x} + C. \end{aligned}$$

Exercício 1.3Calcule $\int (x+2)^{13} dx$.**Solução 1.3**

Temos

$$\begin{aligned} \int (x+2)^{13} dx &= \left| \begin{array}{l} x+2 = u \\ dx = du \end{array} \right| = \\ &= \int u^{13} du = \frac{u^{14}}{14} + C = \frac{(x+2)^{14}}{14} + C. \end{aligned}$$

Exercício 1.4Calcule $\int \sin^2 x \cdot \cos x dx$.

Solução 1.4

Temos

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \sin x \\ du = \cos x dx \end{array} \right| = \\ &= \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C.\end{aligned}$$

Exercício 1.5

Calcule $\int x e^{-x^2} dx$.

Solução 1.5

Temos

$$\begin{aligned}\int x e^{-x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} u = -x^2 \\ du = -2x dx \end{array} \right| = \\ &= -\frac{1}{2} \int e^u du = -\frac{1}{2} e^u + C = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C.\end{aligned}$$

Exercício 1.6

Calcule $\int \frac{1}{x} \cos(\ln x) dx$.

Solução 1.6

Temos

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x} \cos(\ln x) dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x} dx \end{array} \right| = \\ &= \int \cos u du = \sin u + C = \sin(\ln x) + C.\end{aligned}$$

Exercício 1.7

Calcule $\int x \cdot \sin x dx$.

Solução 1.7

Temos

$$\begin{aligned}\int x \cdot \sin x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} f(x) = x & f'(x) = 1 \\ g'(x) = \sin x & g(x) = -\cos x \end{array} \right| = \\ &= -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C.\end{aligned}$$

Exercício 1.8

Calcule $\int x \cdot \ln x \, dx$.

Solução 1.8

Temos

$$\begin{aligned}\int x \cdot \ln x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} f(x) = \ln x & f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) = x & g(x) = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \\ &= \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + C.\end{aligned}$$

Exercício 1.9

Calcule $\int x^2 \cdot e^x \, dx$.

Solução 1.9

Temos

$$\begin{aligned}\int x^2 \cdot e^x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} f(x) = x^2 & f'(x) = 2x \\ g'(x) = e^x & g(x) = e^x \end{array} \right| = \\ &= x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x \, dx = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x + C.\end{aligned}$$

Exercício 1.10

Calcule $\int (t^2 + 1) \cdot \sqrt{t} \, dt$.

Solução 1.10

Temos

$$\begin{aligned}\int (t^2 + 1) \cdot \sqrt{t} \, dt &= \int (t^2 + 1) \cdot t^{\frac{1}{2}} \, dt = \\ &= \int t^{\frac{5}{2}} \, dt + \int t^{\frac{1}{2}} \, dt = 2 \left[\frac{t^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right] + C.\end{aligned}$$

Exercício 1.11Calcule $\int e^x \cdot \sin x \, dx$.**Solução 1.11**

Temos

$$\begin{aligned}\int e^x \cdot \sin x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} f(x) = e^x & f'(x) = e^x \\ g'(x) = \sin x & g(x) = -\cos x \end{array} \right| \\ &= -e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \cos x \, dx = \left| \begin{array}{ll} f(x) = e^x & f'(x) = e^x \\ g'(x) = \cos x & g(x) = \sin x \end{array} \right| \\ &= -e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \sin x \, dx.\end{aligned}$$

Assim temos que

$$\int e^x \cdot \sin x \, dx = \frac{1}{2} [e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x] + C.$$

Exercício 1.12Calcule $\int \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} \, dx$.**Solução 1.12**

Temos

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} \, dx &= \left| \begin{array}{l} u = e^x \\ du = e^x \, dx \end{array} \right| = \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} \\ &= \arcsen u + C = \arcsen(e^x) + C.\end{aligned}$$

MAIS REGRAS DE INTEGRAÇÃO:

7. $\int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + C,$

8. $\int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + C,$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsen x + C,$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsen \frac{x}{a} + C,$

11. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan x + C,$

12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \arctan \frac{x}{a} + C.$

Exercício 1.13

Calcule o valor da integral definida: $\int_0^{\frac{\pi}{3}} [\sen x + \sen 2x] dx$.

Solução 1.13

Temos

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} [\sen x + \sen 2x] dx &= \left(-\cos x - \frac{\cos 2x}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= -\cos \frac{\pi}{3} - \frac{\cos \frac{2\pi}{3}}{2} + \cos 0 + \frac{\cos 0}{2} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Exercício 1.14

Calcule o valor da integral definida: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx$.

Solução 1.14

Temos

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sen^2 x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = (\tan x - x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 1 - \frac{\pi}{4} - 0 = 1 - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Exercício 1.15

Calcule o valor da integral definida: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sen^2 x dx$.

Solução 1.15

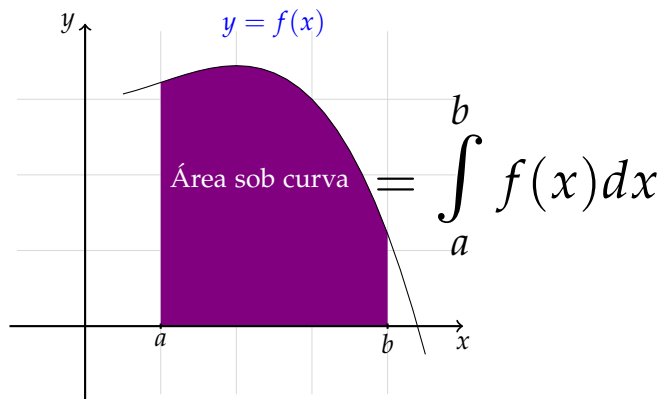
Temos

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

LEMBRETE:

$$1. \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$2. \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

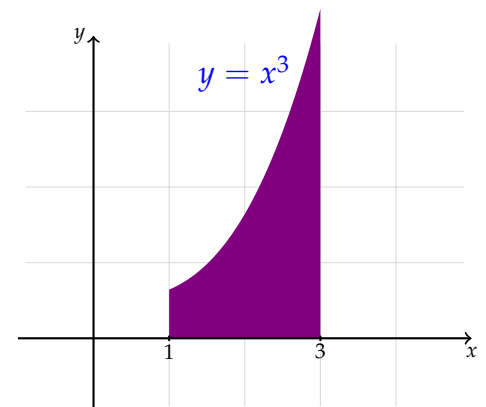
Lembrete**Exercício 1.16**

Calcule a área do conjunto A limitado pelas retas $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$ e pelo gráfico $y = x^3$.

Solução 1.16

Temos

$$\text{Área} = \int_1^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{80}{4} = 20.$$



Exercício 1.17

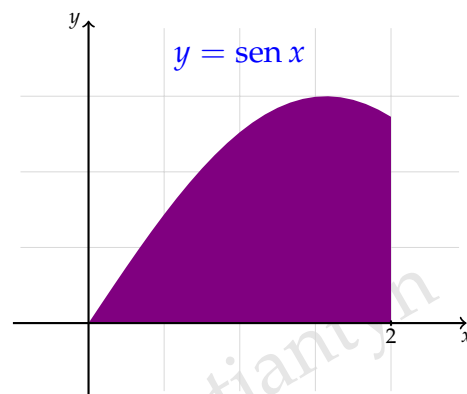
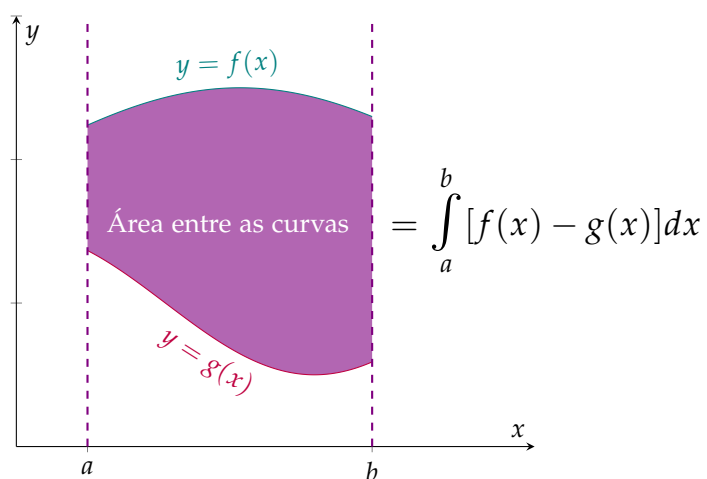
Calcule a área do conjunto

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} 0 \leq y \leq \sin x \\ 0 \leq x \leq 2 \end{array} \right\}.$$

Solução 1.17

Temos

$$\text{Área} = \int_0^2 \sin x dx = -\cos x \Big|_0^2 = 1 - \cos 2.$$

**Lembrete****Exercício 1.18**

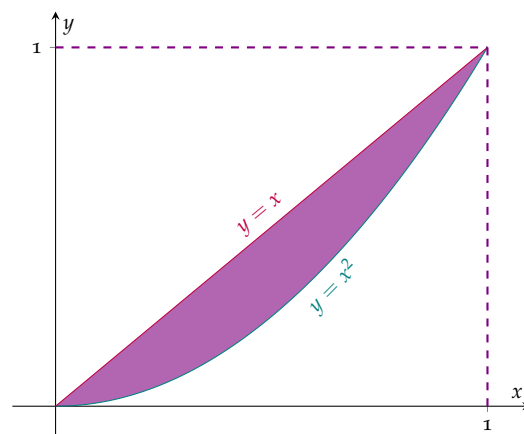
Calcule a área do conjunto

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq x \end{array} \right\}.$$

Solução 1.18

Temos

$$\text{Área} = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$



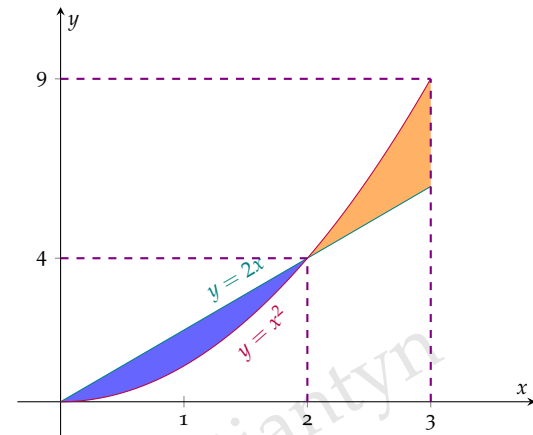
Exercício 1.19

Calcule a área do conjunto delimitado por $0 \leq x \leq 3$, $y = x^2$ e $y = 2x$.

Solução 1.19

Temos

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \text{Área azul} + \text{Área laranja} \\ &= \int_0^2 (2x - x^2)dx + \int_2^3 (x^2 - 2x)dx \\ &= \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_2^3 = \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

**Exercício 1.20: (Trabalho p/ casa)**

Calcule as seguintes integrais:

- (a) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 8}}{x - 1} dx$; **Resp:** $\sqrt{x^2 - 2x - 8} - 3 \arccos(\frac{3}{x-1}) + C$
- (b) $\int x\sqrt{1+2x}dx$, **Resposta:** $\frac{3}{4}x(1+2x)^{\frac{3}{2}} - \frac{15}{16}(1+2x)^{\frac{5}{2}} + C$;
- (c) $\int x^2 \ln x dx$, **Resposta:** $\frac{x^3}{3}(\ln x - \frac{1}{3}) + C$;
- (d) $\int \sin(\ln x) dx$, **Resposta:** $\frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$
- (e) $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$, **Resposta:** $\ln(e^x + 1) + C$.

Exercício 1.21: (Trabalho p/ casa)

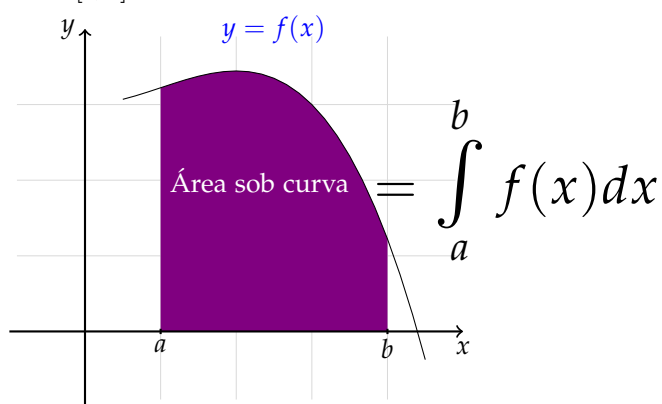
Para os itens abaixo desenhe a região entre as curvas e calcule a área da região:

- (a) $y = x^2$, $y = -x^2 + 8x$; **Resposta:** $\frac{64}{3}$
- (b) $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$, e $x = 3$; **Resposta:** $\ln(3) - \frac{26}{81}$
- (c) $y = \cos x$ e $y = \cos 2x$ em $x \in [-\pi, \pi]$; **Resposta:** $\frac{3}{2}\sqrt{3}$
- (d) $y = e^x$, $y = e^{2x-1}$, e $x = 0$; **Resposta:** $\frac{1}{2}(e + \frac{1}{e}) - 1$
- (e) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = -1$ e $x = 1$; **Resposta:** $2(e + \frac{1}{e} - 2)$.

Aula 2. Volume da revolução

Lembrete

Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$ com $f(x) \geq 0$ para todos $x \in [a, b]$. Assim:

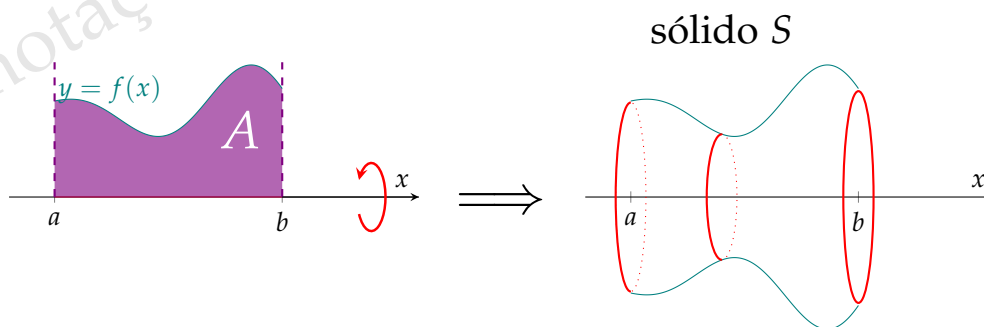


Lembrete. Uma função $f(x)$ é contínua em $[a, b]$ se para todo $x_0 \in [a, b]$ temos que

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

2.1 Volume de sólido obtido pela rotação em torno de eixo- x .

Seja S o sólido obtido pela rotação em torno de eixo x do conjunto A limitado pelas retas: $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e pelo gráfico $y = f(x)$.



Pergunta: Como calcular o volume $V(S)$ do sólido S ?

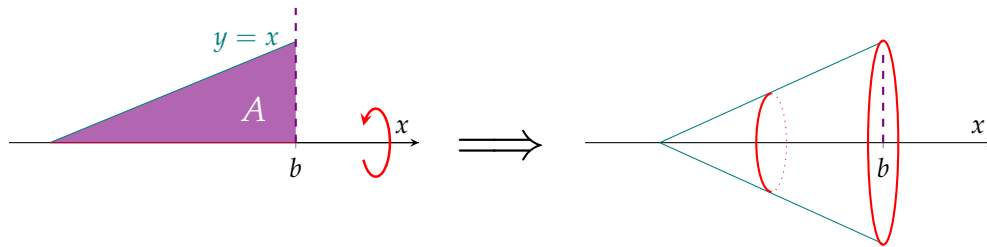
Vale a fórmula:

$$V(S) = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx. \quad (2.1)$$

Exemplo 2.1

Vamos calcular o volume do sólido S obtido pela rotação, em torno de eixo- x , do conjunto A limitado pelas retas:

$$x = 0, \quad x = b, \quad y = x.$$

Sólido S 

Assim o sólido obtido é um cone com o raio $r = b$ e altura $h = b$. Sabemos que o volume do cone pode ser calculado como $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot b^3$. Por outro lado, aplicando a fórmula acima (2.1), o volume do sólido obtido pode ser calculado como

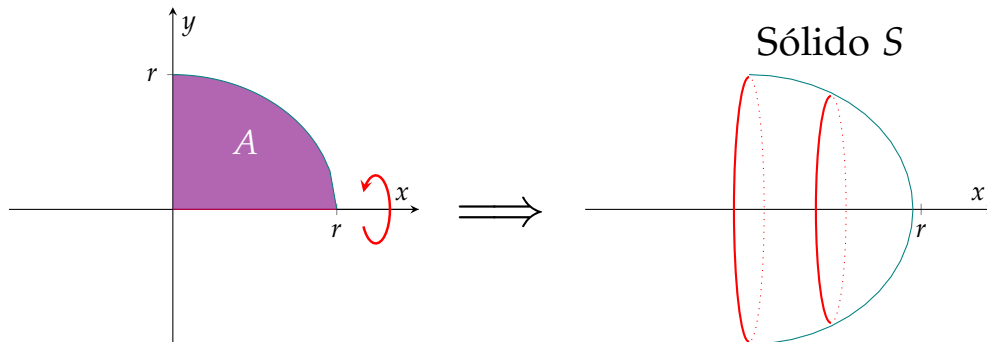
$$V(S) = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^b x^2 dx = \pi \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^b = \frac{1}{3}\pi \cdot b^3.$$

Exemplo 2.2

Vamos calcular o volume do sólido S obtido pela rotação, em torno de eixo- x , do conjunto A dado por:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2, x \geq 0, y \geq 0\},$$

com um raio $r > 0$ fixo.



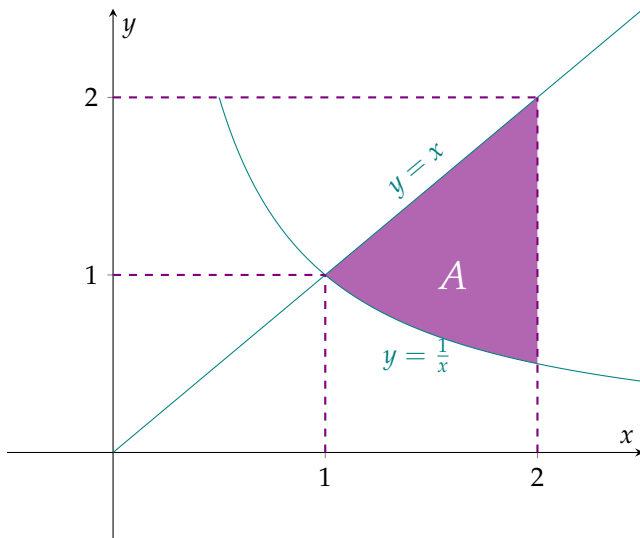
Assim o sólido obtido é semi-esfera raio r . Sabemos que o volume dela é $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\pi r^3$. Por outro lado, aplicando a fórmula acima (2.1), o volume do sólido obtido pode ser calculado como

$$V(S) = \pi \int_0^r y^2 dx = \pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \pi \cdot \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right] \Big|_0^r = \pi \cdot \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{2}{3}\pi r^3.$$

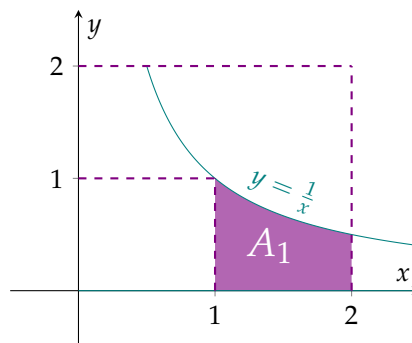
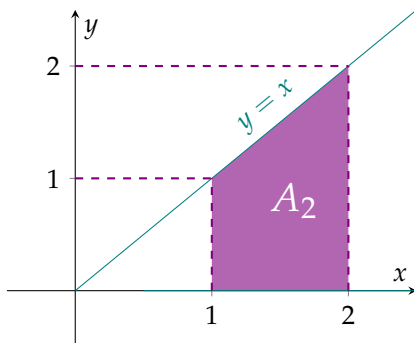
Exemplo 2.3

Suponha que o sólido S obtido pela rotação, em torno de eixo- x , do conjunto A de todos os pares (x, y) tais que

$$\frac{1}{x} \leq y \leq x, \quad 1 \leq x \leq 2.$$



Temos que o volume do sólido $V(S)$ pode ser obtido como $V(S_2) - V(S_1)$, onde S_1 , e S_2 são os sólidos de rotação dos conjuntos A_1 e A_2 (respectivamente) abaixo.



Aplicando a fórmula acima (2.1), temos

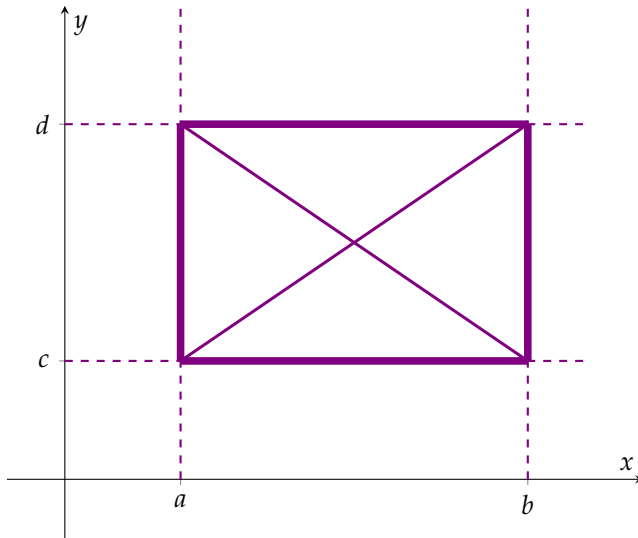
$$V(S_2) = \pi \int_1^2 x^2 dx = \frac{7}{3}\pi, \quad V(S_1) = \pi \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Assim

$$V(S) = V(S_2) - V(S_1) = \frac{7\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{11\pi}{6}.$$

Exemplo 2.4

Considere o retângulo abaixo. Suponha que ponto P é a interseção das diagonais do retângulo.



Vamos mostrar que o volume do sólido obtido pela rotação igual a

$$(b-a) \cdot (d-c) \cdot \pi \cdot (d+c),$$

Observe que $(b-a) \cdot (d-c)$ é área do retângulo e $\pi \cdot (d+c)$ é comprimento da circunferência gerada pela rotação do ponto P . De fato, temos que

$$V = \pi \int_a^b d^2 dx - \pi \int_a^b c^2 dx = \pi \cdot (d^2 - c^2)(b-a) = \pi \cdot (d+c) \cdot (d-c) \cdot (b-a).$$

Exercício 2.1

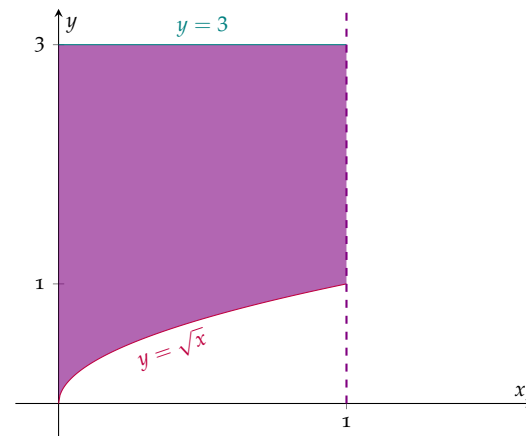
Calcule o volume do sólido S obtido pela rotação em torno do eixo- x do conjunto A de todos os pares (x, y) tais que

$$0 \leq x \leq 1, \quad \sqrt{x} \leq y \leq 3.$$

Solução 2.1

Proseguindo na mesma maneira como no Exemplo 2.2 temos

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 [3^2 - (\sqrt{x})^2] dx = \pi \int_0^1 [9 - x] dx \\ &= \pi \left(9x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \pi \left(9 - \frac{1}{2} \right) = \frac{17\pi}{2}. \end{aligned}$$



Exercício 2.2

Calcule o volume do sólido S obtido pela rotação em torno do eixo- x do conjunto A de todos os pares (x, y) tais que

$$0 \leq x \leq 1, \quad x^2 \leq y \leq x.$$

Solução 2.2

Proseguindo na mesma maneira como no Exemplo 2.2 temos

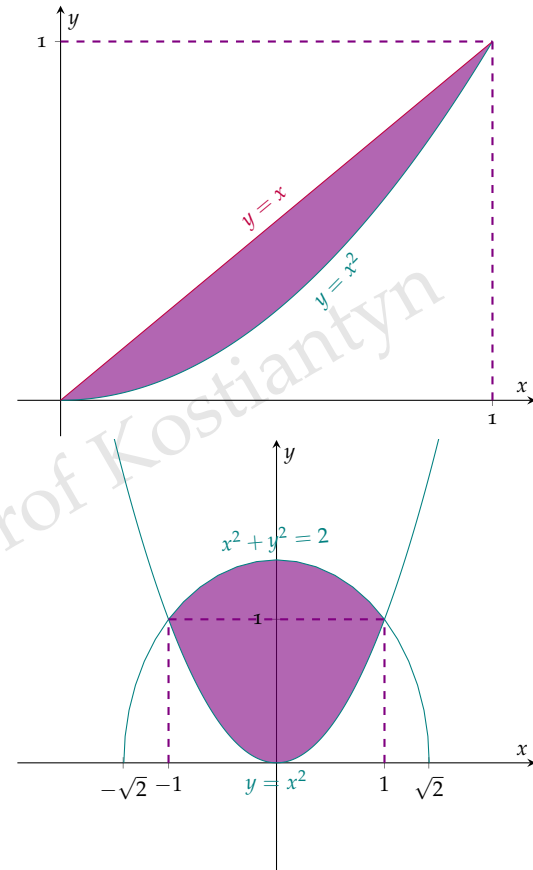
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 [x^2 - x^4] dx = \\ &= \pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{2\pi}{15}. \end{aligned}$$

Exercício 2.3: (Trabalho p/ casa)

Calcule o volume do sólido S obtido pela rotação em torno do eixo- x do conjunto A de todos os pares (x, y) tais que

$$y \geq x^2, \quad x^2 + y^2 \leq 2.$$

Resposta: $\frac{44\pi}{15}.$

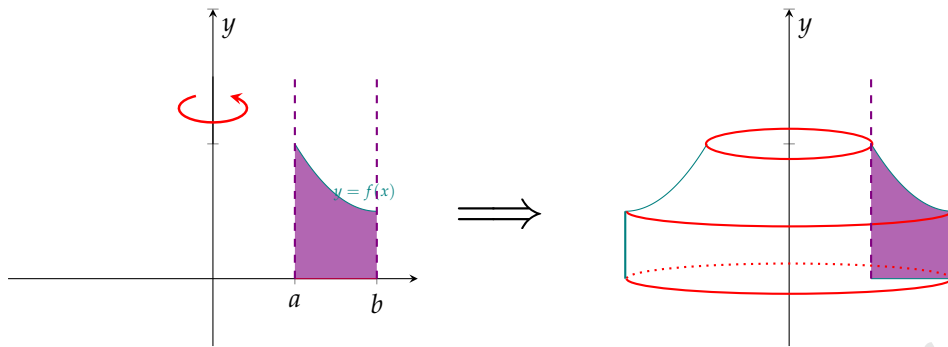


2.2 Volume do sólido obtido pela rotação em torno de eixo- y .

Suponha que $f(x) \geq 0$ é uma função contínua em $[a, b]$ com $a > 0$.
Seja A o conjunto do plano de todos os pares (x, y) tais que

$$a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq f(x).$$

Seja S o conjunto obtido pela rotação em torno do eixo- y , do conjunto A .



Assim o volume do S pode ser obtido como:

$$V(S) = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx. \quad (2.2)$$

Exemplo 2.5

Suponha que o sólido obtido pela rotação em torno do eixo- y do conjunto A de todos (x, y) tais que

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x - x^3.$$

Assim, aplicando a fórmula (2.2) o volume $V(S)$ é

$$V(S) = 2\pi \cdot \int_0^1 x \cdot (x - x^3) = 2\pi \cdot \int_0^1 (x^2 - x^4) = 2\pi \cdot \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{4\pi}{15}.$$

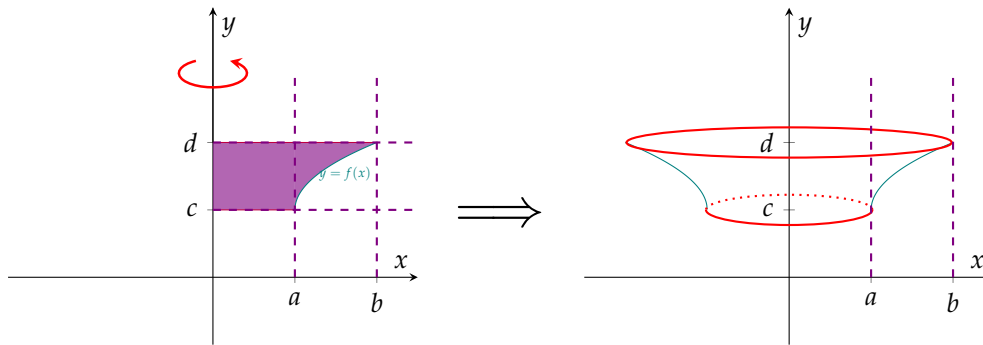
Seja agora B o seguinte conjunto

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d \right\},$$

onde $f(x)$ uma função estritamente crescente em $[a, b]$ com $f(a) = c$ e $f(b) = d$. Suponha que o sólido S é obtido pela rotação do B em torno do eixo- y , como na figura de baixo:

Lembrete. Uma função $f(x)$ é estritamente crescente em $[a, b]$ se para todos $x_1, x_2 \in [a, b]$ com $x_1 < x_2$ temos que

$$f(x_1) < f(x_2).$$



Assim o volume $V(S)$ do sólido S obtido pode ser calculado como:

$$V(S) = \pi \int_c^d x^2 dy, \quad (2.3)$$

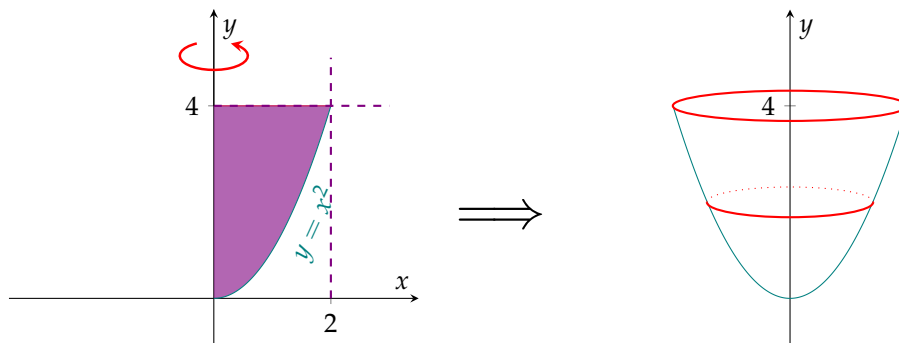
onde $x = g(y)$ e g é função inversa da função f (isto é $f(g(x)) = x$ e $g(f(x)) = x$).

Exemplo 2.6

Suponha que

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq 4, \quad x \geq 0\}.$$

Neste caso temos



Temos que $f(x) = x^2$ (ou $y = x^2$) assim a função inversa é $g(y) = \sqrt{y}$ (ou $x = \sqrt{y}$). Portanto o volume é calculado (através da fórmula (2.3)) como

$$V(S) = \pi \int_0^4 x^2 dy = \pi \int_0^4 [\sqrt{y}]^2 dy = \pi \int_0^4 y dy = 8\pi.$$

Observação 2.1

Observe que o volume acima poderia ter sido calculado usando a fórmula (2.2). Neste caso temos que

$$V(S) = V(S_1) - V(S_2),$$

onde

- S_1 é sólido obtido pela rotação do retângulo 2×4 em torno do eixo y
- S_2 é sólido obtido pela rotação do conjunto

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x^2, \quad 0 \leq x \leq 4\}.$$

em torno do eixo y .

Obviamente o volume do S_1 é $\pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi$. Assim, aplicando a fórmula (2.2) temos

$$V(S) = 16\pi - 2\pi \int_0^2 x \cdot f(x)^2 dx = 16\pi - 2\pi \int_0^2 x \cdot x^2 dx = 16\pi - 2\pi \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = 8\pi.$$

Exemplo 2.7

Suponha que

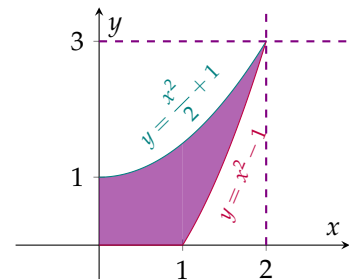
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq \frac{x^2}{2} + 1, \quad y \geq x^2 - 1\}.$$

Podemos calcular o volume aplicando a fórmula (2.2) ou a fórmula (2.3).

Método 1 (aplicando (2.2)):

Temos

$$V(S) = 2 \cdot \pi \int_0^2 x \cdot \left(\frac{x^2}{2} + 1\right) dx - 2 \cdot \pi \int_0^2 x \cdot (x^2 - 1) dx = \frac{7\pi}{2}.$$



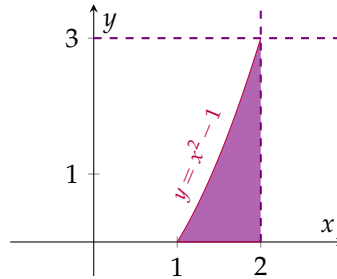
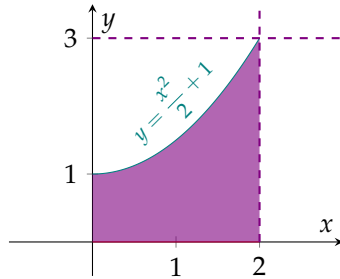
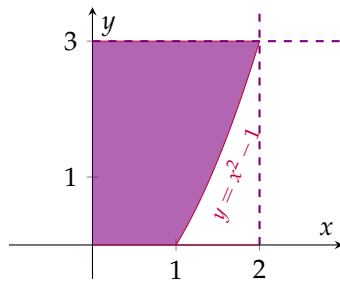
Método 2 (aplicando (2.3)):

Se $y = \frac{x^2}{2} + 1$ assim $x = \sqrt{2y - 2}$ e se $y = x^2 - 1$, assim $x = \sqrt{y + 1}$. Portanto, temos

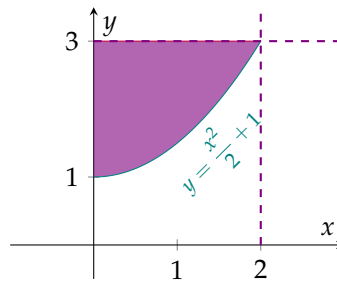
$$\begin{aligned} V(S) &= \pi \int_0^3 x \cdot (y + 1) dy - \pi \int_1^3 x \cdot (2y - 2) dy \\ &= \pi \left[\left(\frac{y^2}{2} + y \right) \Big|_0^3 - \left(y^2 - 2y \right) \Big|_1^3 \right] \\ &= \pi \left[\frac{9}{2} + 3 - (9 - 6 - 1 + 2) \right] = \frac{7}{2} \pi. \end{aligned}$$

Observação 2.2

Graficamente os métodos do último exemplo podem ser apresentados como:

Método 1:**Método 2:**

—

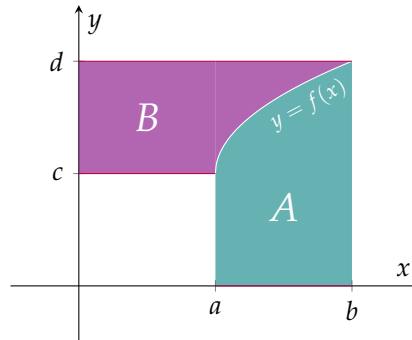
**2.3 Resumo da aula:**

Resumindo o conteúdo dessa aula temos, se

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{array} \right\},$$

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{array} \right\},$$

como na figura do lado.



Assim:

- $\pi \int_a^b y^2 dx$ — o volume do sólido obtido pela rotação de conjunto A em torno do eixo- x ;
- $\pi \int_c^d x^2 dy$ — o volume do sólido obtido pela rotação de conjunto B em torno do eixo- y ;
- $2\pi \int_a^b xy dx$ — o volume do sólido obtido pela rotação de conjunto A em torno do eixo- y ;

- $2\pi \int_c^d yx dx$ — o volume do sólido obtido pela rotação de conjunto B em torno do eixo- x ,

onde $y = f(x)$ e $x = g(y)$ é função inversa da $f(x)$.

Exercício 2.4: (Trabalho p/ casa)

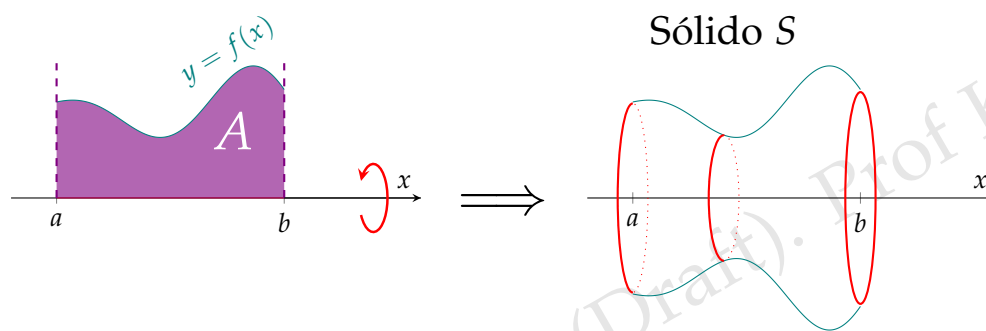
Calcule o volume do sólido S obtido pela rotação em torno do eixo- y para cada conjunto A de baixo:

- (a) $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} 0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \sin x \end{array} \right\}$, **Resposta:** $2\pi^2$.
- (b) $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \leq x \leq \sqrt{y} \right\}$, **Resposta:** $\frac{3}{10}\pi$.
- (c) $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq x^2 + 1 \end{array} \right\}$, **Resposta:** $\frac{\pi}{3}$.

Anotações MAT3210 (Draft). Prof Kostiantyn

Aula 3. Área da superfície de revolução

A superfície de revolução é formada quando a curva é rotacionada em torno do eixo- x ou eixo- y . Na aula passada vimos que a integral definida é bem útil para calcular os volumes dos sólidos obtidos. Por exemplo, dado o sólido S obtido pela rotação do conjunto A em torno do eixo- x :

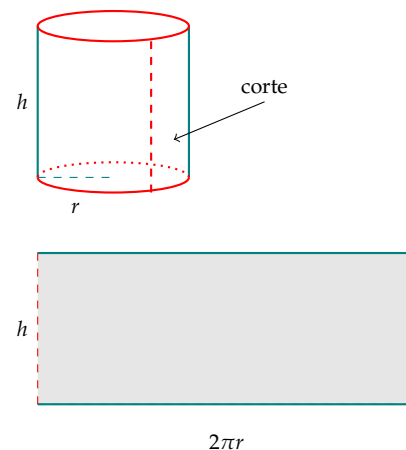


O volume $V(S)$ de S pode ser calculado como $V(S) = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$.

Nós queremos definir a área da superfície de revolução de modo que ela corresponda com a nossa intuição. Se a área de tal superfície é A podemos imaginar que a pintura dessa superfície requer a mesma quantidade de tinta que uma região plana com a mesma área A .

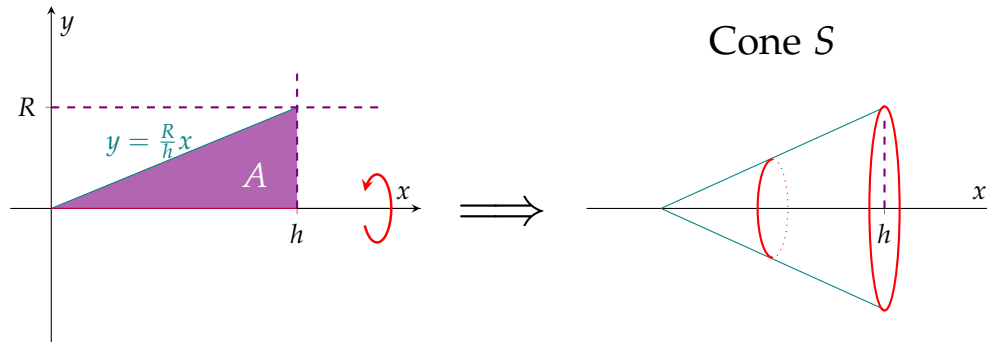
Considere alguns exemplos básicos. A área lateral do cilindro com raio r e altura h é $A = 2\pi rh$, pois podemos imaginar que cortando o cilindro e desenrolando ele obtemos o retângulo com as dimensões $2\pi r$ e h [como na figura do lado].

O primeiro objetivo dessa aula é entender como calcular a área de superfície de revolução. Considere o seguinte exemplo.



Exemplo 3.1

O cone com raio de base R e altura h pode ser obtido como o sólido S rotacionando, em torno de eixo- x , do conjunto A limitado pelas retas $x = 0$, $x = h$, $y = \frac{R}{h}x$. Sua área superficial total (sem a tampa) = $\pi \cdot \sqrt{R^2 + h^2} \cdot R$ (a fórmula que aprendemos na escola).



As áreas superficiais de tais sólidos podem ser calculadas através das seguintes fórmulas:

Área da superfície do sólido obtido pela rotação em torno do eixo- x :

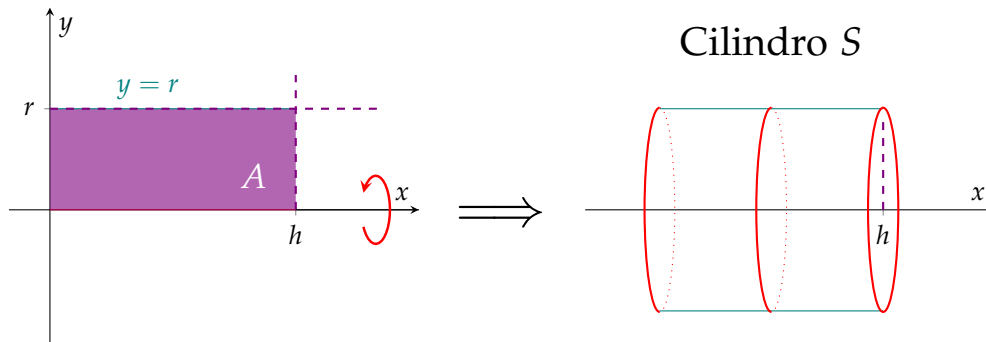
$$A(S) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx, \quad (3.1)$$

Área da superfície do sólido obtido pela rotação em torno do eixo- y :

$$A(S) = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (3.2)$$

Exemplo 3.2

Observe que o cilindro com raio r pode ser obtido rotacionando o gráfico da função $f(x) = r$ em torno do eixo- x .

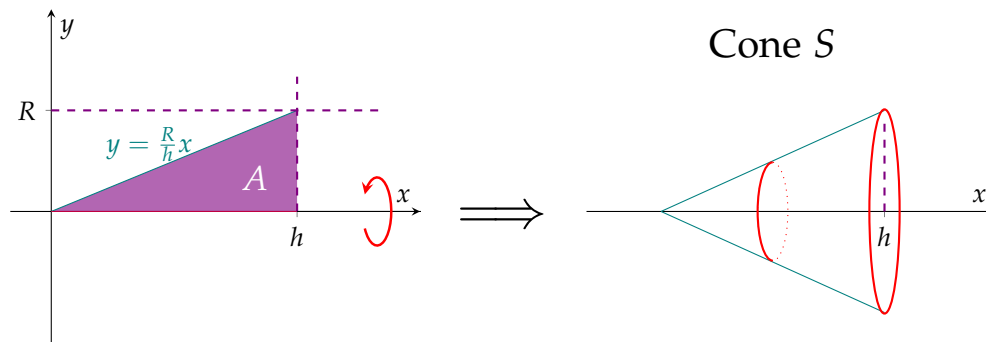


Assim $a = 0$ e $b = h$ e $f'(x) = 0$. Agora, aplicando a fórmula (3.1), temos

$$\begin{aligned} A(S) &= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = 2\pi \int_0^h r \sqrt{1 + 0^2} dx \\ &= 2\pi r x \Big|_0^h = 2\pi r h. \end{aligned}$$

Exemplo 3.3

Voltando para exemplo anterior com o cone, temos que $0 \leq x \leq h$ e $f(x) = \frac{R}{h}x$. Onde h é altura e R é raio da base do cone.



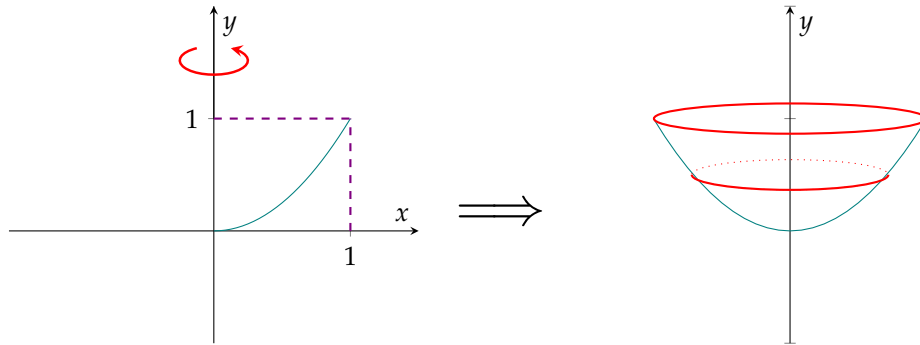
Assim $a = 0$ e $b = h$ e $f'(x) = \frac{R}{h}$. Agora, aplicando a fórmula (3.1), temos

$$\begin{aligned} A(S) &= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = 2\pi \int_0^h \frac{R}{h} x \sqrt{1 + \frac{R^2}{h^2}} dx \\ &= 2\pi \frac{R}{h} \sqrt{\frac{h^2 + R^2}{h^2}} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^h = 2\pi \frac{R \sqrt{h^2 + R^2}}{h^2} \cdot \frac{h^2}{2} = \pi \sqrt{R^2 + h^2} R. \end{aligned}$$

Exatamente o que deve ser seguindo a fórmula do Exemplo 3.1.

Exemplo 3.4

Agora vamos determinar a área superficial do sólido obtido pela rotação em torno do eixo-y do gráfico $y = x^2$ com $0 \leq x \leq 1$.

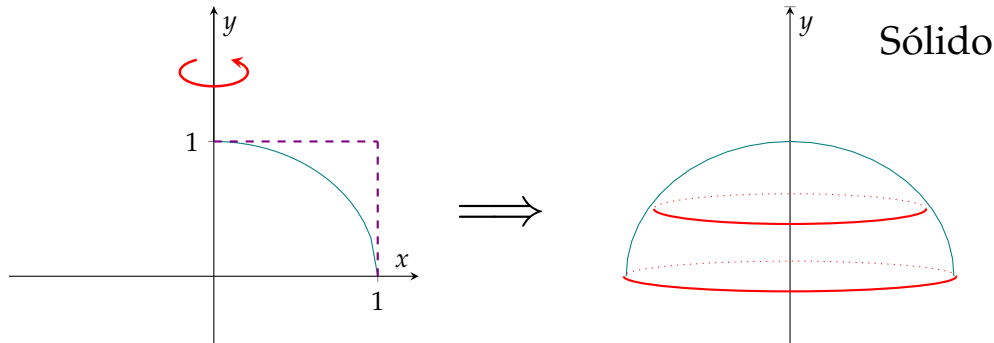


Temos que $a = 0$, $b = 1$, e $f(x) = x^2$. Assim $f'(x) = 2x$ e $f'(x)^2 = 4x^2$. Agora aplicando a fórmula (3.2), temos

$$\begin{aligned}
 A(S) &= 2\pi \int_0^1 x \sqrt{1 + 4x^2} dx = \left| \begin{array}{l} u = 4x^2 \\ du = 8x dx \end{array} \right| \\
 &= \frac{2\pi}{8} \cdot \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} d(4x^2) \\
 &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{(1 + 4x^2)^{3/2}}{3/2} \Big|_0^1 \\
 &= \frac{\pi}{6} \cdot [(1 + 4)^{3/2} - (1)^{3/2}] \\
 &= \frac{\pi}{6} \cdot [5^{3/2} - 1] \\
 &= \frac{\pi}{6} \cdot [\sqrt{125} - 1].
 \end{aligned}$$

Exemplo 3.5

Agora vamos determinar a área superficial da semi-esfera com raio 1. Equação da esfera com raio 1 é $x^2 + y^2 = 1$, assim isolando y , vamos considerar a função $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ com $0 \leq x \leq 1$. Rotacionando o gráfico em torno do eixo-y vamos receber:



Assim o sólido obtido é a semi-esfera raio 1. Sabemos que a área superficial da esfera com raio r é $4\pi r^2$, assim a área superficial da semi-esfera com raio 1 é 2π . Vamos ver como obter isso através da fórmula (3.2). Temos que $a = 0$, $b = 1$, e $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Assim $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$ e $[f'(x)]^2 = \frac{x^2}{1 - x^2}$. Agora, aplicando a fórmula (3.2), a área é igual a

$$\begin{aligned} A(S) &= 2\pi \cdot \int_0^1 x \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}} dx = 2\pi \cdot \int_0^1 x \sqrt{\frac{1}{1 - x^2}} dx \\ &= \left| \begin{array}{l} u = 1 - x^2 \\ du = -2x dx \end{array} \right| = -\pi \cdot \int_0^1 (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1 - x^2) \\ &= -\pi \cdot \frac{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Big|_0^1 = -\pi \cdot \left[\frac{(1 - 1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{(1 - 0)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right] \\ &= -\pi \cdot [0 - 2] = 2\pi. \end{aligned}$$

Exatamente o que deve ser!

Antes de fazer mais um exemplo, vamos resolver o seguinte exercício bastante útil para as contas de certas integrais, que é calcular a integral da função $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$.

Exercício 3.1

Calcule $\int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx$.

Solução 3.1

Primeiramente, aplicando a troca de variáveis $x = \tan u$, vamos receber:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx &= \left| \begin{array}{ll} x = \tan u, & x = 1 \Rightarrow u = \frac{\pi}{4} \\ dx = \sec^2 u du, & x = 0 \Rightarrow u = 0 \end{array} \right| = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\tan^2 u} \sec^2 u du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 u du.\end{aligned}$$

Agora para integrar $\sec^3 u$ escrevemos $\sec^3 u = \sec u \cdot \sec^2 u$ e aplicamos integração por partes (usando Lembrete do lado).

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec u \cdot \sec^2 u du &= \left| \begin{array}{ll} f(u) = \sec u, & f'(u) = \sec u \cdot \tan u \\ g'(u) = \sec^2 u, & g(u) = \tan u \end{array} \right| \\ &= \sec u \cdot \tan u \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec u \cdot \tan^2 u du \\ &= \sec u \cdot \tan u \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec u \cdot (\sec^2 u - 1) du \\ &= \sec u \cdot \tan u \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 u du + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec u du\end{aligned}$$

Assim,

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 u du = \sec u \cdot \tan u \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec u du$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 u du &= \frac{1}{2} \left[\sec u \cdot \tan u \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \ln |\sec u + \tan u| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[[\sqrt{2} \cdot 1 - 1 \cdot 0] + [\ln |\sqrt{2} + 1| - \ln |1 + 0|] \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\ln |\sqrt{2} + 1|}{2}.\end{aligned}$$

Observe que proseguindo na mesma maneira, podemos concluir que

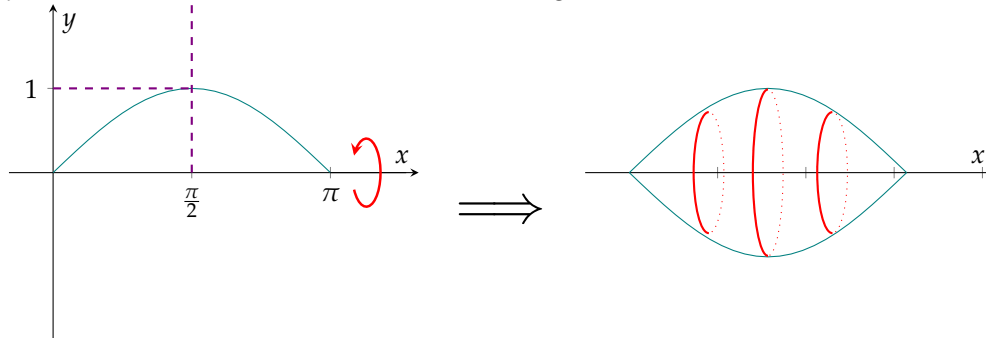
$$\int_{-1}^1 \sqrt{1+x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 u du = \sqrt{2} + \ln |\sqrt{2} + 1|.$$

LEMBRETE:

1. $(\tan x)' = \sec^2 x$,
2. $\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$,
3. $(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$,
4. $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$,
5. $\tan 0 = 0$, $\tan \frac{\pi}{4} = 1$,
6. $\sec 0 = 1$, $\sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$.

Exemplo 3.6

Vamos determinar a área superficial do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo- x , da função $f(x) = \sin x$ com $0 \leq x \leq \pi$. Rotacionando o gráfico em torno do eixo- x vamos receber:



Temos que $a = 0$, $b = \pi$, e $f(x) = \sin x$. Assim $f'(x) = \cos x$ e $[f'(x)]^2 = \cos^2 x$. Agora, aplicando a fórmula (3.1), a área é igual a

$$\begin{aligned} A(S) &= 2\pi \cdot \int_0^{\pi} \sin x \cdot \sqrt{1 + \cos^2 x} dx = \left| \begin{array}{ll} u = \cos x, & x = 0 \Rightarrow u = 1 \\ dx = -\sin x dx, & x = \pi \Rightarrow u = -1 \end{array} \right| \\ &= 2\pi \cdot \int_1^{-1} \sqrt{1 + u^2} (-1) du = 2\pi \cdot \int_{-1}^1 \sqrt{1 + u^2} du. \end{aligned}$$

Agora aplicando Exercício 3.1 temos

$$A(S) = 2\pi \cdot \int_{-1}^1 \sqrt{1 + u^2} du = 2\pi [\sqrt{2} + \ln |\sqrt{2} + 1|].$$

3.1 Resumo da aula:

Resumindo o conteúdo dessa aula temos, se

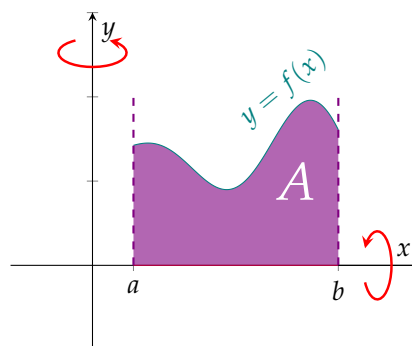
$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{array} \right\}.$$

como na figura do lado.

Assim:

- $2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$ — Área da superfície do sólido obtido pela rotação de conjunto A em torno do eixo- x ;

- $2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$ — Área da superfície do sólido obtido pela rotação de conjunto A em torno do eixo- y .



Exercício 3.2: (Trabalho p/ casa)

Calcule a área superficial do sólido S obtido pela rotação do gráfico da função $y = f(x)$ para casos de baixo:

- (a) $f(x) = e^x$, $0 \leq x \leq 1$, em torno do eixo- x ;

Resposta:

$$\pi \left(e\sqrt{e^2 + 1} + \ln \left(\sqrt{e^2 + 1} + e \right) - \sqrt{2} - \ln \left(\sqrt{2} + 1 \right) \right).$$

- (b) $f(x) = 1 - x^2$, $0 \leq x \leq 1$, em torno do eixo- y ;

Resposta:

$$\frac{5\sqrt{5} - 1}{6} \pi.$$

- (c) $f(x) = x^3$, $0 \leq x \leq 1$, em torno do eixo- x ;

Resposta:

$$\frac{10\sqrt{10} - 1}{27} \pi.$$

- (d) $f(x) = \sqrt{x}$, $4 \leq x \leq 9$, em torno do eixo- x ;

Resposta:

$$\frac{37\sqrt{37} - 17\sqrt{17}}{6} \pi.$$

Aula 4. Curvas definidas por equações paramétricas

Nesta aula, examinaremos as equações paramétricas e seus gráficos. No sistema de coordenadas cartesianas planas, as equações paramétricas *são úteis* para descrever curvas que não são necessariamente funções. O parâmetro é uma variável independente de x e y e, à medida que o parâmetro aumenta, os valores de x e y traçam um caminho ao longo de uma curva plana. Por exemplo, se o parâmetro for t (uma escolha comum), então t pode representar o tempo. Então x e y são definidos como funções do tempo, e $(x(t), y(t))$ pode descrever a posição no plano de um dado objeto conforme ele se move ao longo de um caminho curvo.

4.1 Equações paramétricas e seus gráficos

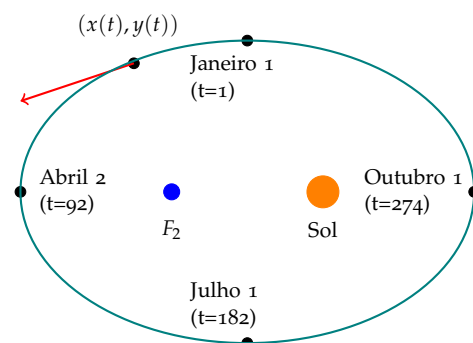
Considere a órbita da Terra em torno do Sol. Nosso ano dura 365 dias. Em 1-ro de janeiro de cada ano, a localização física da Terra em relação ao Sol é quase a mesma, exceto nos anos bissextos, quando a defasagem introduzida pelos 14 dias extras de órbita é inserida no calendário. Chamamos 1-ro de janeiro de “dia 1” do ano. Então, por exemplo, o dia 31 é 31 de janeiro, o dia 59 é 28 de fevereiro e assim por diante.

O número do dia em um ano pode ser considerado uma variável que determina a posição da Terra em sua órbita. À medida que a Terra gira em torno do Sol, sua localização física muda em relação ao Sol. Após um ano inteiro, estamos de volta ao ponto de partida e um novo ano começa. De acordo com as leis de movimento planetário de Kepler, a forma da órbita é elíptica, com o Sol em um dos focos da elipse.

A imagem do lado descreve a órbita da Terra em torno do Sol durante um ano. O ponto identificado como F_2 é um dos focos da elipse; o outro foco é ocupado pelo sol. Se sobrepormos eixos de coordenadas neste gráfico, podemos atribuir pares ordenados a cada ponto da elipse. Então, cada valor de x no gráfico é um valor de posição em função do tempo, e cada valor de y também é um valor de posição em função do tempo. Portanto, cada ponto no gráfico corresponde a um valor da posição da Terra em função do tempo.



Johannes Kepler (1571–1630)



Definição: Equações Paramétricas

Se x e y são funções contínuas de t num intervalo I , então as equações

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

são chamadas de *equações paramétricas* e t é chamado de *parâmetro*. O conjunto de pontos (x, y) obtido conforme t varia no intervalo I é chamado de *gráfico das equações paramétricas*.

Exemplo 4.1

Considere a curva dada pela equação

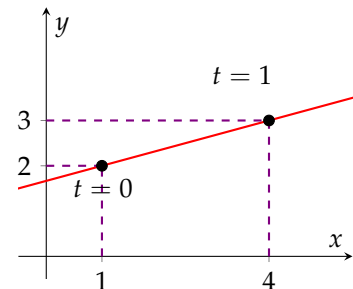
$$x(t) = 1 + 3t, \quad y(t) = 2 + t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para desenhar o gráfico desta curva, primeiro configure uma tabela de valores. Como a variável independente em $x(t)$ e $y(t)$ é t , deixe t aparecer na primeira coluna. Então $x(t)$ e $y(t)$ aparecerão na segunda e terceira colunas da tabela.

t	x	y
0	1	2
1	4	3
2	7	4
-1	-2	1

Assim, recebemos que a trajetória da curva é uma reta no plano. Neste caso podemos receber a equação da reta explicitamente. Observe que $y = 2 + t$ implica que $t = y - 2$, assim $x = 1 + 3t$ implica que $x = 1 + 3(y - 2)$, ou seja, a equação da reta é:

$$x - 3y + 5 = 0.$$



Exemplo 4.2

Suponha dada a reta $y = 1 + 2x$. A gente pode encontrar várias parametrizações para ela. Por exemplo:

$$x(t) = t, \quad y(t) = 1 + 2t, \quad t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização. Mas tem várias outras, por exemplo:

$$x(t) = -t, \quad y(t) = 1 - 2t, \quad t \in \mathbb{R},$$

e

$$x(t) = 2t, \quad y(t) = 1 + 4t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

mais 2 parametrizações que diferem no sentido e velocidade de percurso da curva.

4.2 Eliminação do parâmetro

Para entender melhor o gráfico de uma curva representada parametricamente, é útil reescrever as duas equações como uma única equação relacionando as variáveis x e y (como a gente fez no Exemplo 4.1). Então podemos aplicar qualquer conhecimento prévio de equações de curvas no plano para identificar a curva. Por exemplo, suponha dadas as equações que descrevem a curva plana:

$$x(t) = t^2 - 3 \quad y(t) = 2t + 1 \quad (4.1)$$

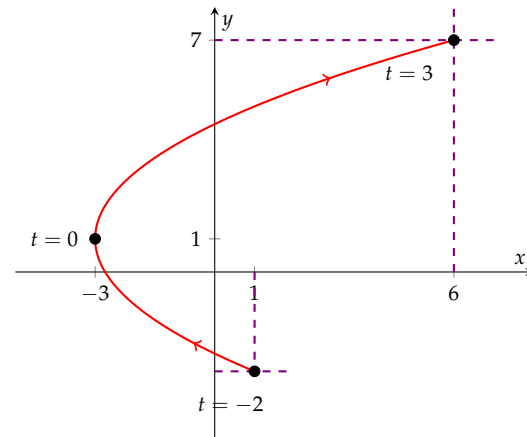
com $-2 \leq t \leq 3$. Resolvendo a Equação (4.1) para t dá

$$t = \frac{y-1}{2}. \quad (4.2)$$

Isso pode ser substituído na Equação (4.1)

$$\begin{aligned} x &= \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 - 3 \\ &= \frac{y^2 - 2y + 1}{4} - 3 \\ &= \frac{y^2 - 2y - 11}{4}. \end{aligned}$$

A equação $x = \frac{y^2 - 2y - 11}{4}$ descreve x como uma função de y . Essas etapas fornecem um exemplo de eliminação do parâmetro. O gráfico desta função é um pedaço de parábola à direita. A curva plana começa em $(1, -3)$ e termina em $(6, 7)$. Essas terminações foram devido à restrição do parâmetro $-2 \leq t \leq 3$.



Exercício 4.1

Elimine o parâmetro para a curva plana descrita pelas seguintes equações paramétricas e descreva o gráfico resultante:

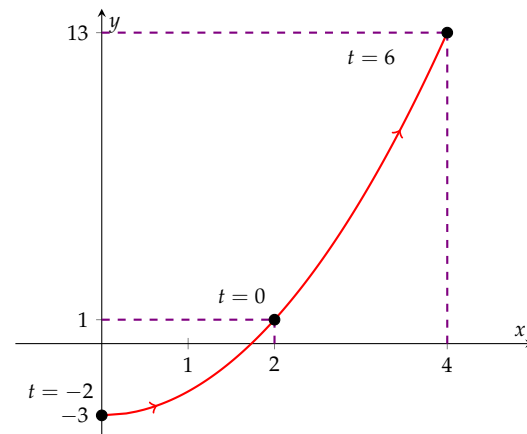
$$x(t) = \sqrt{2t+4}, \quad y(t) = 2t+1, \quad -2 \leq t \leq 6.$$

Solução 4.1

Para eliminar o parâmetro, podemos resolver qualquer uma das equações para t . Por exemplo, resolver a primeira equação para t dá

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2t+4}, \\ x^2 &= 2t+4, \\ x^2 - 4 &= 2t, \\ t &= \frac{x^2 - 4}{2}. \end{aligned}$$

Observe que quando elevamos ao quadrado ambos os lados, é importante observar que $x \geq 0$. Substituindo $t = \frac{x^2 - 4}{2}$ em $y(t)$



resulta

$$\begin{aligned}y(t) &= 2t + 1, \\y &= 2\frac{x^2 - 4}{2} + 1, \\y &= x^2 - 4 + 1, \\y &= x^2 - 3.\end{aligned}$$

Esta é a equação de uma parábola virada para cima. Há, no entanto, uma restrição de domínio devido aos limites do parâmetro t . Quando $t = -2$, $x = \sqrt{2(-2) + 4} = 0$, e quando $t = 6$, $x = \sqrt{2(6) + 4} = 4$.

4.3 Parametrização das circunferências e elipses

Nos seguintes exemplos, a gente vai explicar como parametrizar as circunferências e elipses.

Exemplo 4.3

Suponha dada a circunferência com o centro na origem e raio r . Assim sua equação é

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Observe que para todo $0 \leq \theta \leq 2\pi$ temos

$$\frac{x}{r} = \cos \theta, \quad \frac{y}{r} = \sin \theta.$$

Assim uma parametrização da circunferência é dada por

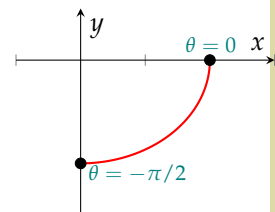
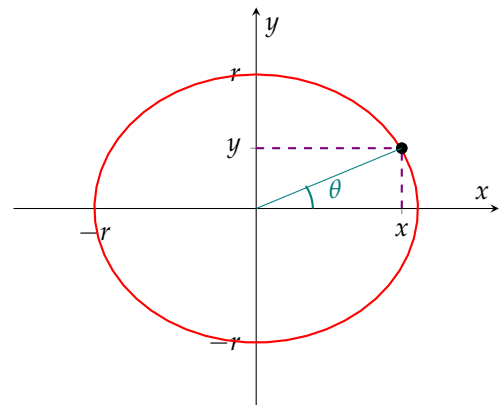
$$x(\theta) = r \cdot \cos \theta, \quad y(\theta) = r \cdot \sin \theta, \quad (4.3)$$

onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Limitando o parâmetro θ para menor domínio, podemos receber a parte da circunferência. Por exemplo se o ângulo θ , varia entre $-\frac{\pi}{2}$ e 0 assim a curva correspondente é o pedaço da circunferência com raio r com $x > 0$ e $y < 0$. Além disso modificando Equações (4.3) é fácil obter a equação da circunferência com centro no ponto arbitrário (x_0, y_0) do plano:

$$x(\theta) = r \cdot \cos \theta + x_0, \quad y(\theta) = r \cdot \sin \theta + y_0,$$

com $0 \leq \theta \leq 2\pi$.



Exemplo 4.4

Deformando as formulas (4.3), suponha que a curva dada pelas equações,

$$x(t) = 4 \cos t, \quad y(t) = 3 \sin t,$$

com $0 \leq t \leq 2\pi$.

Às vezes é necessário ser um pouco criativo para eliminar o parâmetro. Resolver qualquer uma das equações para t diretamente não é aconselhável porque seno e cosseno não são funções um-para-um. No entanto, dividindo a primeira equação por 4 e a segunda equação por 3 (e suprimir o t) nos dá

$$\cos t = \frac{x}{4} \quad \sin t = \frac{y}{3}.$$

Agora usando a identidade Pitagórica

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

e substituindo as expressões para $\sin t$ e $\cos t$ pelas expressões equivalentes em termos de x e y , implica que

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1,$$

ou seja

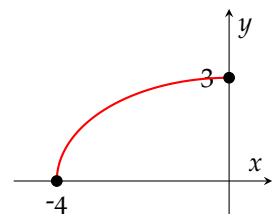
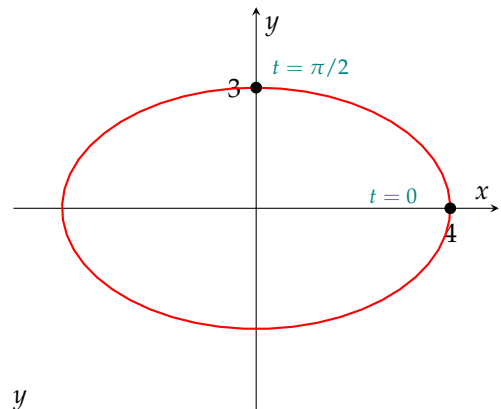
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Esta é a equação de uma elipse horizontal centrada na origem, com semi-eixo maior 4 e semi-eixo menor 3 como mostrado no gráfico.

De novo, limitando o parâmetro θ para menor domínio, podemos receber a parte da circunferência. Por exemplo se o ângulo θ , varia entre $\frac{\pi}{2}$ e π assim a curva correspondente é o pedaço da elipse com raio com $x < 0$ e $y > 0$. Além disso modificando as equações dadas é fácil obter a equação da elipse com centro no ponto arbitrário (x_0, y_0) do plano:

$$x(\theta) = a \cdot \cos \theta + x_0, \quad y(\theta) = b \cdot \sin \theta + y_0,$$

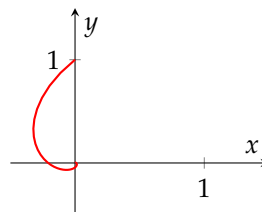
com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e a, b são semi-eixos correspondentes.

**Exemplo 4.5**

Suponha dada uma curva pelas equações paramétricas:

$$x(\theta) = e^{-\theta} \cdot \cos \theta, \quad y(\theta) = e^{-\theta} \cdot \sin \theta,$$

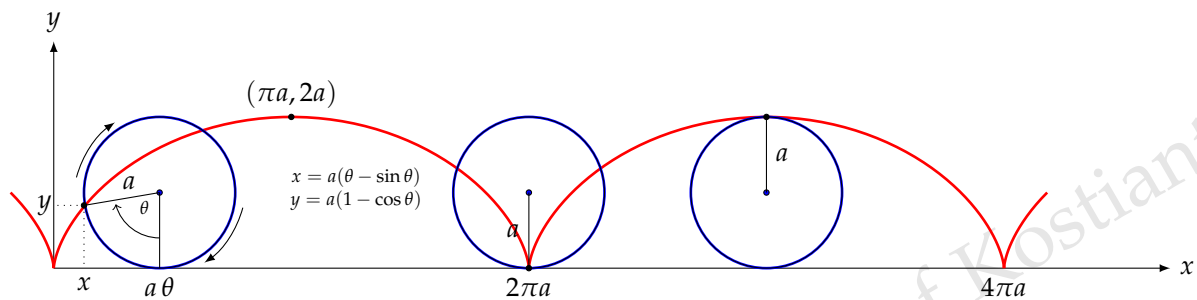
onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Para todo θ fixo o ponto correspondente está na circunferência com raio e^{-t} . Mas quando θ aproxima o valor π o raio correspondente $e^{-\theta}$ aproxima o 0. Assim a curva correspondente é parte da espiral como na figura do lado.



4.4 Ciclóide e outras curvas paramétricas

4.4.1 Ciclóide

Imagine fazer um passeio de bicicleta pelo país. Os pneus ficam em contato com a via e giram em um padrão previsível. Agora, suponha que uma formiga muito determinada esteja cansada após um longo dia e queira voltar para casa. Então ela se pendura na lateral do pneu e ganha uma carona gratuita. O caminho que essa formiga percorre por uma estrada reta é chamado de *ciclóide* (na figura abaixo).



Um ciclóide gerado por um círculo (ou roda de bicicleta) de raio a é dado pelas equações paramétricas:

$$x(\theta) = a(\theta - \sin \theta), \quad y(\theta) = a(1 - \cos \theta).$$

Para ver por que isso é verdade, considere o caminho que o centro da roda segue. O centro se move ao longo do eixo x a uma altura constante igual ao raio da roda. Se o raio for a , então as coordenadas do centro podem ser dadas pelas equações

$$x(\theta) = a\theta, \quad y(\theta) = a.$$

para qualquer valor de θ . Em seguida, considere a formiga, que gira em torno do centro ao longo de um caminho circular. Se a bicicleta estiver se movendo da esquerda para a direita, as rodas estão girando no sentido horário. Uma possível parametrização do movimento circular da formiga (em relação ao centro da roda) é dada por

$$x(\theta) = -a \sin \theta, \quad y(\theta) = -a \cos \theta.$$

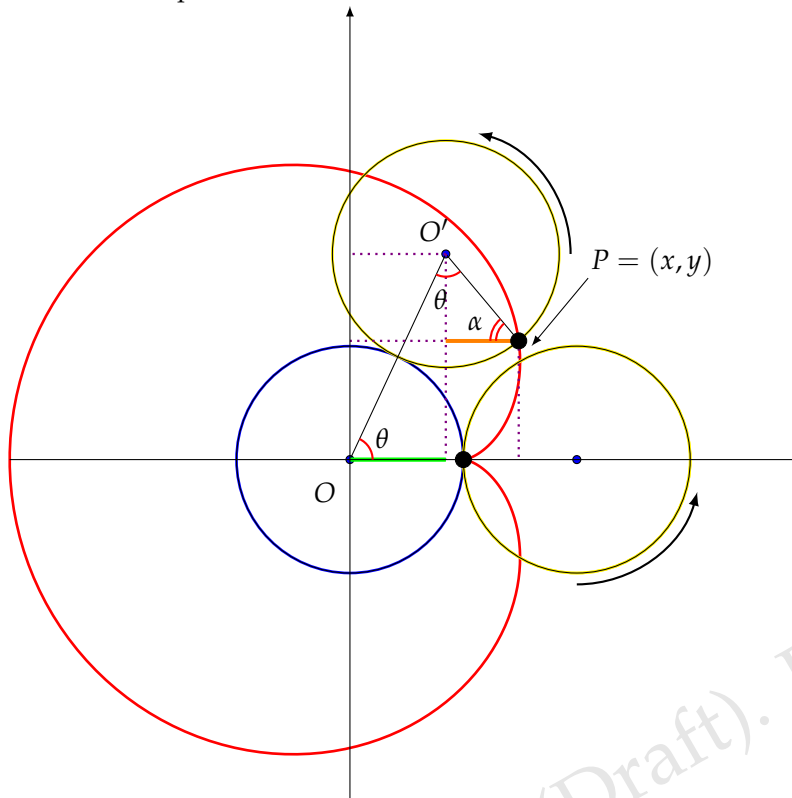
(O sinal negativo é necessário para inverter a orientação da curva. Se o sinal negativo não estivesse lá, teríamos que imaginar a roda girando no sentido anti-horário.) A soma dessas equações fornece as equações para o ciclóide.

$$x(\theta) = a(\theta - \sin \theta), \quad y(\theta) = a(1 - \cos \theta).$$

4.4.2 Cardióide

O *cardiíde* é gerado rolando um círculo sobre o outro. Os dois círculos venham com o mesmo raio a . Então — o círculo amarelo é rolando para o azul.

Imagine que você deu ao círculo amarelo no início uma caneta vermelha em seu pólo leste. Como o efeito do rolamento, essa caneta vermelha produzirá a curva vermelha do *cardioides*.



Observe que o tamanho do segmento OO' é $2a$, onde a é raio das circunferências. E por outro lado o tamanho do segmento $O'P$ é a . Além disso o ângulo α pode ser calculado como

$$\alpha = 180^\circ - 2\theta.$$

Assim os segmentos verde e laranja podem ser calculados como:

$$\text{segmento verde} = OO' \cos \theta = 2a \cos \theta,$$

$$\text{segmento laranja} = O'P \cos \alpha = a \cos(180 - 2\theta).$$

Observe que a coordenada x do Ponto P , pode ser calculado como

$$\begin{aligned} \text{segmento verde} + \text{segmento laranja} &= 2a \cos \theta + a \cos(180 - 2\theta) \\ &= 2a \cos \theta - a \cos(2\theta). \end{aligned}$$

Analogamente, a coordenada y do Ponto P , pode ser calculado como

$$2a \sin \theta - a \sin(180 - 2\theta) = 2a \sin \theta - a \sin(2\theta).$$

Assim, as equações da cardioides são

$$x(\theta) = 2a \cos \theta - a \cos(2\theta),$$

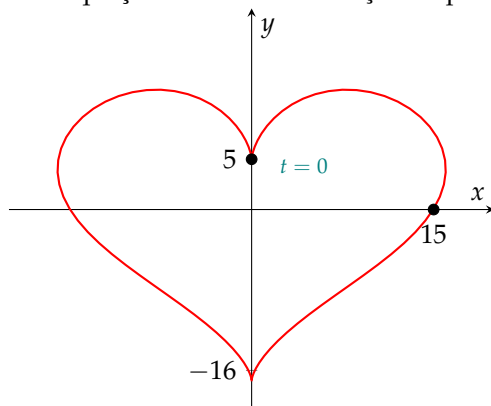
$$y(\theta) = 2a \sin \theta - a \sin(2\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

4.4.3 Coração

Finalmente considere as seguintes equações paramétricas:

$$\begin{aligned}x(\theta) &= 16 \sin^3 \theta, \\y(\theta) &= 13 \cos \theta - 5 \cos(2\theta) - 2 \cos(3\theta) - \cos(4\theta).\end{aligned}$$

Tais equação descrevem o *coração* no plano.



O gráfico dessa curva pode ser verificado no [Desmos](https://www.desmos.com/calculator/cesv2ys7sb) (é uma calculadora gráfica avançada implementada como um aplicativo da web e um aplicativo móvel escrito em JavaScript).

A curva em Desmos está disponível neste endereço <https://www.desmos.com/calculator/cesv2ys7sb>.

Exercício 4.2: (Trabalho p/ casa)

- Elimine o parâmetro da curva plana definida pelas seguintes equações paramétricas e descreva o gráfico resultante.

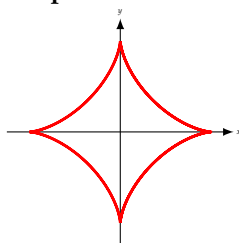
$$x(t) = 2 + \frac{3}{t}, \quad y(t) = t - 1, \quad 2 \leq t \leq 6.$$

Resposta: $y = -1 + \frac{3}{x-2}$ - uma hipérbole no plano.

- Encontre dois pares diferentes de equações paramétricas para representar o gráfico de $y = 2x^2 - 3$.
- Encontre dois pares diferentes de equações paramétricas para representar o gráfico de $y = x^2 + 2x$.
- Descreva a curva dada pelas equações paramétricas:

$$x(t) = 3 \cos t + \cos 3t, \quad y(t) = 3 \sin t - \sin 3t.$$

Resposta:



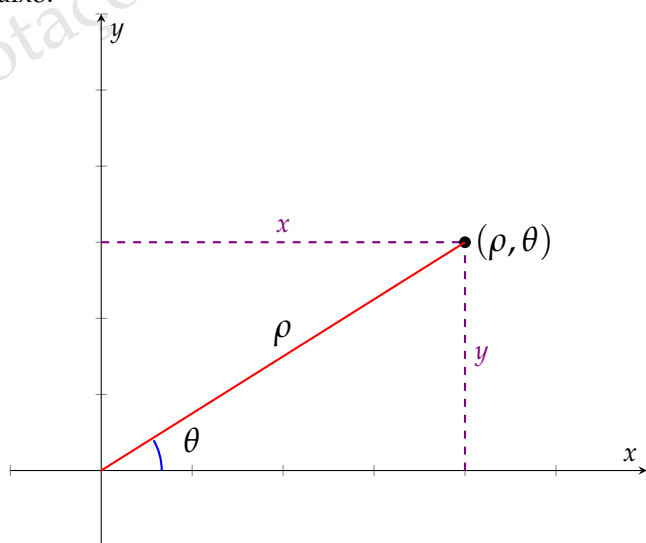
Aula 5. As coordenadas polares

5.1 Noções básicas

Até este ponto, lidamos exclusivamente com o sistema de coordenadas cartesianas (ou retangulares, ou x - y). No entanto, como veremos, esse nem sempre é o sistema de coordenadas mais fácil de trabalhar. Portanto, nesta aula, começaremos a examinar o sistema de coordenadas polares.

Os sistemas de coordenadas nada mais são do que uma forma de definir um ponto no espaço. Por exemplo, no sistema de coordenadas cartesianas (introduzidas pelo René Descartes), um ponto recebe as coordenadas (x, y) e usamos isso para definir o ponto começando na origem e depois movendo x unidades horizontalmente seguidas por y unidades verticalmente. Isso é mostrado no esboço do lado.

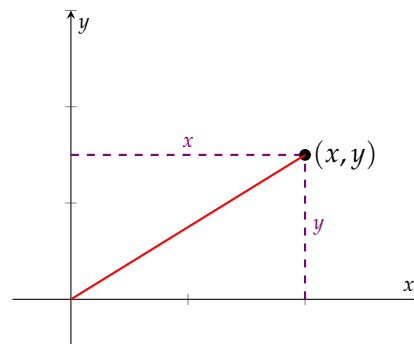
Entretanto, isso não é a única maneira de definir um ponto no espaço bidimensional. Em vez de nos movermos verticalmente e horizontalmente da origem para chegar ao ponto, poderíamos ir direto para fora da origem até atingirmos o ponto e então determinar o ângulo que esta linha faz com o eixo x . Poderíamos então usar a distância do ponto da origem e a quantidade necessária para girar o eixo- x como as coordenadas do ponto. Isso é mostrado no esboço abaixo.



As coordenadas nesta forma são chamadas de *coordenadas polares* introduzidas pelo matemático italiano Gregório Fontana.

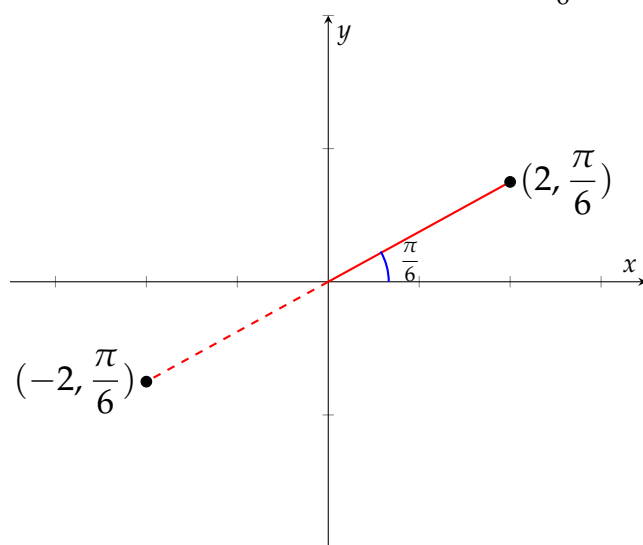


René Descartes (1596–1650)



Gregorio Fontana (1735–1803)

A discussão acima pode levar alguém a pensar que ρ deve ser um número positivo. No entanto, também permitimos r ser negativo. Abaixo está um esboço dos dois pontos $(2, \frac{\pi}{6})$ e $(-2, \frac{\pi}{6})$.

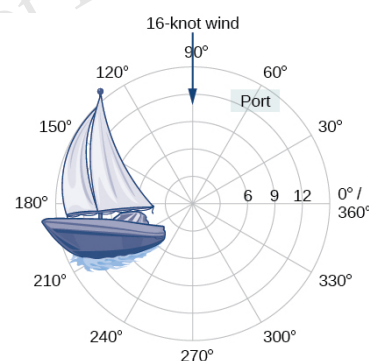


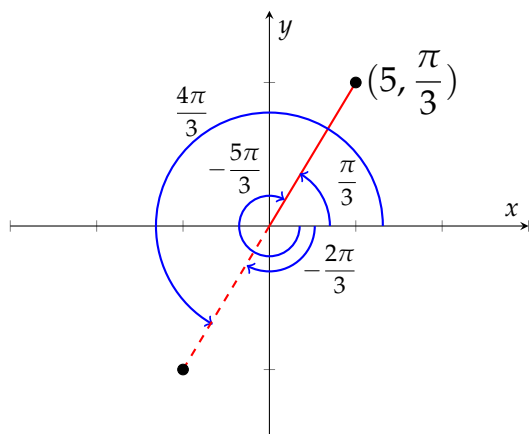
A partir deste esboço, podemos ver que se ρ é positivo, o ponto estará no mesmo quadrante que θ . Por outro lado, se ρ for negativo, o ponto está no quadrante oposto. Observe também que as coordenadas $(-2, \frac{\pi}{6})$ descrevem o mesmo ponto que as coordenadas $(2, \frac{7\pi}{6})$. As coordenadas $(2, \frac{7\pi}{6})$ nos dizem para girar o eixo-x por um ângulo de $\frac{7\pi}{6}$, isso nos colocaria na linha tracejada no esboço acima e, em seguida, se moveria para uma distância de 2.

Isso leva a uma diferença importante entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas polares. Nas coordenadas cartesianas as coordenadas para qualquer ponto são unicamente determinadas. Com coordenadas polares, isso não é verdade. Em coordenadas polares, existe literalmente um número infinito de coordenadas para um determinado ponto. Por exemplo, os quatro pontos a seguir são coordenadas para o mesmo ponto.

$$(5, \frac{\pi}{3}) = (5, -\frac{5\pi}{3}) = (-5, \frac{4\pi}{3}) = (-5, -\frac{2\pi}{3}).$$

Abaixo está um esboço dos ângulos usados nesses quatro conjuntos de coordenadas.





No segundo par de coordenadas, giramos no sentido horário para chegar ao ponto. Não devemos esquecer de girar no sentido horário. Às vezes é o que temos que fazer!

Os dois últimos pares de coordenadas usam o fato de que, se terminarmos no quadrante oposto do ponto, podemos usar um negativo ρ para voltar ao ponto e, claro, há uma rotação no sentido horário e anti-horário para chegar ao ângulo.

Esses quatro pontos representam apenas as coordenadas do ponto sem girar em torno do sistema mais de uma vez. Se permitirmos que o ângulo faça quantas rotações completas quanto quisermos em torno do sistema de eixos, haverá um número infinito de coordenadas para o mesmo ponto. Na verdade, o ponto (ρ, θ) pode ser representado por qualquer um dos seguintes pares de coordenadas.

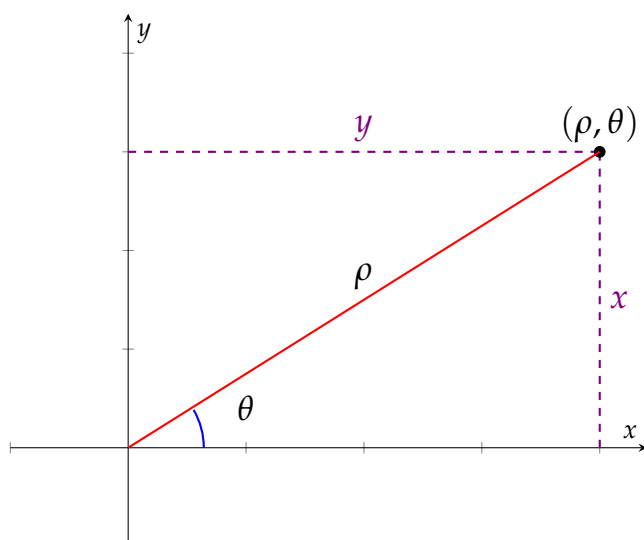
$$(\rho, \theta + 2\pi n), \quad (-\rho, \theta + (2n + 1)\pi),$$

onde n é qualquer inteiro.

A seguir, devemos falar sobre a origem do sistema de coordenadas. Nas coordenadas polares, a origem costuma ser chamada de *pólo*. Como não estamos realmente afastando da origem/pólo, sabemos que $r = 0$. No entanto, ainda podemos girar o sistema em qualquer ângulo θ que quisermos e, portanto, as coordenadas da origem/pólo são $(0, \theta)$.

5.2 Relação entre coordenadas polares e cartesianas

Agora que temos uma compreensão das coordenadas polares, precisamos pensar sobre a conversão entre os dois sistemas de coordenadas. Vamos começar com o seguinte esboço, nos lembrando de como funcionam os dois sistemas de coordenadas.



Observe que temos um triângulo retângulo acima e com isso podemos obter as seguintes equações que converterão as coordenadas polares em coordenadas cartesianas.

Fórmulas de conversão polar para cartesiana:

$$x = \rho \cdot \cos \theta, \quad y = \rho \cdot \sin \theta.$$

Converter do cartesiano é também fácil. Vamos primeiro observar o seguinte.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (\rho \cos \theta)^2 + (\rho \sin \theta)^2 \\ &= \rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta \\ &= \rho^2 (\cos^2 + \sin^2) = \rho^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Observe que, tecnicamente, devemos ter um sinal de mais ou menos na frente da raiz, pois sabemos que ρ pode ser positivo ou negativo. Vamos continuar com a convenção que ρ é positivo aqui.

Obter uma equação para θ também é simples. Vamos começar com

$$\frac{y}{x} = \frac{\rho \sin \theta}{\rho \cos \theta} = \tan \theta.$$

Portanto,

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}.$$

Precisamos ter cuidado com isso porque a função arco tangente retorna apenas valores no intervalo $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Lembre-se de que existe um segundo ângulo possível e que o segundo ângulo é dado por $\theta + \pi$.

Assim, **Fórmulas de conversão cartesiana para polar:** são

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2, & \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta &= \arctan \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Exemplo 5.1

Vamos converter cada um dos pontos a seguir no sistema de coordenadas fornecido.

(a) Converter $(-4, \frac{2\pi}{3})$ para coordenadas cartesianas.

(b) Converter $(-1, -1)$ para coordenadas polares.

(a). Usando as formulas acima, temos

$$x = -4 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -4\left(-\frac{1}{2}\right) = 2,$$

$$y = -4 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}.$$

Assim as coordenadas cartesianas desse ponto são $(2, -2\sqrt{3})$.

(b). De novo usando as formulas acima, temos

$$\rho = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$\theta = \arctan \frac{-1}{-1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

No entanto, este não é o ângulo correto. Este valor de θ está no primeiro quadrante e o ponto $(-1, -1)$ está no terceiro quadrante. Conforme observado acima, podemos obter o ângulo correto adicionando π . Portanto, o ângulo correto é,

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}.$$

Então, em coordenadas polares, o ponto é $(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4})$. Observe também que poderíamos ter usado o primeiro θ com ρ negativo. Neste caso, o ponto também pode ser escrito em coordenadas polares como $(-\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$.

Exemplo 5.2

(a) Converter $2x - 5x^3 = 1 + xy$ para coordenadas polares.

(b) Converter $\rho = -2 \cos \theta$ para as coordenadas Cartesianas.

(a). Usando as formulas acima, temos

$$2\rho \cos \theta - 5(\rho \cos \theta)^3 = 1 + (\rho \cos \theta)(\rho \sin \theta),$$

$$\implies 2\rho \cos \theta - 5\rho^3 \cos^3 \theta = 1 + \rho^2 \cos \theta \sin \theta.$$

(b). Este é um pouco mais complicado, mas não muito. Primeiro, observe que podemos substituir diretamente ρ mas não há uma substituição direta para o cosseno. Se tivéssemos um ρ à direita junto com o cosseno então poderíamos fazer uma substituição direta. Assim,

$$\rho^2 = -2\rho \cos \theta,$$

$$\implies x^2 + y^2 = -2x.$$

Exercício 5.1

Escreva a equação polar em coordenadas cartesianas:

$$\rho = \operatorname{sen}(2\theta).$$

Solução 5.1

Temos:

$$\rho = \operatorname{sen}(2\theta),$$

Usando arco duplo

$$\rho = 2 \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \theta,$$

Usando $\frac{x}{\rho} = \cos \theta, \frac{y}{\rho} = \operatorname{sen} \theta$

$$\rho = 2 \cdot \frac{x}{\rho} \cdot \frac{y}{\rho}$$

$$\rho = 2 \cdot \frac{xy}{\rho^2},$$

$$\rho^3 = 2xy$$

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3 = 2xy,$$

Pois $\rho^2 = x^2 + y^2$.

A equação também pode ser escrita como:

$$(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = 2xy, \quad \text{ou} \quad (x^2 + y^2) = (2xy)^{\frac{2}{3}}.$$

5.3 *Curvas em coordenadas polares***Exercício 5.2**

Desenhe a curva cuja equação em coordenadas polares é dada pela equação:

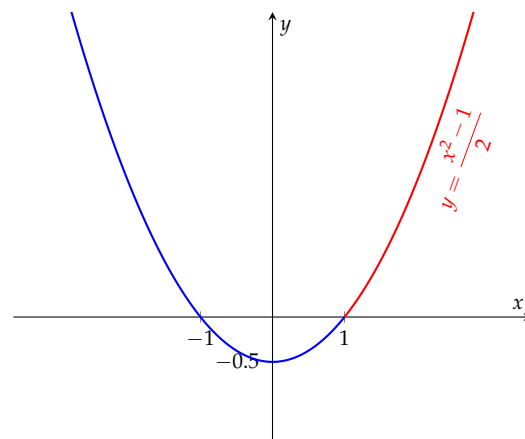
$$\rho(\theta) = \frac{1}{1 - \operatorname{sen} \theta}.$$

Solução 5.2

Observe que a curva está bem definida quando $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, ou seja, quando $\operatorname{sen} \theta \neq 1$. Como no exemplo anterior, temos

$$\begin{aligned} \rho - \rho \operatorname{sen} \theta &= 1, \\ \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} - y &= 1, \\ \Rightarrow x^2 + y^2 &= (1 + y)^2, \\ \Rightarrow x^2 + y^2 &= 1 + 2y + y^2, \\ \Rightarrow y &= \frac{x^2 - 1}{2}. \end{aligned}$$

Assim a curva é parábola do lado. Se $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ assim temos



a parte vermelha e se $\frac{\pi}{2} < \theta \leq 2\pi$ temos a parte azul. Dois pedaços do gráfico se interceptam no ponto $(1, 0)$ quando $\theta = 0 = 2\pi$.

Exercício 5.3

Desenhe a curva cuja equação em coordenadas polares é dada pela equação:

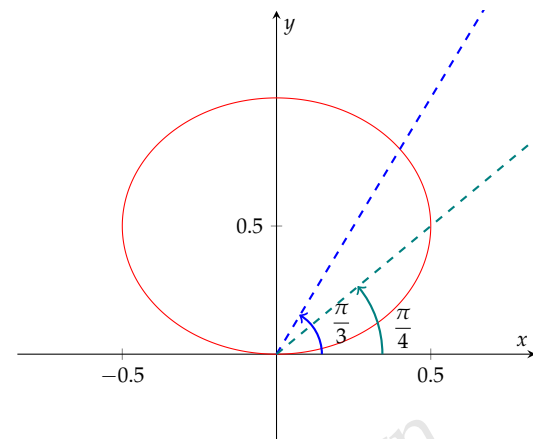
$$\rho(\theta) = \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Solução 5.3

Proseguindo como no Exemplo 5.2 temos:

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \rho \sin \theta, \\ \Rightarrow x^2 + y^2 &= y, \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - y + \frac{1}{4} &= \frac{1}{4}, \\ \Rightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

equação da circunferência com raio $\frac{1}{2}$ e centro no ponto $(0, \frac{1}{2})$.



Exemplo 5.3

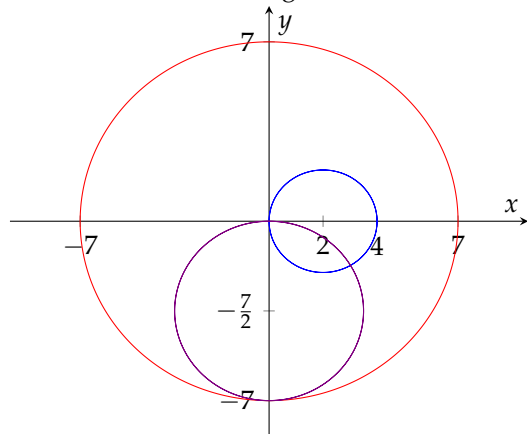
Vamos desenhar as curvas $\rho = 7$, $\rho = 4 \cos \theta$, e $\rho = -7 \sin \theta$ no mesmo sistema de eixos.

Primeiramente, observamos que a equação $\rho = 7$, é equivalente à $x^2 + y^2 = 7^2$, assim define a circunferência de raio 7 com o centro na origem (círculo vermelho na figura de baixo).

Proseguindo como no Exercício 5.3 temos que a curva $\rho = -7 \sin \theta$ é a circunferência de raio $\frac{7}{2}$ com o centro no ponto $(0, -\frac{7}{2})$ (círculo violeta na figura de baixo).

Analogamente, a curva $\rho = 4 \cos \theta$ é a circunferência de raio 2 com centro em $(2, 0)$ (círculo azul na figura de baixo).

Assim vamos obter a figura de baixo.



Exercício 5.4: (Trabalho p/ casa)

(a) Determine as coordenadas polares dos seguintes pontos:

$$(-1, -2), (-3, 3), (2, -6).$$

(b) Determine as coordenadas cartesianas dos seguintes pontos:

$$\left(-1, \frac{\pi}{4}\right), \left(2, \frac{2\pi}{3}\right), \left(3, \frac{\pi}{6}\right).$$

Exercício 5.5: (Trabalho p/ casa)

Converter em coordenadas cartesianas as seguintes equações:

$$6\rho^3 \sin \theta = 4 - \cos \theta, \quad \frac{2}{\rho} = \sin \theta - \sec \theta.$$

Respostas: $6(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}y = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} - x$
e $2x = xy - x^2 - y^2$, respectivamente.

Exercício 5.6: (Trabalho p/ casa)

Desenhe a curva cuja equação em coordenadas polares dada é pela equação:

$$\rho(\theta) = 1 - \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

calculando os valores de $\rho(\theta)$ para ângulos simples como $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ etc. recebendo o cardioides do lado.

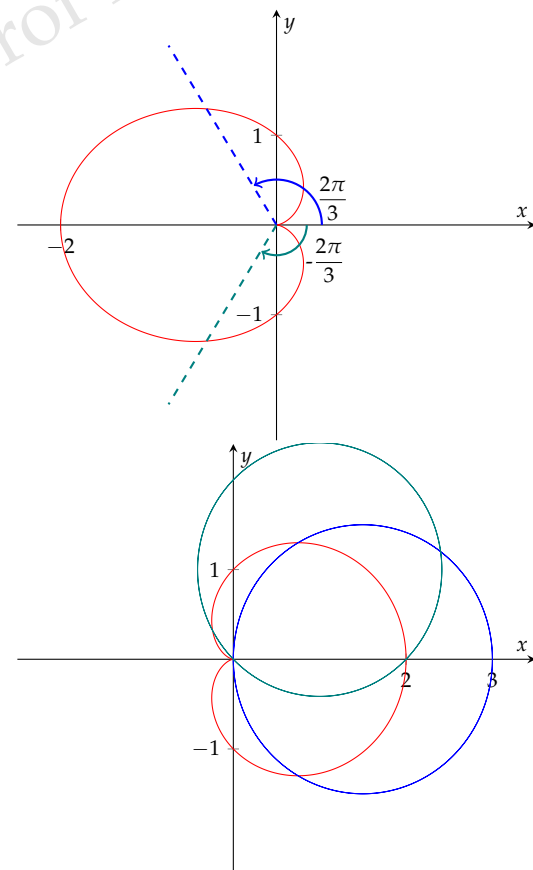
Exercício 5.7: (Trabalho p/ casa)

Desenha no mesmo plano as seguintes curvas:

$$\rho(\theta) = 1 + \cos \theta,$$

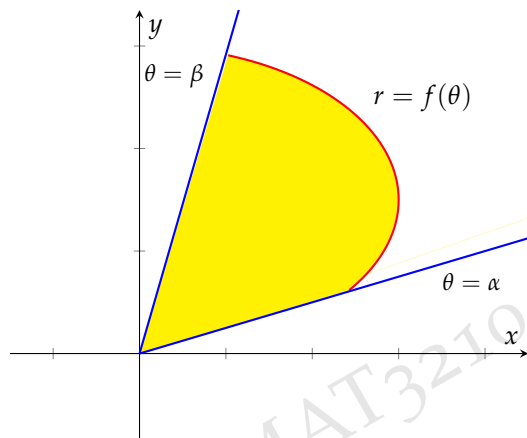
$$\rho(\theta) = 3 \cos \theta,$$

$$\rho(\theta) = 2 \cos \theta + 2 \sin \theta.$$



Aula 6. Áreas em coordenadas polares

Nesta Aula, veremos as áreas delimitadas por curvas polares. Observe também que dissemos “limitadas por” em vez de “abaixo”, como costumamos fazer nesses problemas (como na Aula 1). Esses problemas funcionam de maneira um pouco diferente nas coordenadas polares. Aqui está um esboço de quais são as regiões para encontrar a área.



Estaremos procurando a área amarela no esboço acima do conjunto A , dado por

$$A = \left\{ (\rho, \theta) \mid \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq f(\theta), \\ \alpha \leq \theta \leq \beta \end{array} \right\}.$$

A fórmula para encontrar esta área é,

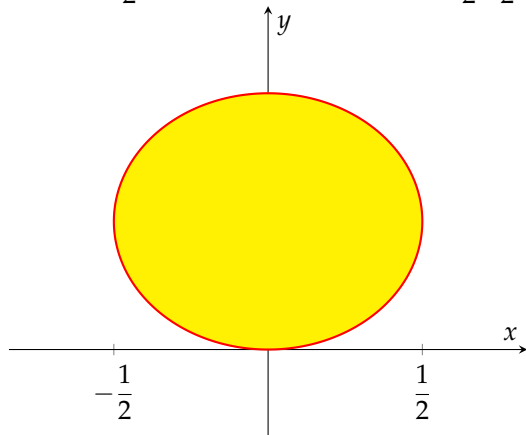
$$\text{Área } A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta.$$

Exemplo 6.1

Calcule área da região limitada por

$$\rho(\theta) = \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Como vimos na Aula 5, a região correspondente é uma circunferência com centro no ponto $(0, 0.5)$ com raio $\frac{1}{2}$. Assim a área deve ser $\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$.



Agora vamos ver como receber a mesma resposta usando a fórmula acima. Temos

$$\begin{aligned} \text{Área } A &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right] \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Exercício 6.1

Calcule área da região limitada por

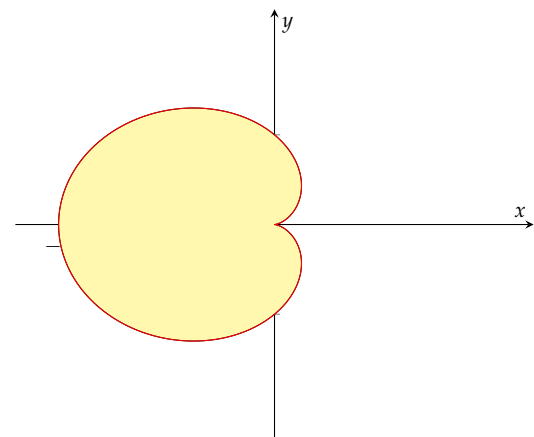
$$\rho(\theta) = 1 - \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Solução 6.1

Como vimos na aula 5, a curva define o cardioide ao lado.

Usando a fórmula para calcular a área temos:

$$\text{Área } A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [1 - \cos \theta]^2 d\theta$$



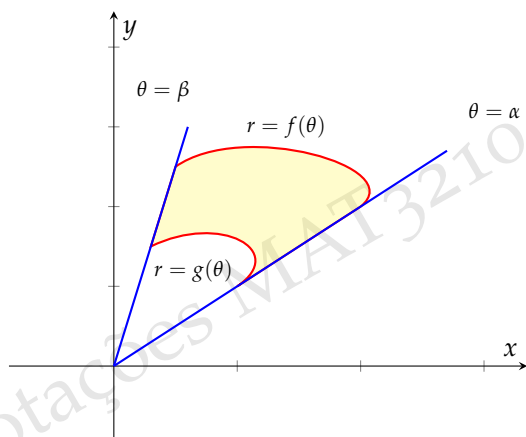
Temos,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} [1 - \cos \theta]^2 d\theta &= \int_0^{\pi} [1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta] d\theta \\ &= 2\pi + \int_0^{\pi} \cos^2 \theta d\theta \\ &= 2\pi + \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta \\ &= 2\pi + \pi = 3\pi.\end{aligned}$$

Assim a área da cardioide igual a $\frac{3\pi}{2}$.

LEMBRETE: $\int_0^{2\pi} \cos x dx = 0$

Como vamos ver no vários exemplos a seguir, é bem útil calcular as áreas de regiões quando o raio varia entre duas curvas $f(\theta)$ e $g(\theta)$, como no esboço de baixo.



Estaremos procurando a área no esboço acima do conjunto A , dado por

$$A = \left\{ (\rho, \theta) \mid \begin{array}{l} g(\theta) \leq \rho \leq f(\theta), \\ \alpha \leq \theta \leq \beta \end{array} \right\}.$$

A fórmula para encontrar esta área é,

$$\text{Área } A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f^2(\theta) - g^2(\theta)] d\theta. \quad (6.1)$$

Exercício 6.2

Encontre a área da região entre os círculos

$$\rho = 1, \quad \rho = 2 \operatorname{sen} \theta,$$

tal que

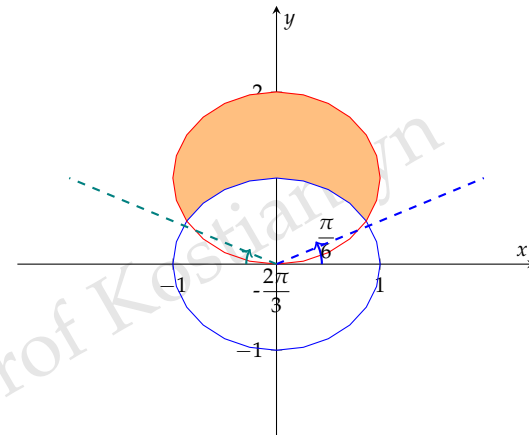
$$1 \leq \rho \leq 2 \operatorname{sen} \theta,$$

isto é a região interior da circunferência $\rho = 2 \operatorname{sen} \theta$ e exterior da circunferência $\rho = 1$.

Solução 6.2

Os círculos interceptam onde $1 = 2 \operatorname{sen} \theta$, ou seja $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}$, assim $\theta = \frac{\pi}{6}$ ou $\theta = \frac{5\pi}{6}$. Assim, aplicando a fórmula (6.1), temos

$$\begin{aligned} \text{Área é} &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} [4 \operatorname{sen}^2 \theta - 1] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} [2(1 - \cos 2\theta) - 1] d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left[\frac{1}{2} - \cos 2\theta \right] d\theta \\ &= \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} \right] \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \\ &= \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2} \left[\operatorname{sen} \frac{5\pi}{3} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right] \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$



Exercício 6.3

Determine a área que está dentro de $\rho = 3 + 2 \sin \theta$ e fora de $\rho = 2$.

Solução 6.3

Do lado está um esboço da região que buscamos.

Este é o gráfico de $\rho = 3 + 2 \sin \theta$. O círculo e o cardioide se cruzam nos 3º e 4º quadrantes. A área do coração até o círculo que está no primeiro e segundo quadrantes está sombreada. Para determinar esta área, precisamos conhecer os valores de θ para o qual as duas curvas se cruzam. Podemos determinar esses pontos definindo as duas equações e resolvendo.

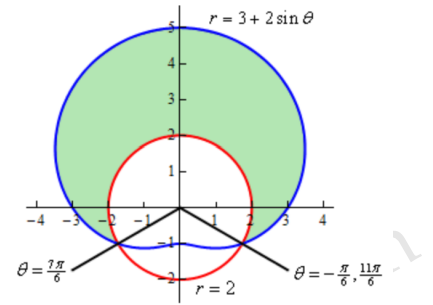
$$3 + 2 \sin \theta = 2$$

$$\sin \theta = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

Observe também aqui que também reconhecemos que outra representação para o ângulo $\frac{11\pi}{6}$ é $-\frac{\pi}{6}$. Isso é importante para este problema. Para usar a fórmula acima, a área deve ser delimitada conforme aumentamos do ângulo menor para o maior. Portanto, se usarmos $\frac{7\pi}{6}$ para $\frac{11\pi}{6}$ não incluiremos a área sombreada, em vez disso, incluiremos a parte inferior das três regiões. No entanto, se usarmos os ângulos $-\frac{\pi}{6}$ para $\frac{7\pi}{6}$, incluiremos a área que buscamos.

Assim aplicando a fórmula (6.1).

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} \frac{1}{2} \left((3 + 2 \sin \theta)^2 - (2)^2 \right) d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} \frac{1}{2} \left(5 + 12 \sin \theta + 4 \sin^2 \theta \right) d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} \frac{1}{2} (7 + 12 \sin \theta - 2 \cos(2\theta)) d\theta \\ &= \frac{1}{2} (7\theta - 12 \cos \theta - \sin(2\theta)) \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} \\ &= \frac{11\sqrt{3}}{2} + \frac{14\pi}{3} \end{aligned}$$



Exercício 6.4

Calcule a área interior das ambas as curvas:

$$\rho = \sin \theta, \quad \rho = \cos \theta.$$

Solução 6.4

A curva $\rho = \sin \theta$ é a circunferência azul e $\rho = \cos \theta$ a circunferência vermelha na figura do lado. As circunferências se encontram quando

$$\sin \theta = \cos \theta,$$

ou seja $\theta = \frac{\pi}{4}$. Observe que para calcular a área interior das ambas as circunferências, podemos dividir a região em duas: quando o ângulo varia entre 0 e $\pi/4$ e quando o ângulo varia entre $\pi/4$ e $\pi/2$ (como na figura do lado). Assim temos:

$$A_1 = \left\{ (\theta, \rho) \mid \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \\ 0 \leq \rho \leq \sin \theta \end{array} \right\}$$

e

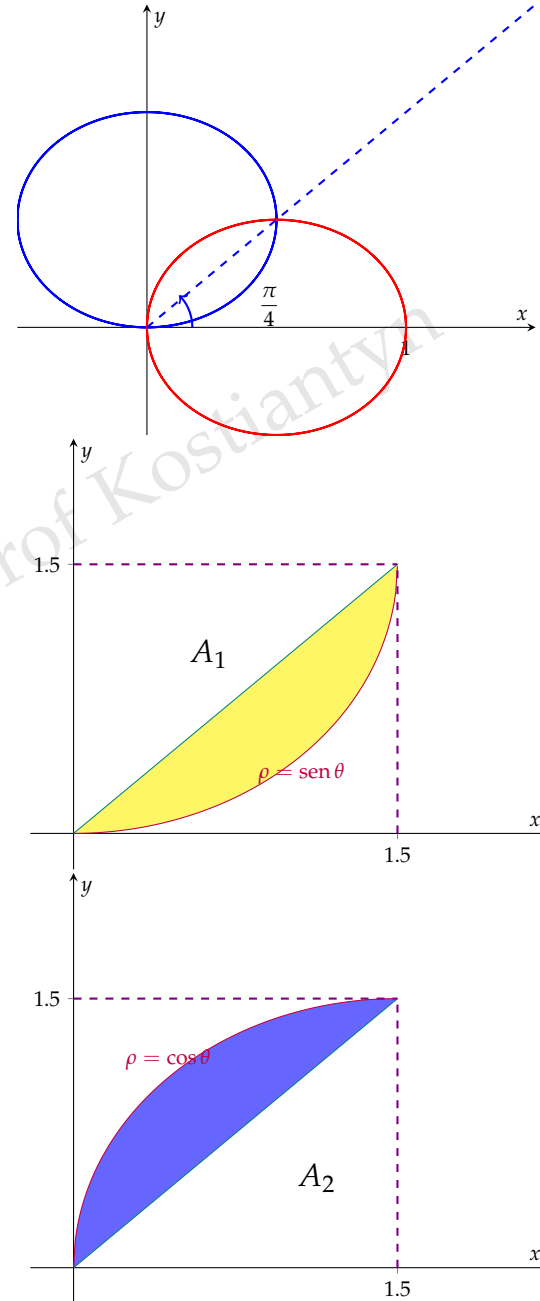
$$A_2 = \left\{ (\theta, \rho) \mid \begin{array}{l} \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leq \rho \leq \cos \theta \end{array} \right\},$$

com

$$\text{Área total} = \text{área } A_1 + \text{área } A_2.$$

Assim

$$\begin{aligned} \text{Área total} &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 \theta d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2\theta) d\theta + \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \left[\left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$



Exercício 6.5

Calcule a área da região interior de ambas as curvas:

$$\rho = 3 \cdot \cos \theta, \quad \rho = 1 + \cos \theta.$$

Solução 6.5

A curva $\rho = 3 \cos \theta$ é a circunferência vermelha e $\rho = 1 + \cos \theta$ é o cardióide azul na figura do lado. Observe que para calcular a área interior das ambas as curvas podemos calcular a área com ângulo θ variando entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ multiplicando por 2 no final. Além disso a região laranja interior de duas podemos dividir a região em duas: quando o ângulo varia entre 0 e $\pi/3$ e quando o ângulo varia entre $\pi/3$ e $\pi/2$ (como na figura do lado). Assim temos:

$$A_1 = \left\{ (\theta, \rho) \mid \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, \\ 0 \leq \rho \leq 1 + \cos \theta \end{array} \right\}$$

e

$$A_2 = \left\{ (\theta, \rho) \mid \begin{array}{l} \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leq \rho \leq 3 \cdot \cos \theta \end{array} \right\},$$

com

$$\text{Área total} = 2[\text{área } A_1 + \text{área } A_2].$$

Assim

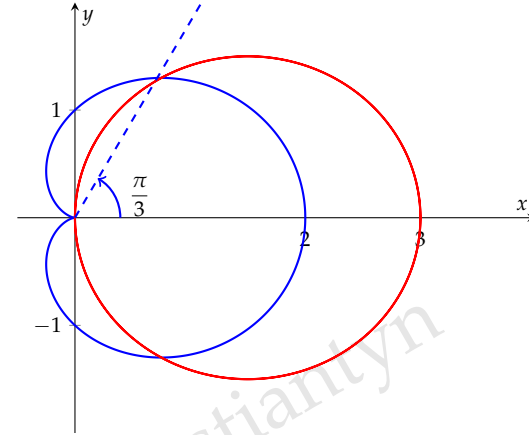
$$\begin{aligned} \text{Área } A_1 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos \theta)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{3\theta}{2} + 2 \sin \theta + \frac{\sin 2\theta}{4} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{3\pi}{6} + 2 \sin \frac{\pi}{3} + \frac{\sin \frac{2\pi}{3}}{4} \right] = \frac{\pi}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{16}. \end{aligned}$$

Semelhante,

$$\text{Área } A_2 = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (3 \cos \theta)^2 d\theta = \frac{3\pi}{8} - \frac{9\sqrt{3}}{16}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \text{Área total} &= 2[\text{área } A_1 + \text{área } A_2] \\ &= 2 \left[\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{8} \right] = \frac{5\pi}{4}. \end{aligned}$$



Exercício 6.6: (Trabalho p/ casa)

- Determine a área que está fora do $\rho = 3 + 2 \cos \theta$ e dentro do $\rho = 2$. **Resposta:** $\frac{11\sqrt{3}}{2} - \frac{7\pi}{3}$.
- Determine a área que dentro das ambas $\rho = 3 + 2 \cos \theta$ e $\rho = 2$. **Resposta:** $-\frac{11\sqrt{3}}{2} + \frac{19\pi}{3}$.

Anotações MAT3210 (Draft). Prof Kostiantyn

Aula 7. Comprimento das curvas

Nesta aula, usamos integrais definidas para encontrar o comprimento do arco de uma curva. Podemos pensar no comprimento do arco como a distância que você viajaria se estivesse caminhando ao longo do caminho da curva. Muitas aplicações do mundo real envolvem comprimento de arco. Se um foguete é lançado ao longo de um caminho parabólico, podemos querer saber a que distância o foguete viaja. Ou, se uma curva em um mapa representa uma estrada, podemos querer saber a distância que temos que dirigir para chegar ao nosso destino.

Começamos calculando o comprimento do arco de curvas definidas como funções de x , depois examinamos o mesmo processo para curvas definidas como funções de y . (O processo é idêntico, com os papéis de x e y invertidos.)

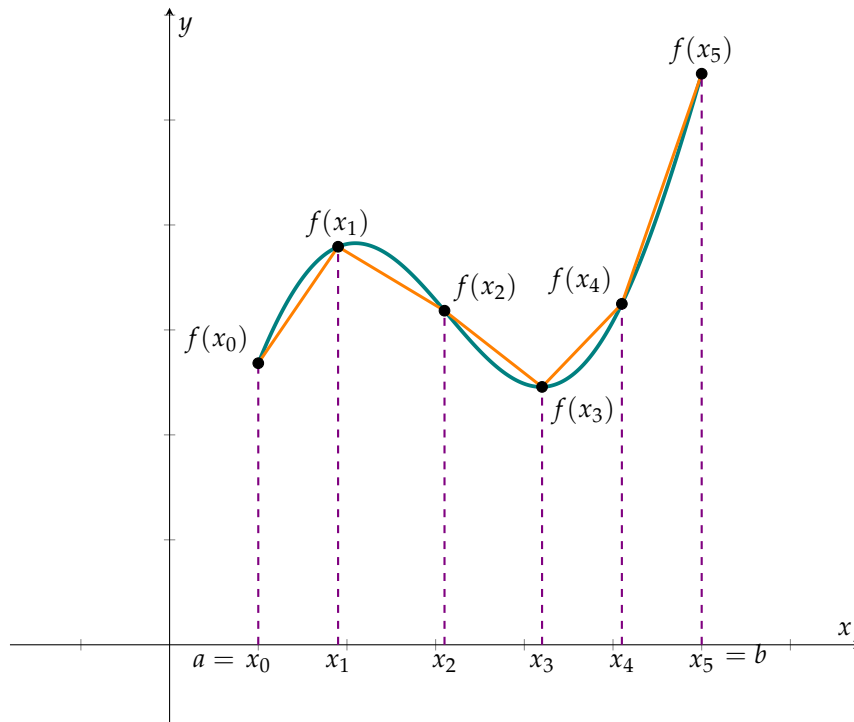
7.1 Comprimento do arco da curva $y = f(x)$

Em aplicações anteriores de integração, exigíamos que a função $f(x)$ fosse integrável ou, no máximo, contínua. No entanto, para calcular o comprimento do arco, temos um requisito mais rigoroso para $f(x)$. Aqui exigimos que $f(x)$ seja diferenciável e, além disso, exigimos que sua derivada, $f'(x)$, seja contínua. Funções como essa, que têm derivadas contínuas, são chamadas de **suaves**.

Seja $f(x)$ uma função suave definida em $[a, b]$. Queremos calcular o comprimento da curva do ponto $(a, f(a))$ ao ponto $(b, f(b))$. Começamos usando segmentos de linha para aproximar o comprimento da curva. Para $i = 0, 1, 2, \dots, n$, seja $P = x_i$ uma partição de $[a, b]$, ou seja

$$P : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Então, para $i = 1, 2, \dots, n$, construa um segmento de reta do ponto $((x_{i-1}), f(x_{i-1}))$ ao ponto $(x_i, f(x_i))$. Embora possa parecer lógico usar segmentos de linha horizontais ou verticais, queremos que nossos segmentos de linha se aproximem da curva o mais próximo possível. A Figura de baixo mostra essa construção para $n = 5$.



Para nos ajudar a encontrar o comprimento de cada segmento de linha, observamos a mudança na distância vertical, bem como a mudança na distância horizontal em cada intervalo. Como usamos uma partição regular, a mudança na distância horizontal em cada intervalo é dada por $\Delta x = \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. A mudança na distância vertical varia de intervalo para intervalo, portanto, usamos $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$ para representar a mudança na distância vertical ao longo do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Observe que alguns (ou todos) Δy_i podem ser negativos.

Pelo Teorema de Pitágoras, o comprimento do segmento de linha é

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

Também podemos escrever isso como

$$\Delta x \sqrt{1 + ((\Delta y_i) / (\Delta x))^2}$$

Agora, pelo Teorema do Valor Médio, existe um ponto $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que $f'(x_i^*) = (\Delta y_i) / (\Delta x)$. Então o comprimento do segmento de linha é dado por

$$\Delta x \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}.$$

Somando os comprimentos de todos os segmentos de linha, obtemos

$$\text{Comprimento do Arco} \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x$$

Tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$, temos

$$\begin{aligned} \text{Comprimento do Arco} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \end{aligned}$$

Theorem 7.1: Comprimento do Arco

Seja $f(x)$ uma função suave no intervalo $[a, b]$. Então o comprimento do arco da porção do gráfico de $f(x)$ do ponto $(a, f(a))$ ao ponto $(b, f(b))$ é dado por:

$$\text{Comprimento do Arco} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (7.1)$$

Observe que estamos integrando uma expressão envolvendo $f'(x)$, portanto, precisamos ter certeza de que $f'(x)$ é integrável. É por isso que exigimos que $f(x)$ seja suave. Os exemplos a seguir mostram como aplicar o teorema.

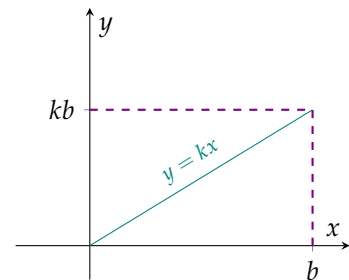
Exemplo 7.1

Considere exemplo quando $f(x) = k \cdot x$, onde k é uma constante. Pelo Teorema de Pitágoras o comprimento do Arco da curva $y = kx$ no intervalo $[0, b]$ igual

$$\sqrt{b^2 + (kb)^2} = b\sqrt{1 + k^2},$$

para todo b . Agora vamos ver como receber a mesma resposta usando (7.1). Neste caso $f'(x) = k$, assim $[f']^2 = k^2$. Portanto, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^b \sqrt{1 + k^2} dx &= \sqrt{1 + k^2} \int_0^b dx \\ &= \sqrt{1 + k^2} \cdot x \Big|_0^b \\ &= b \cdot \sqrt{1 + k^2}. \end{aligned}$$

**Exemplo 7.2**

Considere exemplo quando $f(x) = \frac{x^2}{2}$, com $0 \leq x \leq 1$. Assim $f'(x) = x$ e $[f'(x)]^2 = x^2$. Aplicando (7.1), temos:

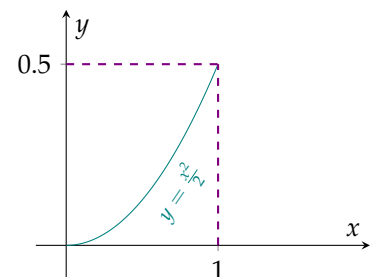
$$\text{Comprimento do Arco} = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx.$$

Agora proseguindo como no Exercício 3.1 (da Aula 3) e fazendo a mudança $x = \tan u$ temos:

$$\int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \tan^2 u} \cdot \sec^2 u du = \int_0^{\pi/4} \sec^3 u du$$

Agora, de novo como no Exercício 3.1 (da Aula 3), temos

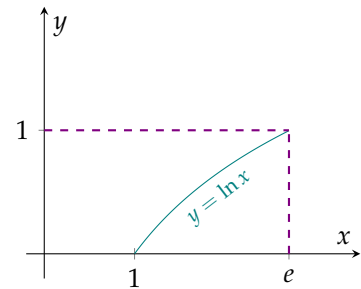
$$\int_0^{\pi/4} \sec^3 u du = \frac{1}{2} [\sec u \tan u + \ln |\sec u + \tan u|] \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} [\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)].$$



Exemplo 7.3

Considere exemplo quando $f(x) = \ln x$, com $1 \leq x \leq e$. Assim $f'(x) = \frac{1}{x}$ e $[f'(x)]^2 = \frac{1}{x^2}$. Aplicando (7.1), temos:

$$\begin{aligned}\text{Comprimento do Arco} &= \int_1^e \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx \\ &= \int_1^e \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & x = 1 \rightarrow u = 1 \\ du = 2x & x = e^1 \rightarrow u = e^2 \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{2} \int_1^{e^2} \frac{\sqrt{1+u}}{u} du.\end{aligned}$$



Calculando integral indefinido, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{1+u}}{u} du &= \left| \begin{array}{l} \sqrt{1+u} = v \\ dv = \frac{1}{2} \cdot \frac{du}{\sqrt{1+u}} \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \int \frac{v^2}{v^2 - 1} dv \\ &= \int \frac{v^2 - 1 + 1}{v^2 - 1} dv \\ &= \int dv + \int \frac{dv}{v^2 - 1} = v + \frac{1}{2} \int \left[\frac{1}{v-1} + \frac{1}{v+1} \right] dv \\ &= v + \frac{1}{2} [\ln |v-1| - \ln |v+1|] \\ &= \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \ln |\sqrt{x^2+1}-1| - \frac{1}{2} \ln |\sqrt{x^2+1}+1| + C.\end{aligned}$$

Voltando para integral definida, temos que o comprimento do arco da curva igual:

$$= \frac{\ln(\sqrt{e^4+1}+1) - \ln(\sqrt{e^4+1}-1) - \ln(\sqrt{2}+1) + \ln(\sqrt{2}-1)}{2} + \sqrt{e^4+1} - \sqrt{2}.$$

7.2 Comprimento da curvas em equações paramétricas

Suponha que a curva dada pelas equações paramétricas (como na Aula 4):

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

onde t varia num intervalo $[c, d]$, de modo que $x(c) = a$ e $x(d) = b$ (ou seja x varia no intervalo $[a, b]$). Assim a relação $y = f(x)$ podemos escrever como

$$y(t) = f(x(t)).$$

Observe que aplicando regra de cadeia temos

$$y'(t) = f'(x(t))x'(t),$$

assim:

$$\begin{aligned}
 \text{Comprimento do Arco} &= \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \\
 &= \int_c^d \sqrt{1 + [f'(x(t))]^2} x'(t) dt \\
 &= \int_c^d \sqrt{[x'(t)]^2 + [f'(x(t))x'(t)]^2} dt \\
 &= \int_c^d \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt
 \end{aligned}$$

Assim, resumindo, temos que

Theorem 7.2: Comprimento do Arco em equações paramétricas

Dada uma curva

$$\gamma = (x(t), y(t)),$$

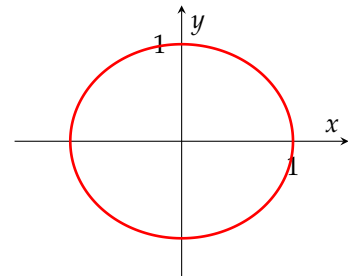
com $x(t), y(t)$ funções suaves no intervalo $[c, d]$. Então o comprimento do arco da porção do gráfico da curva $(x(t), y(t))$ do ponto $(x(c), y(c))$ ao ponto $(x(d), y(d))$ é dado por:

$$\text{Comprimento da curva} = \int_c^d \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt. \quad (7.2)$$

Exemplo 7.4

Considere a curva dada por $\gamma = (\sin t, \cos t)$ com $t \in [0, 2\pi]$. Assim a curva é a circunferência com raio 1 (veja Aula 4). Aplicando a fórmula (7.2), temos

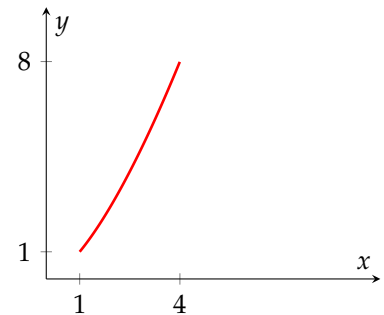
$$\begin{aligned}
 \text{Comprimento da curva} &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[\cos t]^2 + [-\sin t]^2} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} dt = t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi.
 \end{aligned}$$



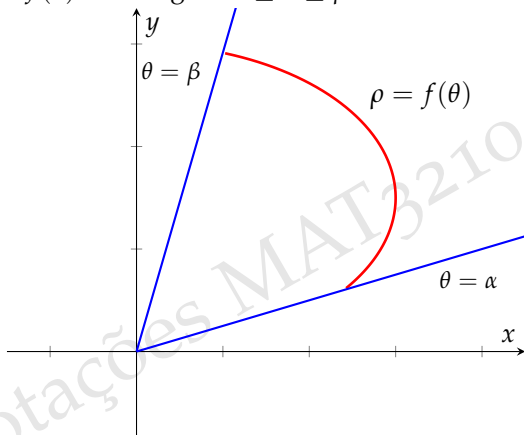
Exemplo 7.5

Sejam as equações do movimento da uma partícula dadas por $\gamma = (t^2, t^3)$, com $t \in [1, 2]$. Qual é distância a percorrida? Neste caso $x(t) = t^2$ e $y(t) = t^3$. Assim a distância percorrida é (aplicando (7.2)):

$$\begin{aligned} \int_1^2 \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2} dt &= \int_1^2 \sqrt{4t^2 + 9t^4} dt \\ &= \int_1^2 t \cdot \sqrt{4 + 9t^2} dt = \left| \begin{array}{l} u = 4 + 9t^2 \\ du = 18t dt \\ t = 1 \rightarrow u = 13 \\ t = 2 \rightarrow u = 40 \end{array} \right| \\ &= \int_{13}^{40} \frac{1}{18} \sqrt{u} du = \frac{1}{18 \cdot 3/2} \cdot u^{3/2} \Big|_{13}^{40} \\ &= \frac{1}{27} [40^{3/2} - 13^{3/2}] = \frac{1}{27} [80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}]. \end{aligned}$$

**7.3 Comprimento da curvas em coordenadas polares**

Nesta seção veremos o comprimento do arco da curva dada por $\rho = f(\theta)$ com ângulo $\alpha \leq \theta \leq \beta$.



Passando para equações paramétricas, temos

$$\begin{aligned} x(\theta) &= f(\theta) \cdot \cos \theta \\ y(\theta) &= f(\theta) \cdot \sin \theta. \end{aligned}$$

Agora derivando as equações, temos

$$\begin{aligned} x'(\theta) &= f'(\theta) \cdot \cos \theta - f(\theta) \cdot \sin \theta \\ y'(\theta) &= f'(\theta) \cdot \sin \theta + f(\theta) \cdot \cos \theta \end{aligned}$$

Alem disso observem que

$$\begin{aligned} [x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2 &= [f'(\theta) \cdot \cos \theta - f \cdot \sin \theta]^2 + [f'(\theta) \sin \theta + f \cdot \cos \theta]^2 \\ &= f'(\theta) \cdot \cos^2 \theta - 2f'(\theta)f \cos \theta \sin \theta + f^2 \sin^2 \theta + [f'(\theta)]^2 \sin^2 \theta + 2f'(\theta)f \cdot \sin \theta \cos \theta + f^2 \cos^2 \theta \\ &= f^2 \cdot (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + [f'(\theta)]^2 \cdot (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = f^2 + [f'(\theta)]^2. \end{aligned}$$

Agora, usando a fórmula (7.2), temos que o comprimento do arco da curva $\rho = f(\theta)$ com ângulo $\alpha \leq \theta \leq \beta$ é dado por

$$\text{Comprimento da curva} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta. \quad (7.3)$$

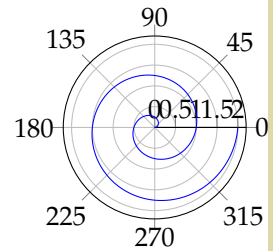
Exemplo 7.6

Vamos calcular o comprimento da curva $\rho = \theta$, com $0 \leq \theta \leq 1$. Observe que a curva é espiral como na figura do lado. Aplicando a fórmula (7.3) temos

$$\text{Comprimento} = \int_0^1 \sqrt{\theta^2 + 1} d\theta$$

Proseguindo como nos exercícios acima (veja também a Aula 3), temos

$$\begin{aligned} \text{Comprimento} &= \int_0^1 \sqrt{\theta^2 + 1} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 x dx \\ &= \frac{1}{2} (\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})) \end{aligned}$$



Exercício 7.1: (Trabalho p/ casa)

Seja $f(x) = 2x^{3/2}$. Calcule o comprimento do arco do gráfico de $f(x)$ no intervalo $[0, 1]$. Arredonde a resposta para três casas decimais após da vírgula.

Resposta: $\frac{2}{27} [10\sqrt{10} - 1] \approx 2.268$

Exercício 7.2: (Trabalho p/ casa)

Seja $f(x) = \sin x$. Calcule o comprimento do arco do gráfico de $f(x)$ no intervalo $[0, \pi]$. Use um computador ou calculadora para aproximar o valor da integral.

Resposta: ≈ 3.8202

Exercício 7.3: (Trabalho p/ casa)

Calcule o comprimento da curva $x(t) = 2 \cos^2 t$, $y(t) = 2 \cos t \sin t$, onde $0 \leq t \leq \pi$. Explique a resposta.

Resposta: 2π

Exercício 7.4: (Trabalho p/ casa)

Calcule o comprimento da curva $x(t) = t \sin t$, $y(t) = t \cos t$, onde $0 \leq t \leq 2\pi$.

Resposta: $\frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + (2\pi)^2} (2\pi) + \ln \left| \sqrt{1 + (2\pi)^2} + 2\pi \right| \right].$

Exercício 7.5: (Trabalho p/ casa)

Calcule o comprimento da curva $\rho(\theta) = 1/\theta$, onde $1 \leq \theta \leq 2$.

Resposta: $-\frac{\sqrt{5}}{2} + \ln(\sqrt{5} + 2) + \sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1).$

Anotações MAT3210 (Draft). Prof Kostiantyn

Aula 8. Momentos e centro de massa

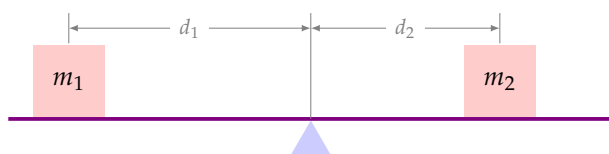
Nesta aula consideramos centros de massa e momentos. A ideia básica do centro de massa é a noção de um ponto de **equilíbrio**. Muitos de nós já vimos artistas que giram pratos nas pontas de palitos. Eles tentam manter vários deles girando sem permitir que nenhum deles caia. Se olharmos para um único prato (sem girá-lo), há um ponto ideal no prato onde ele se equilibra perfeitamente no palito. Se colocarmos o palito em qualquer lugar que não seja o ponto ideal, o prato não se equilibra e cai no chão. (É por isso que os artistas giram os pratos; o giro ajuda a evitar que os pratos caiam, mesmo que a vareta não esteja exatamente no lugar certo.) Matematicamente, esse ponto ideal é chamado de **centro de massa do prato**.

Nesta aula primeiro examinamos esses conceitos em um contexto unidimensional e, em seguida, expandiremos nosso desenvolvimento para considerar centros de massa de regiões bidimensionais e limitadas por gráficos de funções.



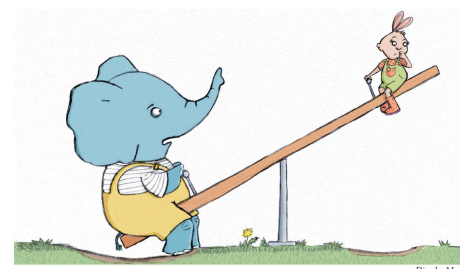
8.1 Centros de Massa e Momentos

Vamos começar olhando para o centro de massa em um contexto unidimensional. Considere um fio ou barra longa e fina de massa desprezível apoiada em um fulcro e suponha que colocamos objetos com massas m_1 e m_2 a distâncias d_1 e d_2 do fulcro, respectivamente, como mostrado na Figura de baixo.

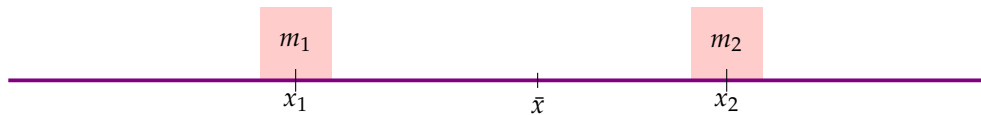


O exemplo mais comum da vida real de um sistema como este é uma gangorra de playground com crianças de pesos diferentes sentadas a distâncias diferentes do centro. Em uma gangorra, se uma criança se sentar em cada extremidade, a criança mais pesada afunda e a mais leve é erguida no ar. Se a criança mais pesada deslizar em direção ao centro, porém, a gangorra se equilibra. Aplicando este conceito às massas na barra, notamos que as massas se equilibram se e somente se

$$m_1 d_1 = m_2 d_2.$$



No exemplo da gangorra, equilibramos o sistema movendo as massas (crianças) em relação ao fulcro. No entanto, estamos realmente interessados em sistemas nos quais as massas não podem se mover e, em vez disso, equilibramos o sistema movendo o fulcro. Suponha que temos duas massas de pontos, m_1 e m_2 , localizadas numa reta numérica nos pontos x_1 e x_2 , respectivamente.



O centro de massa, $\bar{x}$, é o ponto onde o fulcro deve ser colocado para fazer o equilíbrio do sistema.

Assim, temos

$$\begin{aligned} m_1 |x_1 - \bar{x}| &= m_2 |x_2 - \bar{x}| \\ m_1 (\bar{x} - x_1) &= m_2 (x_2 - \bar{x}) \\ m_1 \bar{x} - m_1 x_1 &= m_2 x_2 - m_2 \bar{x} \\ \bar{x} (m_1 + m_2) &= m_1 x_1 + m_2 x_2 \end{aligned}$$

ou

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

A expressão no numerador da Equação acima, $m_1 x_1 + m_2 x_2$, é chamada de *primeiro momento do sistema em relação à origem*. Se o contexto for claro, geralmente abandonamos a palavra primeiro e apenas nos referimos a essa expressão como o *momento do sistema*. A expressão no denominador, $m_1 + m_2$, é a massa total do sistema. Assim, o centro de massa do sistema é o ponto no qual a massa total do sistema poderia ser concentrada sem alterar o momento.

Essa ideia não se limita apenas a massas de dois pontos. Em geral, se n massas, $m_1, m_2, \dots, m_n$, são colocados em uma reta numérica nos pontos $x_1, x_2, \dots, x_n$, respectivamente, então o centro de massa do sistema é dado por

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Exemplo 8.1

Suponha que quatro massas de pontos sejam colocadas em uma reta numérica da seguinte forma:

- $m_1 = 30\text{kg}$, colocado em $x_1 = -2m$
- $m_2 = 5\text{kg}$, colocado em $x_2 = 3m$
- $m_3 = 10\text{kg}$, colocado em $x_3 = 6m$
- $m_4 = 15\text{kg}$, colocado em $x_4 = -3m$.

Para encontrar o centro de massa primeiro precisamos calcular o momento do sistema:

$$M = \sum_{i=1}^4 m_i x_i = -60 + 15 + 60 - 45 = -30$$

Agora, para encontrar o centro de massa, precisamos da massa total do sistema:

$$m = \sum_{i=1}^4 m_i = 30 + 5 + 10 + 15 = 60\text{kg}$$

Assim, o centro de massa está em:

$$\bar{x} = \frac{M}{m} = -\frac{30}{60} = -\frac{1}{2}$$

E o centro de massa está localizado $1/2$ m à esquerda da origem.

Podemos generalizar este conceito para encontrar o centro de massa de um sistema de massas pontuais em um plano. O exemplo mais comum da vida é uma bandeja com copos que um garçom deve levar para os clientes (encontrando certo equilíbrio). Sejam $m_1, \dots, m_n$ as massas pontuais localizadas nos pontos $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ do plano. Denote por $m = \sum_{i=1}^n m_i$ a massa total do sistema. Neste caso, para encontrar o centro de massa $(\bar{x}, \bar{y})$ do sistema precisamos encontrar os momentos M_x e M_y separadamente para os eixos x e y seguindo a mesma ideia acima. Os momentos M_x e M_y do sistema em relação aos eixos x e y , respectivamente, são dados por:

$$M_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad M_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

Observe que a coordenada x do ponto é usada para calcular o momento em relação ao eixo y e vice-versa. A razão é que a coordenada x fornece a distância do ponto de massa ao eixo y , e a coordenada y fornece a distância ao eixo x . Dados os momentos as coordenadas do centro de massa $(\bar{x}, \bar{y})$ do sistema são:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$



Exemplo 8.2

Suponha que quatro massas de pontos sejam colocadas em uma reta numérica da seguinte forma:

- $m_1 = 2\text{kg}$, colocado em $(-1, 3)$,
- $m_2 = 6\text{kg}$, colocado em $(1, 1)$,
- $m_3 = 4\text{kg}$, colocado em $(2, -2)$.

Primeiro calculamos a massa total do sistema:

$$m = \sum_{i=1}^3 m_i = 2 + 6 + 4 = 12\text{kg}.$$

Em seguida, encontramos os momentos em relação aos eixos x e y :

$$M_y = \sum_{i=1}^3 m_i x_i = -2 + 6 + 8 = 12,$$

$$M_x = \sum_{i=1}^3 m_i y_i = 6 + 6 - 8 = 4.$$

Então nós temos

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{12}{12} = 1,$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

O centro de massa do sistema é $(1, 1/3)$, em metros.

8.2 Centro de massa de placas finas

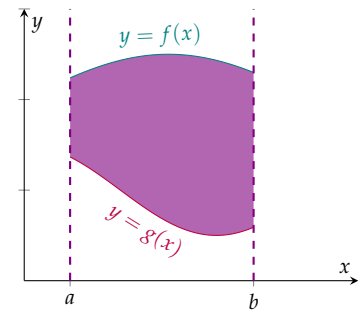
Até agora, examinamos sistemas de massas pontuais em uma linha e em um plano. Agora, em vez de ter a massa de um sistema concentrada em pontos discretos, queremos olhar para sistemas nos quais a massa do sistema é distribuída continuamente por uma fina folha de material. Para nossos propósitos, presumimos que a folha é fina o suficiente para que possa ser tratada como se fosse bidimensional. Essa folha é chamada de **lâmina**. A seguir, desenvolvemos técnicas para encontrar o centro de massa de uma lâmina. Nesta seção, também assumimos que a densidade da lâmina é constante e igual 1.

As lâminas são frequentemente representadas por uma região bidimensional em um plano. Visto que assumimos que a densidade da lâmina é constante, o centro de massa da lâmina depende apenas da forma da região correspondente no plano; não depende da densidade. Tal como acontece com os sistemas de massas pontuais, precisamos encontrar a massa total da lâmina, bem como os momentos da lâmina em relação aos eixos x e y .

Consideramos primeiro uma lâmina em forma de retângulo. Lembre-se de que o centro de massa de uma lâmina é o ponto onde

a lâmina se equilibra. Para um retângulo, esse ponto é o centro horizontal e vertical do retângulo. Com base nesse entendimento, fica claro que o centro de massa de uma lâmina retangular é o ponto de intersecção das diagonais.

Vamos voltar para lâminas mais gerais. Suponha que temos uma lâmina limitada acima pelo gráfico de uma função contínua $f(x)$, abaixo pelo gráfico de outra função contínua $g(x)$, e entre as retas $x = a$ e $x = b$, respectivamente, conforme mostrado na figura do lado.



Theorem 8.1: Centro de massa da lâmina

Seja R uma região limitada acima pelo gráfico de uma função contínua $f(x)$, abaixo pelo gráfico de outra função contínua $g(x)$ e entre as retas $x = a$ e $x = b$, respectivamente. Assim: a massa da lâmina é

$$m = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx. \quad (8.1)$$

Os momentos M_x e M_y da lâmina em relação aos eixos x e y , respectivamente, são

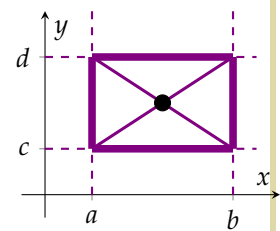
$$M_x = \int_a^b \frac{[f(x)]^2 - [g(x)]^2}{2} dx, \quad M_y = \int_a^b x[f(x) - g(x)] dx. \quad (8.2)$$

As coordenadas do centro de massa $(\bar{x}, \bar{y})$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}. \quad (8.3)$$

Exemplo 8.3

Considere o retângulo conforme figura do lado. Suponha que o ponto P é a intersecção das diagonais em retângulo. As coordenadas do ponto P são $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right)$. Por outro lado esse retângulo pode ser visto como a região limitada pelas retas $y = d$, $y = c$, $x = a$ e $x = b$, assim aplicando as fórmulas (8.1)–(8.3) temos:



$$\text{Massa} = \int_a^b [d - c] dx = (d - c) \cdot (b - a).$$

$$M_y = \int_a^b x[d - c] dx = (d - c) \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = (d - c) \cdot \frac{b^2 - a^2}{2},$$

$$M_x = \int_a^b \frac{d^2 - c^2}{2} dx = \frac{d^2 - c^2}{2} \cdot (b - a).$$

Assim

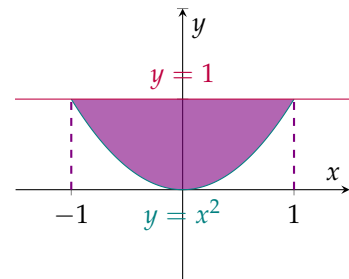
$$\bar{x} = \frac{(d - c) \cdot \frac{b^2 - a^2}{2}}{(d - c) \cdot (b - a)} = \frac{a + b}{2}, \quad \bar{y} = \frac{\frac{d^2 - c^2}{2} \cdot (b - a)}{(d - c) \cdot (b - a)} = \frac{c + d}{2}.$$

Assim, ponto $P = (\bar{x}, \bar{y})$ é centro de massa do retângulo.

Exemplo 8.4

Vamos determinar o centro de massa da região limitada pela reta $y = 1$ e parábola $y = x^2$. Temos que os dois gráficos se encontram quando $x^2 = 1$ ou seja $x = \pm 1$. Assim aplicando as fórmulas (8.1)–(8.3) temos:

$$\begin{aligned}\text{Massa } m &= \int_{-1}^1 [1 - x^2] dx \\ &= \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 \\ &= \left[1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right] = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$



Momentos:

$$M_y = \int_{-1}^1 x \cdot (1 - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 = 0,$$

$$M_x = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 [1^2 - x^4] dx = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (1 - x^4) dx = \frac{1}{4} \left(x - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-1}^1 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

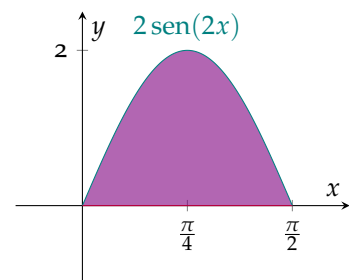
$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{0}{\frac{4}{3}} = 0, \quad \bar{y} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{4}{3}} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5}.$$

Assim o centro de massa está no $(0, 3/5)$.

Exemplo 8.5

Vamos determinar o centro de massa da região limitada pela reta $y = 0$ e $y = 2 \sin(2x)$ no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Temos que os dois gráficos se encontram em $x = 0$ ou $x = \frac{\pi}{2}$. Assim aplicando as fórmulas (8.1)–(8.3) temos:

$$\text{Massa } m = \int_0^{\pi/2} 2 \sin 2x dx = 2 \cdot \left(-\frac{\cos 2x}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = [1 + 1] = 2.$$



$$M_y = \int_0^{\pi/2} x \cdot 2 \sin 2x dx = -x \cdot \cos 2x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos 2x dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\sin 2x}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2},$$

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} 4 \sin^2 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} 2(1 - \cos 4x) dx = \frac{1}{2} \left[2x - \frac{\sin 4x}{2} \right] \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

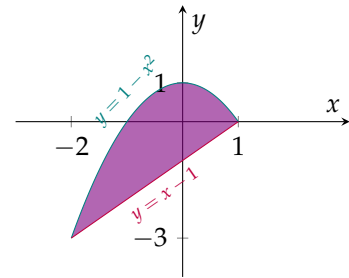
Assim

$$\bar{x} = \frac{\pi/2}{2} = \frac{\pi}{4}, \quad \bar{y} = \frac{\pi/2}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Assim o centro de massa está no $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

Exemplo 8.6

Vamos determinar o centro de massa da região limitada pela reta $y = 1$ e parábola $y = 1 - x^2$. Temos que os dois gráficos se encontram quando $1 - x^2 = x - 1$ ou seja $x = -2$ ou $x = 1$. Assim aplicando as fórmulas (8.1)–(8.3) temos:



$$\begin{aligned} \text{Massa } m &= \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \\ &= \int_{-2}^1 [1 - x^2 - (x - 1)] dx \\ &= \int_{-2}^1 (2 - x^2 - x) dx \\ &= \left[2x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-2}^1 \\ &= \left[2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right] - \left[-4 + \frac{8}{3} - 2 \right] \\ &= \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_x &= \int_a^b \frac{1}{2} ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^1 \left((1 - x^2)^2 - (x - 1)^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^1 (x^4 - 3x^2 + 2x) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^5}{5} - x^3 + x^2 \right]_{-2}^1 = -\frac{27}{10}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= \int_a^b x[f(x) - g(x)] dx = \int_{-2}^1 x[(1 - x^2) - (x - 1)] dx \\ &= \int_{-2}^1 x[2 - x^2 - x] dx = \int_{-2}^1 (2x - x^3 - x^2) dx \\ &= \left[x^2 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^1 = -\frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Assim

$$\bar{x} = \frac{-9/4}{9/2} = -\frac{1}{2}, \quad \bar{y} = \frac{-27/10}{9/2} = -\frac{3}{5}.$$

Assim o centro de massa está no $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}\right]$.

Exercício 8.1: (Trabalho p/ casa)

Calcule o centro de massa da região limitada por $y = \sqrt{x}$, eixo- x , e as retas $x = 0$ e $x = 4$.

Resposta: $(12/5, 3/4)$.

Exercício 8.2: (Trabalho p/ casa)

Calcule o centro de massa da região limitada por $y = x^2$, eixo- x , e as retas $x = 0$ e $x = 2$.

Resposta: $(3/2, 6/5)$.

Exercício 8.3: (Trabalho p/ casa)

Calcule o centro de massa da região limitada por $y = 1 - x^2$ e eixo- x .

Resposta: $(0, 2/5)$.

Exercício 8.4: (Trabalho p/ casa)

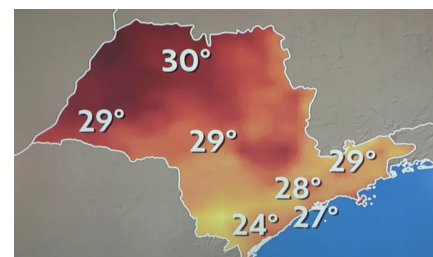
Calcule o centro de massa da região limitada por $y = x^3$ e $y = \sqrt{x}$.

Resposta: $(12/25, 3/7)$.

Anotações MAT3210 (Draft). Prof Kostiantyn

Aula 9. Funções de várias variáveis

Até agora a gente trabalhou somente com funções de uma variável real. Mas, no mundo real, as quantidades físicas muitas vezes dependem de duas ou mais variáveis. Por exemplo, a temperatura no estado de São Paulo depende de duas coordenadas do local (como na imagem do lado). A partir dessa aula (e até final do curso) vamos estudar as funções de várias variáveis e estenderemos as ideias básicas do cálculo diferencial para tais funções.

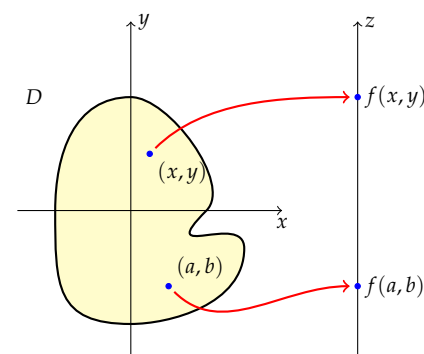


9.1 Funções de duas variáveis

A definição de uma função de duas variáveis é muito semelhante à definição de uma função de uma variável. A principal diferença é que, em vez de mapear valores de uma variável para valores de outra variável, mapeamos pares ordenados de variáveis para outra variável.

Definição

Uma função f de duas variáveis é uma regra que atribui a cada par ordenado de números reais (x, y) em um conjunto D , um único número real denotado por $f(x, y)$. O conjunto D é o **domínio** de f e sua **imagem** é o conjunto de valores que f assume, ou seja, $\{f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$.



Muitas vezes escrevemos $z = f(x, y)$ para tornar explícito o valor assumido pela f no ponto geral (x, y) . As variáveis x e y são **variáveis independentes** e z é a **variável dependente**.

Uma função de duas variáveis é apenas uma função cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ e cuja imagem é um subconjunto de $\mathbb{R}$. Uma forma de visualizar tal função é por meio de um diagrama de setas (veja a Figura do lado), onde o domínio D é representado como um subconjunto do plano e imagem é um conjunto de números em uma linha real, mostrado como um eixo- z . Por exemplo, se $f(x, y)$ representa a temperatura em um ponto (x, y) em uma placa de metal plana com a forma de D , podemos pensar no eixo- z como um termômetro exibindo as temperaturas registradas.

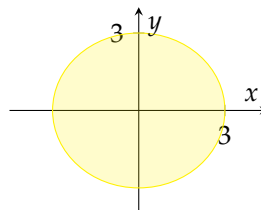
Se uma função f é dada por uma fórmula e nenhum domínio é especificado, então o domínio de f é entendido como o conjunto de todos os pares para os quais a expressão dada é um número real bem definido.

Exemplo 9.1

Encontre o domínio e a imagem de cada uma das seguintes funções:

(a) $f(x, y) = 3x + 5y + 2$,

(b) $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.



(a). Este é um exemplo de função linear em duas variáveis. Não há valores ou combinações de x e y tais que $f(x, y)$ seja indefinido, então o domínio de f é $\mathbb{R}^2$. Para determinar a imagem, primeiro escolha um valor para z .

Precisamos encontrar uma solução para a equação $f(x, y) = z$,

ou $3x - 5y + 2 = z$. Uma dessas soluções pode ser obtida definindo primeiro $y = 0$, o que resulta na equação $3x + 2 = z$. A solução para esta equação é $x = \frac{z-2}{3}$, o que dá o par ordenado $(\frac{z-2}{3}, 0)$ como uma solução para a equação $f(x, y) = z$ para qualquer valor de z .

Portanto, a imagem da função são todos os números reais, ou $\mathbb{R}$.

(b). Para que a função $g(x, y)$ tenha um valor real, a quantidade sob a raiz quadrada deve ser não negativa: $9 - x^2 - y^2 \geq 0$. Essa desigualdade pode ser escrita na forma $x^2 + y^2 \leq 9$. Portanto, o domínio de $g(x, y)$ é $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$. O desenho deste conjunto de pontos pode ser descrito como um disco de raio 3 centrado na origem. O domínio inclui o círculo de fronteira, conforme mostrado no desenho acima.

Para determinar a imagem de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ começamos com um ponto (x_0, y_0) na fronteira do domínio, que é definido pela relação $x^2 + y^2 = 9$. Segue-se que $x_0^2 + y_0^2 = 9$ e

$$g(x_0, y_0) = \sqrt{9 - x_0^2 - y_0^2} = \sqrt{9 - (x_0^2 + y_0^2)} = \sqrt{9 - 9} = 0.$$

Se $x_0^2 + y_0^2 = 0$ (em outras palavras, $x_0 = y_0 = 0$), então

$$g(x_0, y_0) = \sqrt{9 - x_0^2 - y_0^2} = \sqrt{9 - (x_0^2 + y_0^2)} = \sqrt{9 - 0} = 3.$$

Este é o valor máximo da função. Dado qualquer valor c entre 0 e 3, podemos encontrar todo um conjunto de pontos dentro do domínio de g tal que $g(x, y) = c$:

$$\begin{aligned}\sqrt{9 - x^2 - y^2} &= c, \\ 9 - x^2 - y^2 &= c^2, \\ x^2 + y^2 &= 9 - c^2.\end{aligned}$$

Como $9 - c^2 > 0$, isso descreve um círculo de raio $\sqrt{9 - c^2}$ centrado na origem. Qualquer ponto neste círculo satisfaz a equação $g(x, y) = c$. Portanto, a imagem desta função é o intervalo $[0, 3]$.

Exercício 9.1

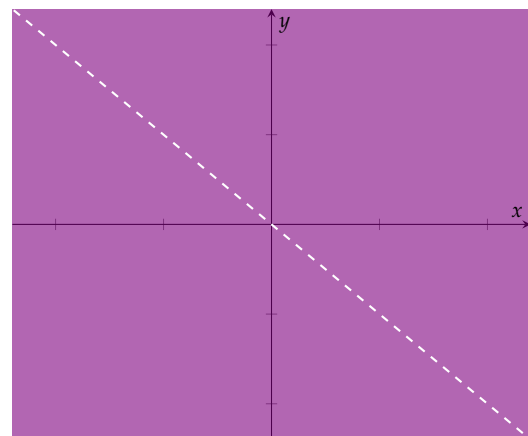
Encontre e desenhe o domínio da função $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$.

Solução 9.1

A função está definida para todos pontos onde denominador da expressão $\frac{x-y}{x+y}$ é não-nulo. Assim o domínio é dado por

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq -y\}.$$

O desenho é do lado.

**Exercício 9.2**

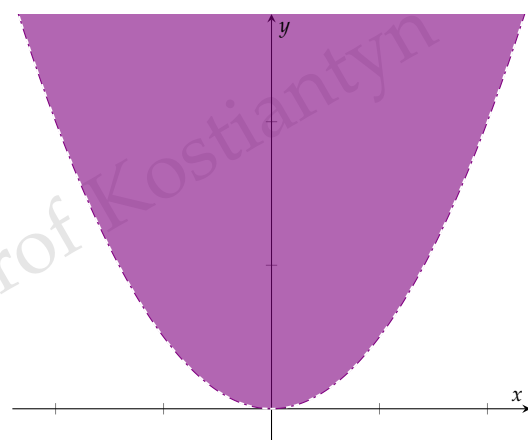
Encontre e desenhe o domínio da função $f(x, y) = \ln(y - x^2)$.

Solução 9.2

A função está definida quando o argumento da $\ln$ é positivo. Assim o domínio é dado por

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}.$$

O desenho é do lado. Observe que precisamos tirar a fronteira (é parábola $y = x^2$) do domínio.

**Exercício 9.3**

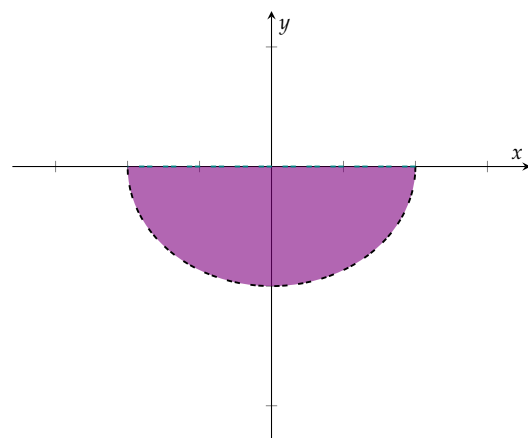
Encontre e desenha o domínio da função $f(x, y) = \frac{\ln(-y)}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$.

Solução 9.3

A função está definida quando o argumento da $\ln$ é positivo e argumento de raiz é positivo também. Assim o domínio é dado por

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0, x^2 + y^2 < 1\}.$$

O desenho é do lado. Observe que precisamos tirar a fronteira do domínio.



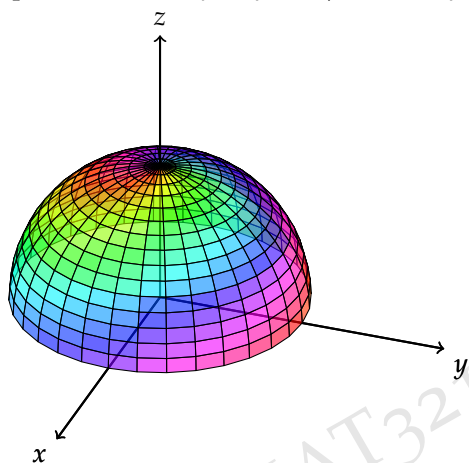
9.2 Gráficos das Funções de Duas Variáveis

Suponha que desejamos representar graficamente a função $z = f(x, y)$. Esta função possui duas variáveis independentes x e y e uma variável dependente z . Ao representar graficamente uma função $y = g(x)$ de uma variável, usamos o plano cartesiano. Podemos representar graficamente qualquer par ordenado (x, y) no plano, e cada ponto no plano tem um par ordenado (x, y) associado

a ele. Com uma função de duas variáveis, cada par ordenado (x, y) no domínio da função é mapeado para um número real z . Portanto, o gráfico da função f consiste em triplas ordenadas (x, y, z) . O gráfico de uma função $z = f(x, y)$ de duas variáveis é chamado de **superfície**.

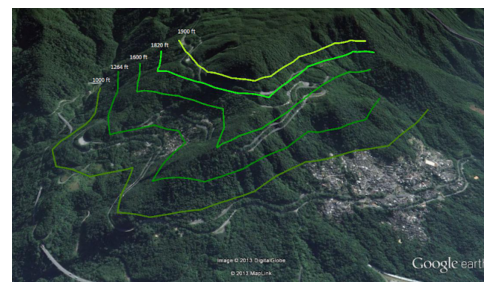
Para entender melhor o conceito de traçar um conjunto de triplas ordenadas para obter uma superfície no espaço tridimensional, imagine o sistema de coordenadas (x, y) plano. Então cada ponto no domínio da função f tem um valor z exclusivo associado a ele. Se z for positivo, o ponto representado no gráfico estará localizado acima do plano xy ; se z for negativo, o ponto representado no gráfico estará localizado abaixo do plano xy . O conjunto de todos os pontos representados no gráfico torna-se a superfície bidimensional que é o gráfico da função f .

Por exemplo, abaixo representamos o gráfico da função do Exemplo acima onde $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

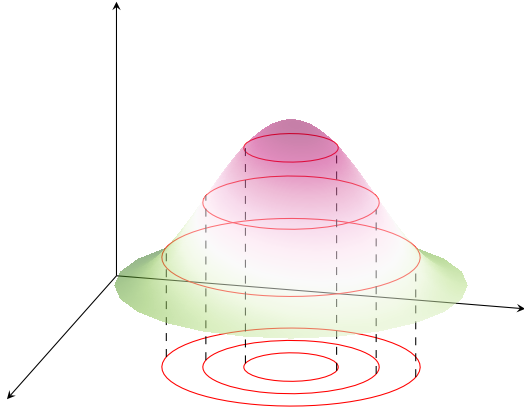


9.3 Curvas de Nível

Para caminhar por trilhas acidentadas, pode-se utilizar um mapa topográfico que mostra como as trilhas mudam de forma abrupta. Um mapa topográfico contém linhas curvas chamadas linhas de contorno. Cada linha de contorno corresponde aos pontos no mapa que têm a mesma elevação (veja figura de baixo). Uma curva de nível de uma função de duas variáveis $f(x, y)$ é completamente análoga a uma linha de contorno em um mapa topográfico.



Mapa topográfico da Serra do Mar



Definição

Dada uma função $f(x, y)$ e um número c na imagem de f , uma curva de nível de uma função de duas variáveis para o valor c é definida como o conjunto de pontos que satisfazem a equação $f(x, y) = c$.

Voltando à função $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, podemos determinar as curvas de nível desta função. A imagem de g é o intervalo fechado $[0, 3]$. Primeiro, escolhemos qualquer número neste intervalo fechado – digamos, $c = 2$. A curva de nível correspondente a $c = 2$ é descrita pela equação

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} = 2.$$

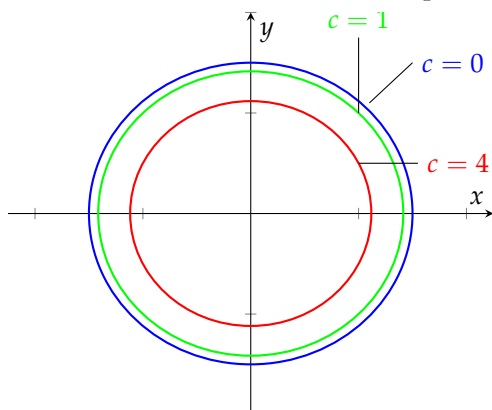
Para simplificar, eleve ao quadrado ambos os lados desta equação:

$$9 - x^2 - y^2 = 4.$$

Agora, multiplique ambos os lados da equação por -1 e adicione 9 a cada lado:

$$x^2 + y^2 = 5.$$

Esta equação descreve um círculo centrado na origem com raio $\sqrt{5}$. Usar valores de c entre 0 e 3 produz outros círculos também centralizados na origem. Se $c = 3$, então o círculo tem raio 0, então ele consiste apenas da origem. Abaixo temos o desenho das curvas de nível desta função correspondendo a $c = 0, 1, 2$ e 3.



Exemplo 9.2

Dada a função $f(x, y) = \sqrt{8 + 8x - 4y - 4x^2 - y^2}$, encontre a curva de nível correspondente a $c = 0$. Em seguida, crie um mapa de contorno para esta função. Quais são o domínio e a imagem de f ?

Para encontrar a curva de nível para $c = 0$, precisamos resolver $f(x, y) = 0$. Isto dá

$$0 = \sqrt{8 + 8x - 4y - 4x^2 - y^2}.$$

Em seguida, elevamos ao quadrado ambos os lados e multiplicamos ambos os lados da equação por -1 :

$$4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 8 = 0.$$

Agora, nós reorganizamos os termos, colocando os termos x e os termos y juntos, e adicionamos 8 a cada lado:

$$4x^2 - 8x + y^2 + 4y = 8.$$

Em seguida, agrupamos os pares de termos contendo a mesma variável entre parênteses e fator 4 do primeiro par:

$$4(x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) = 8.$$

Agora completamos o quadrado em cada par de parênteses e adicionamos o valor correto ao lado direito:

$$4(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 8 + 4(1) + 4.$$

Em seguida, fatoramos o lado esquerdo e simplificamos o lado direito:

$$4(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16.$$

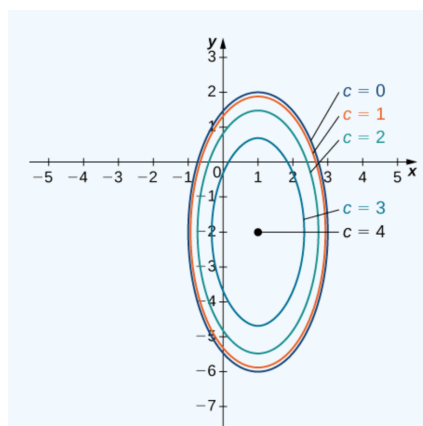
Por último, dividimos ambos os lados por 16:

$$\frac{(x - 1)^2}{4} + \frac{(y + 2)^2}{16} = 1.$$

Esta equação descreve uma elipse centrada em $(1, -2)$. Podemos repetir o mesmo argumento para valores de c menores que 4. Então, a Equação torna-se

$$\frac{4(x - 1)^2}{16 - c^2} + \frac{(y + 2)^2}{16 - c^2} = 1.$$

para um valor arbitrário de c . A figura de baixo mostra um mapa de contorno para $f(x, y)$ usando os valores $c = 0, 1, 2$ e 3. Quando $c = 4$, a curva de nível é o ponto $(-1, 2)$.



Na prática para desenhar os gráficos é bem útil fazer vários cortes simples como $x = 0$ e $y = 0$ para ter ideia de como o gráfico deve aparecer. Vamos fazer vários exemplos para ver isso.

Exemplo 9.3

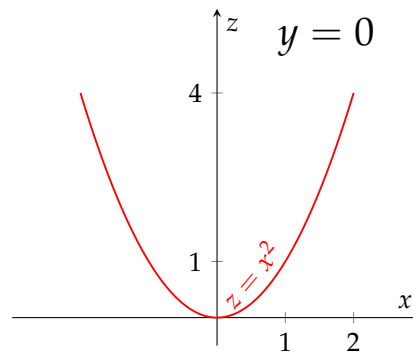
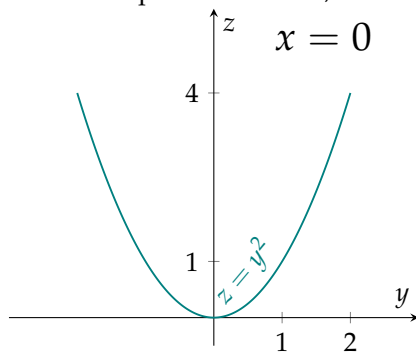
Vamos desenhar o gráfico da função $f(x, y) = x^2 + y^2$. Primeiramente observe que as curvas de nível tem forma

$$x^2 + y^2 = c,$$

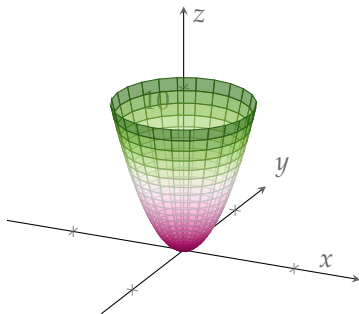
ou seja são circunferências de raio $\sqrt{c}$. Assim quanto "mais longe" o ponto da origem sua imagem no gráfico é "mais alto". Agora fazendo os cortes simples $x = 0$ e $y = 0$ temos

$$z = f(0, y) = y^2, \quad z = f(x, 0) = x^2.$$

Assim contando com plano $x = 0$ recebemos a parábola $z = y^2$ e cortando com o plano $y = 0$ recebemos a parábola $z = x^2$, conforme imagens abaixo.



Juntando a informação sobre as curvas de nível e os cortes temos que o gráfico da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ é o **paraboloide** abaixo.



Exemplo 9.4

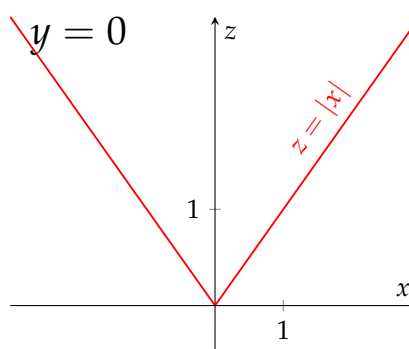
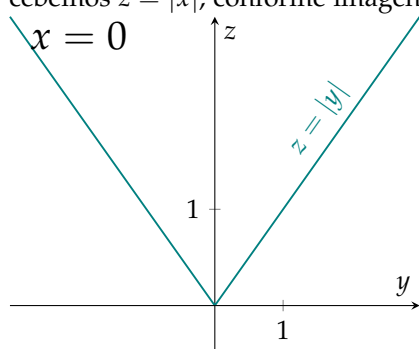
Vamos desenhar o gráfico da função $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Primeiramente observe que as curvas de nível tem forma

$$x^2 + y^2 = c^2,$$

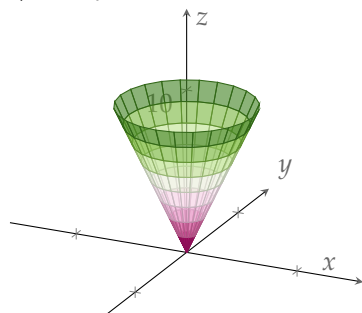
ou seja são circunferências de raio c . Agora fazendo os cortes simples $x = 0$ e $y = 0$ temos

$$z = f(0, y) = \sqrt{y^2} = |y|, \quad z = f(x, 0) = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Assim contando com plano $x = 0$ recebemos o gráfico a $z = |y|$ e cortando com o plano $y = 0$ recebemos $z = |x|$, conforme imagens abaixo.



Juntando a informação sobre as curvas de nível e os cortes temos que o gráfico da função $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ é o **cone** abaixo.



Exemplo 9.5

Vamos desenhar o gráfico da função $f(x, y) = y^2 - x^2$. Primeiramente observe que as curvas de nível tem forma

$$y^2 - x^2 = c,$$

No caso particular $c = 0$ temos

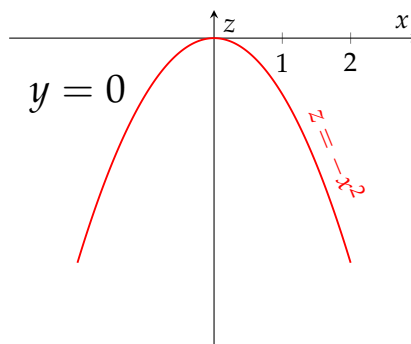
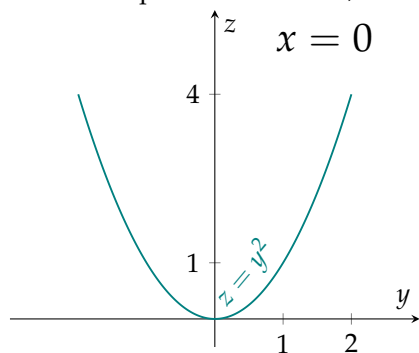
$$(x - y)(y + x) = 0,$$

ou seja par das retas $x = y$ e $x = -y$ no plano. Quando $c \neq 0$ a curva de nível correspondente é uma hipérbole.

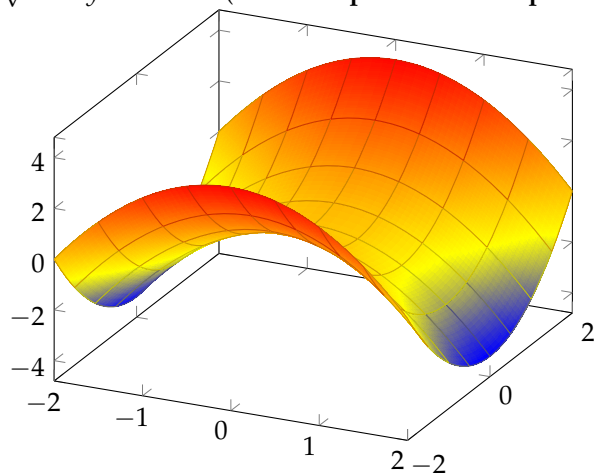
Agora fazendo os cortes simples $x = 0$ e $y = 0$ temos

$$z = f(0, y) = y^2, \quad z = f(x, 0) = -x^2.$$

Assim contando com plano $x = 0$ recebemos a parábola $z = y^2$ e cortando com o plano $y = 0$ recebemos a parábola $z = -x^2$, conforme imagens abaixo.



Juntando a informação sobre as curvas de nível e os cortes temos que o gráfico da função $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ é abaixo (chamado **parabolóide hiperbólico**).



Exercício 9.4: (Trabalho p/ casa)

Encontre e esboce o domínio das seguintes funções:

(a) $f(x, y) = \sqrt{2x - y},$

(b) $f(x, y) = \sqrt{xy},$

(c) $f(x, y) = \frac{\sqrt{y - x^2}}{1 - x^2}.$

Exercício 9.5: (Trabalho p/ casa)

Encontre e represente graficamente a curva de nível da função

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 6x + 2y$$

correspondendo a $c = 15$.

Resposta: O círculo com raio 5 centrado em $(3, -1)$.

Anotações MAT3210 (Draft). Prof Kostiantyn

Aula 10. Limites

Nesta aula daremos uma olhada nos limites que envolvem funções de mais de uma variável. Na verdade, vamos nos concentrar principalmente nos limites das funções de duas variáveis, mas as ideias podem ser estendidas para funções com mais de duas variáveis.

Antes de entrarmos nisso, vamos relembrar brevemente como funcionam os limites das funções de uma variável. Nós dizemos isso,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

se,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

Além disso, lembre-se disso,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

é um limite à direita e exige que olhemos apenas para os valores de x que são maiores que a . Da mesma forma,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

é um limite do lado esquerdo e exige que olhemos apenas para os valores de x que são menores que a .

Em outras palavras, teremos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ se $f(x)$ aproxima L independentemente como x aproxima o ponto a (do lado esquerdo, direito ou ambos).

Agora, observe que, neste caso, existem apenas dois caminhos que podemos tomar conforme avançamos em direção a $x = a$. Podemos nos mover da esquerda ou podemos mover da direita. Então, para que o limite de uma função de uma variável exista, a função deve estar se aproximando do mesmo valor conforme tomamos cada um desses caminhos em direção a $x = a$.

Com funções de duas variáveis, teremos que fazer algo semelhante, exceto que desta vez (potencialmente) haverá muito mais trabalho envolvido. Vamos primeiro abordar a notação e ter uma ideia do que vamos pedir nesses tipos de limites.

Estaremos pedindo para tomar o limite da função $f(x, y)$ se x aproxima a e y aproxima b . Isso pode ser escrito de várias maneiras. Aqui estão algumas das notações usuais:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$$

Usaremos a segunda notação com mais frequência neste curso. A segunda notação também é um pouco mais útil para ilustrar o que realmente estamos fazendo aqui quando determinamos um limite. Ao tomar o limite de uma função de duas variáveis, estamos realmente perguntando o que o valor de f está fazendo enquanto movemos cada vez mais perto do ponto.

Assim como com os limites das funções de uma variável, para que esse limite exista, a função deve estar se aproximando do mesmo valor, independentemente do caminho que tomamos conforme avançamos em direção a .

O problema que imediatamente enfrentamos é que há literalmente um número infinito de caminhos que podemos seguir à medida que avançamos em direção a . Aqui estão alguns exemplos de caminhos que podemos seguir.

Vamos comparar o comportamento das funções

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

como x e y se aproximam de 0 [e, portanto, o ponto (x, y) se aproxima da origem].

Na tabela de baixo mostremos os valores da função $f(x, y)$ para os pontos (x, y) pertos da origem $(0, 0)$.

$y \backslash x$	-1.0	-0.5	-0.2	0	0.2	0.5	1.0
-1.0	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455
-0.5	0.759	0.959	0.986	0.990	0.986	0.959	0.759
-0.2	0.829	0.986	0.999	1.000	0.999	0.986	0.829
0	0.841	0.990	1.000		1.000	0.990	0.841
0.2	0.829	0.986	0.999	1.000	0.999	0.986	0.829
0.5	0.759	0.959	0.986	0.990	0.986	0.959	0.759
1.0	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455

Respectivamente, na tabela de baixo mostremos os valores da função $g(x, y)$ para os pontos (x, y) perto da origem $(0, 0)$.

$y \backslash x$	-1.0	-0.5	-0.2	0	0.2	0.5	1.0
-1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000
-0.5	-0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	-0.600
-0.2	-0.923	-0.724	0.000	1.000	0.000	-0.724	-0.923
0	-1.000	-1.000	-1.000		-1.000	-1.000	-1.000
0.2	-0.923	-0.724	0.000	1.000	0.000	-0.724	-0.923
0.5	-0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	-0.600
1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000

Acontece que se (x, y) se aproxima de $(0, 0)$ os valores de $f(x, y)$ se aproximam de 1, enquanto os valores de $g(x, y)$ não se aproximam de nenhum número. Acontece que essas suposições baseadas em evidências numéricas estão corretas, e escrevemos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{não existe}$$

Em geral, usamos a notação

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$$

para indicar que os valores de $f(x,y)$ se aproximam do número L conforme o ponto (x,y) se aproxima do ponto (a,b) ao longo de qualquer caminho que permaneça dentro do domínio de f . Em outras palavras, podemos tornar os valores de $f(x,y)$ tão próximos de L quanto quisermos, levando o ponto (x,y) suficientemente próximo do ponto (a,b) , mas não igual a (a,b) .

Exemplo 10.1

Vamos mostrar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

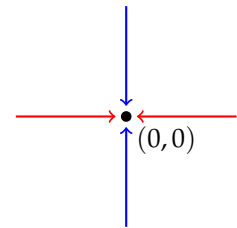
não existe. Seja $f(x,y) = (x^2) / (x^2 + y^2)$. Primeiro vamos nos aproximar $(0,0)$ ao longo do eixo x (caminho vermelho na figura do lado). Então $y = 0$ dá $f(x,0) = x^2/x^2 = 1$ para todos $x \neq 0$, então

$$f(x,y) \rightarrow 1 \text{ quando } (x,y) \rightarrow (0,0),$$

ao longo do eixo x . Agora nos aproximamos ao longo do eixo y (caminho azul na figura do lado) colocando $x = 0$. Então $f(0,y) = \frac{0}{y^2} = 0$ para todos $y \neq 0$, assim

$$f(x,y) \rightarrow 0 \text{ quando } (x,y) \rightarrow (0,0),$$

ao longo do eixo y . Como f tem dois limites diferentes ao longo de dois caminhos diferentes, o limite não existe.



Exemplo 10.2

Vamos mostrar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

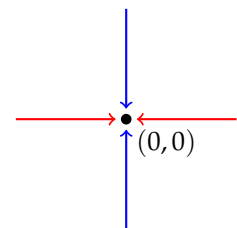
não existe. Seja $f(x,y) = (x^2 - y^2) / (x^2 + y^2)$. Primeiro vamos nos aproximar $(0,0)$ ao longo do eixo x . Então $y = 0$ dá $f(x,0) = x^2/x^2 = 1$ para todos $x \neq 0$, então

$$f(x,y) \rightarrow 1 \text{ quando } (x,y) \rightarrow (0,0),$$

ao longo do eixo x . Agora nos aproximamos ao longo do eixo y colocando $x = 0$. Então $f(0,y) = \frac{-y^2}{y^2} = -1$ para todos $y \neq 0$, assim

$$f(x,y) \rightarrow -1 \text{ quando } (x,y) \rightarrow (0,0),$$

ao longo do eixo y . Como f tem dois limites diferentes ao longo de dois caminhos diferentes, o limite não existe.



Exemplo 10.3

Vamos mostrar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

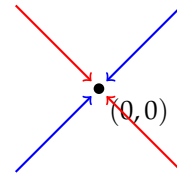
não existe. Seja $f(x, y) = (xy) / (x^2 + y^2)$. Neste caso vamos primeiro aproximar $(0,0)$ ao longo da reta $x = y$. Então $y = x$ dá $f(x, x) = x^2 / (x^2 + x^2) = 1/2$ para todos $x \neq 0$, então

$$f(x, y) \rightarrow \frac{1}{2} \text{ quando } (x, y) \rightarrow (0, 0),$$

ao longo da reta $x = y$. Agora nos aproximamos ao longo da reta $y = -x$. Então $f(x, -x) = \frac{-xy}{x^2 + y^2} = -\frac{1}{2}$ para todos $y \neq 0$, assim

$$f(x, y) \rightarrow -\frac{1}{2} \text{ quando } (x, y) \rightarrow (0, 0),$$

ao longo da reta $x = -y$. Como f tem dois limites diferentes ao longo de dois caminhos diferentes, o limite não existe.

**Exemplo 10.4**

Vamos mostrar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

não existe. Seja $f(x, y) = (x^2 y) / (x^4 + y^2)$. Aproximando $(0,0)$ ao longo do eixo x , temos $f(x, 0) = 0 / (x^4) = 0$ para todos $x \neq 0$, então

$$f(x, y) \rightarrow 0 \text{ quando } (x, y) \rightarrow (0, 0),$$

ao longo de eixo x . Aproximando ao longo do eixo y temos $f(0, y) = \frac{0}{y^2} = 0$ para todos $y \neq 0$, assim

$$f(0, y) \rightarrow 0 \text{ quando } (x, y) \rightarrow (0, 0),$$

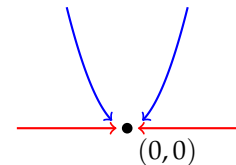
ao longo do eixo y . Agora aproximando ao longo da reta $x = y$ temos $f(x, x) = \frac{x^3}{x^4 + x^2} = \frac{x}{x^2 + 1}$ para todos $x \neq 0$. Lembra-se que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$, assim

$$f(x, x) \rightarrow 0 \text{ quando } (x, y) \rightarrow (0, 0),$$

ao longo da reta $x = y$. Temos que 3 caminhos diferentes dão a mesma resposta, mas isso não garante que o limite existe e igual a zero. Considere o caminho quando $y = x^2$ (caminho azul na figura). Assim $f(x, x^2) = x^4 / (x^4 + x^4) = 1/2$ para todos $x \neq 0$, ou seja

$$f(x, x^2) \rightarrow \frac{1}{2} \text{ quando } (x, y) \rightarrow (0, 0),$$

ao longo do caminho $y = x^2$. Como f tem dois limites diferentes ao longo de dois caminhos diferentes, o limite não existe.



10.1 Teorema do Confronto

Lembra-se que para calcular os limites da função de uma variável real um resultado bem útil é o Teorema de confronto (veja Lembrete do lado). Temos um análogo desse Teorema para funções de duas variáveis reais.

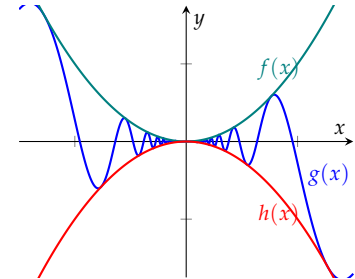
Lembrete. Sejam $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ e seja a um ponto, tais que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$$

e

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Então, resulta destas condições que: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$



Theorem 10.1: Teorema de confronto. Versão 1.

Sejam $f(x, y)$, $g(x, y)$ e $h(x, y)$ e seja (a, b) um ponto, tais que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} h(x, y)$$

e

$$f(x, y) \leq g(x, y) \leq h(x, y),$$

para todos (x, y) "pertos" do ponto (a, b) . Então, resulta destas condições que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) = L.$$

Na prática vamos aplicar muito a seguinte versão do Teorema de Confronto (que segue diretamente da primeira versão).

Theorem 10.2: Teorema de confronto. Versão 2.

Sejam $f(x, y)$ e $g(x, y)$ e seja (a, b) um ponto, tais que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = 0$$

e $g(x, y)$ é uma função limitada em ponto (a, b) , ou seja existe M tal que

$$|g(x, y)| \leq M,$$

para todos (x, y) "pertos" do ponto (a, b) . Então, resulta destas condições que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) \cdot g(x, y) = 0.$$

Antes de ver alguns exemplos, vamos observar que função

$g(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ é limitada no todo plano xy . De fato

$$0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2.$$

assim

$$0 \leq \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq 1.$$

Exemplo 10.5

Vamos calcular

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}.$$

Temos que $h(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ é função limitada, assim

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

Aplicando o Teorema 10.2 pois, obviamente que $x \rightarrow 0$ quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Observação 10.1

A cima vimos que a função $g(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ é limitada, mas o limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

não existe pelo Exemplo 10.1. Se a função $\tilde{g}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ fosse limitada o limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \cdot \frac{x}{x^2 + y^2},$$

existiria. De fato, temos

$$\begin{aligned} x = 10^{-1}, y = 0, & \Rightarrow \tilde{g}(10^{-1}, 0) = \frac{10^{-1}}{10^{-2} + 0} = 10 \\ x = 10^{-10}, y = 0, & \Rightarrow \tilde{g}(10^{-10}, 0) = \frac{10^{-10}}{10^{-20} + 0} = 10^{10} \\ & \vdots \end{aligned}$$

Assim os valores da função $\tilde{g}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ crescem ilimitadamente quando (x, y) aproximam o ponto $(0, 0)$ é portanto $\tilde{g}(x, y)$ não é limitada em ponto $(0, 0)$.

Exemplo 10.6

Vamos calcular

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Temos que $h(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ é função limitada, pois

$$0 \leq x \leq \sqrt{x^2 + y^2},$$

para todos (x, y) . Assim

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Aplicando o Teorema 10.2 pois, obviamente que $y \rightarrow 0$ quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Exemplo 10.7

Vamos calcular

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[\frac{x^6}{x^6 + y^2} \cdot \text{sen}(x^3 \cdot y) \right].$$

Função $f(x, y) = \frac{x^6}{x^6 + y^2}$ é função limitada (mostre!), além disso

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \text{sen}(x^3 \cdot y) = 0,$$

pois $x^3 \cdot y \rightarrow 0$ quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ e sen é uma função contínua (vamos explicar melhor isso na próxima aula). Assim o Teorema 10.2 temos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[\frac{x^6}{x^6 + y^2} \cdot \text{sen}(x^3 \cdot y) \right] = 0.$$

10.2 Propriedades de Limites

Além do Teorema do confronto, na prática é bem útil aplicar as seguintes propriedades dos limites:

Theorem 10.3: Propriedades dos limites.

Sejam $f(x, y)$, $g(x, y)$ duas funções. Assim

(1) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = 0$ se e somente se $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} |f(x, y)| = 0$.

(2) Se $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L_1$ e $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) = L_2$, então:

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [c \cdot f(x, y)] = c \cdot L_1$, para qualquer constante c ;

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x, y) + g(x, y)] = L_1 + L_2$;

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x, y) \cdot g(x, y)] = L_1 \cdot L_2$;

d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{L_1}{L_2}$, se $L_2 \neq 0$.

Exemplo 10.8

Vamos calcular

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}.$$

Aplicando o Exemplo 10.6 temos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^2}.$$

Assim, aplicando a propriedade da soma de limites, temos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} + \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^2} = 0 + 0 = 0.$$

Exemplo 10.9

Vamos calcular

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \cdot \sin x \cdot (x^2 + 1)}{x^2 + y^2}.$$

Aplicando o fato que $\frac{x^2}{x^2 + 1}$ é limitada e o Teorema de confronto, temos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \cdot \sin x}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sin x \frac{x^2}{x^2 + y^2} = 0$$

Assim, aplicando a propriedade do produto de limites, temos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \cdot \sin x \cdot (x^2 + 1)}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \cdot \sin x}{x^2 + y^2} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + 1) = 0 \cdot 1 = 0.$$

Exercício 10.1: (Trabalho p/ casa)

Mostre que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy^2}{x^2 + y^4},$$

não existe.

Exercício 10.2: (Trabalho p/ casa)

Mostre que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y},$$

não existe.

Exercício 10.3: (Trabalho p/ casa)

Calcule

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y - x^3}{x^2 + y^2},$$

usando o Teorema 10.2.

Exercício 10.4: (Trabalho p/ casa)

Calcule

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \sin\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right),$$

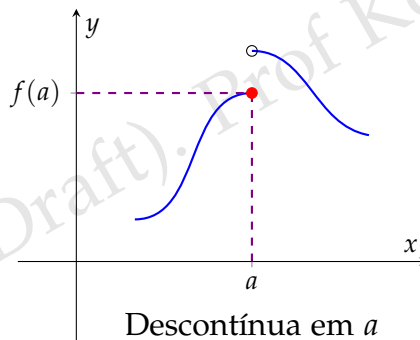
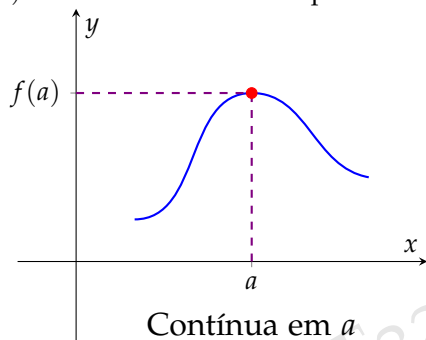
usando o Teorema 10.2.

Aula 11. Continuidade

Em Calculo I, definimos a continuidade de uma função de uma variável e vimos como ela dependia do limite de uma função de uma variável. Em particular, uma função de uma variável real é chamada *contínua* no ponto a se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Respectivamente, dizemos que $f(x)$ é *contínua num intervalo* $[a, b]$ se $f(x)$ é contínua em todos os pontos neste intervalo.



Semelhantemente podemos definir a noção das funções contínuas para funções de duas variáveis.

Definição

Seja $f(x, y)$ uma função de duas variáveis reais e (a, b) um ponto no domínio da $f(x, y)$. Dizemos que $f(x, y)$ é **contínua** no (a, b) , se

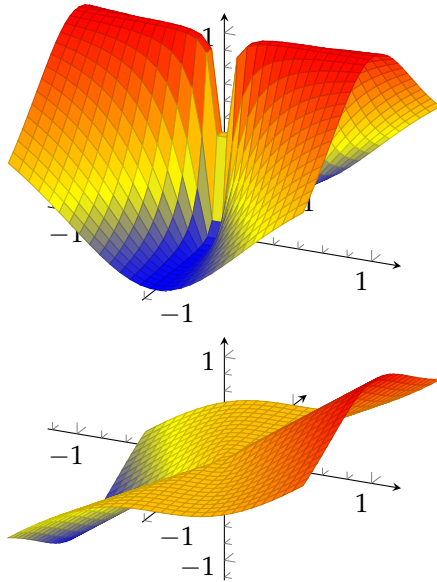
$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = f(a, b).$$

Respectivamente, função $f(x, y)$ é **contínua numa região** $B \subset D$ se ele é contínuo para todos (a, b) em B .

Para verificar que f é contínuo no ponto (a, b) devemos confirmar as seguintes três condições:

- (a) $f(a, b)$ existe, ou seja (a, b) está no domínio da função $f(x, y)$.
- (b) O limite $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$ existe.
- (c) E finalmente, que $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = f(a, b)$.

As figuras de baixo mostram duas funções $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ e $g(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$. Função $f(x, y)$ é descontínua no ponto $(0, 0)$, pois o limite $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ não existe (veja aula passada), mas função $g(x, y)$ é contínua no ponto $(0, 0)$ definindo $g(0, 0) = 0$ (veja Exercício 11.1 abaixo).



$$f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

$$g(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$$

Exemplo 11.1

Mostre que a função

$$f(x, y) = \frac{3x + 2y}{x + y + 1}.$$

é contínua no ponto $(5, -3)$.

Temos que $f(a, b)$ existe. Isso é verdade porque o domínio da função f consiste naqueles pares ordenados para os quais o denominador é diferente de zero (ou seja, $x + y + 1 \neq 0$). O ponto $(5, -3)$ satisfaz essa condição. Além disso,

$$f(a, b) = f(5, -3) = \frac{3(5) + 2(-3)}{5 + (-3) + 1} = \frac{15 - 6}{2 + 1} = 3$$

O limite $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$ pode ser calculado usando as propriedades da Aula 10. Temos:

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) &= \lim_{(x, y) \rightarrow (5, -3)} \frac{3x + 2y}{x + y + 1} \\ &= \frac{\lim_{(x, y) \rightarrow (5, -3)} (3x + 2y)}{\lim_{(x, y) \rightarrow (5, -3)} (x + y + 1)} \\ &= \frac{15 - 6}{5 - 3 + 1} \\ &= 3. \end{aligned}$$

Como $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = 3 = f(5, -3)$, assim a função $f(x, y)$ é contínua no ponto $(5, -3)$.

Exemplo 11.2

Suponha que $f(x, y)$ dada como:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Como no exemplo anterior o limite se $(a, b) \neq (0, 0)$ pode ser calculado como:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = \frac{\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} (x^2 - y^2)}{\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} (x^2 + y^2)} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

Vamos mostrar que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

não existe. Primeiro, vamos aproximar $(0, 0)$ ao longo do eixo x . Então $y = 0$ dá $f(x, 0) = x^2/x^2 = 1$ para todos $x \neq 0$, então

$$f(x, y) \rightarrow 1 \quad \text{quando } (x, y) \rightarrow (0, 0),$$

ao longo do eixo x . Agora nos aproximamos ao longo da eixo y . Então $f(0, y) = \frac{-y^2}{y^2} = -1$ para todos $y \neq 0$, assim

$$f(x, y) \rightarrow -1 \quad \text{quando } (x, y) \rightarrow (0, 0),$$

ao longo da eixo y . Como f tem dois limites diferentes ao longo de dois caminhos diferentes, o limite $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ não existe. Assim função $f(x, y)$ é contínua para todos pontos $(a, b) \neq (0, 0)$.

Theorem 11.1: Propriedades das funções contínuas.

Sejam $f(x, y)$, $g(x, y)$ duas funções contínuas no ponto (a, b) . Assim:

- $cf(x, y)$ é função contínua no ponto (a, b) para qualquer constante c .
- $f(x, y) + g(x, y)$ é função contínua no ponto (a, b) (ou seja, **a soma das funções contínuas é contínua**).
- $f(x, y) \cdot g(x, y)$ é função contínua no ponto (a, b) (**o produto de funções contínuas é contínua**).
- $\frac{f(x, y)}{g(x, y)}$ é função contínua no ponto (a, b) , se $g(a, b) \neq 0$ (**o quociente de funções contínuas é contínua**).

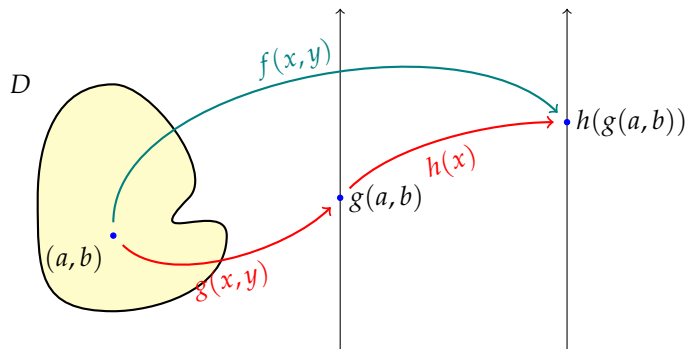
Theorem 11.2: Composição das funções contínuas.

Seja g uma função de duas variáveis de um domínio $D \subset \mathbb{R}^2$. Suponha que g seja contínua em algum ponto $(a, b) \in D$. Se h é uma função de uma variável real contínua no ponto $g(a, b)$, então a função composta

$$f(x, y) = h(g(x, y)),$$

é função contínua no ponto (a, b) também.

A função composta $h(g(x, y))$ pode ser vista através a seguinte ilustração:



Exemplo 11.3

Mostre que as funções $f(x, y) = 4x^3y^2$ e $g(x, y) = \cos(4x^3y^2)$ são contínuas em todos os pontos.

Os polinômios $g(x) = 4x^3$ e $h(y) = y^2$ são contínuos em todos os números reais e, portanto, pelo produto do teorema das funções contínuas, temos que

$$f(x, y) = 4x^3y^2$$

é contínua em todos os pontos (x, y) no plano xy . Uma vez que $f(x, y) = 4x^3y^2$ é contínua em todos os pontos (x, y) no plano xy e $g(x) = \cos x$ é contínua em cada número real x , a continuidade da composição das funções nos diz que

$$g(x, y) = \cos(4x^3y^2)$$

é contínua em todos os pontos (x, y) no plano xy .

Exemplo 11.4

Semelhante se

$$h(x, y) = \sin(x^2 + y^2).$$

Temos que x^2 , y^2 , $x^2 + y^2$ são funções contínuas como produto e soma das funções contínuas. Uma vez que $f(x, y) = x^2 + y^2$ é contínua em todos os pontos (x, y) no plano xy e $g(x) = \sin x$ é contínua em cada número real x , a continuidade da composição das funções nos diz que

$$h(x, y) = g(f(x, y)) = \sin(x^2 + y^2),$$

é contínua em todos os pontos (x, y) no plano xy .

Exercício 11.1

Seja:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Determine os pontos de continuidade de f .

Solução 11.1

Quando $(a, b) \neq (0, 0)$, vale que $a^2 + b^2 \neq 0$. Usando Propriedades acima, temos que $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$ é função contínua como quociente das funções contínuas x^3 e $x^2 + y^2$. Agora considere caso $(a, b) = (0, 0)$. Assim

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0).$$

Pois $x \rightarrow 0$ e função $\frac{x^2}{x^2 + y^2}$ é limitada (veja Aula 10 e teorema do confronto). Assim $f(x, y)$ é contínua no ponto $(0, 0)$ também.

Resumindo, a função $f(x, y)$ é contínua no todo plano xy .

Exercício 11.2

Seja:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \cdot (y-1)^2}{2x^2 + 3(y-1)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 1) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 1) \end{cases}$$

Determine os pontos de continuidade de f .

Solução 11.2

Quando $(a, b) \neq (0, 1)$, assim $2a^2 + 3(b-1)^2 \neq 0$. Usando Propriedades acima, temos que $f(x, y) = \frac{x \cdot (y-1)^2}{2x^2 + 3(y-1)^2}$ é função contínua como quociente das funções contínuas $x \cdot (y-1)^2$ e $2x^2 + 3(y-1)^2$. Agora considere caso $(a, b) = (0, 1)$. Observe que

$$0 \leq (y-1)^2 \leq 3(y-1)^2 \leq 2x^2 + 3(y-1)^2.$$

Assim a função $\frac{(y-1)^2}{2x^2 + 3(y-1)^2}$ é limitada. Aplicando o Teorema do Confronto, temos

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x \cdot (y-1)^2}{2x^2 + 3(y-1)^2} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} x \cdot \frac{(y-1)^2}{2x^2 + 3(y-1)^2} \\ &= 0 = f(0, 1). \end{aligned}$$

e $f(x, y)$ é contínua no ponto $(0, 1)$.

Resumindo, a função $f(x, y)$ é contínua no todo plano xy .

Exercício 11.3

Mostre que função $f(x, y) = e^{\sin(x^2 y)}$ é função contínua para todos os pontos x, y .

Solução 11.3

Funções x^2 , y são funções contínuas, assim $h(x, y) = x^2y$ é uma função contínua (como produto das funções contínuas). Observe que a função $g_1(x) = \sin x$ é uma função contínua, assim

$$\tilde{f}(x, y) = g_1(h(x, y)) = \sin(x^2y)$$

é contínua também pelo Teorema acima (como composição das funções h e g_1). Além disso $g_2(x) = e^x$ é também função contínua, assim função

$$f(x, y) = g_2(\tilde{f}(x, y)) = e^{\sin(x^2y)}$$

é contínua, pois é composição das funções contínuas $\tilde{f}$ e g_2 .

Exercício 11.4

Seja:

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}.$$

Determine os pontos de continuidade de f .

Solução 11.4

Observe que o domínio da função $f(x, y)$ é

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq -y\}.$$

Considere qualquer ponto (a, b) no plano tal que $a \neq -b$. Neste caso a função $f(x, y)$ é contínua no ponto (a, b) como o quociente das funções contínuas $x - y$ e $x + y$ e temos

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \frac{x - y}{x + y} = \frac{a - b}{a + b}.$$

Quando (a, b) é ponto tal que $a + b = 0$, então o limite $f(x, y)$ não existe! (Mostre.)

Exercício 11.5

Seja:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(\sqrt{x^2 + y^2})}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Determine o valor $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que f seja contínua no ponto $(0, 0)$.

LEMBRETE:

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. – Limite fundamental.
- (2) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. – regra l'Hôpital.

Solução 11.5

Podemos determinar α pela igualdade

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = \alpha,$$

pois f deve ser contínua em $(0,0)$. Agora, fazendo a substituição $t = \sqrt{x^2 + y^2}$, temos que

$$t \rightarrow 0, \quad \text{se e somente se} \quad (x,y) \rightarrow (0,0).$$

Assim

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(\sqrt{x^2 + y^2})}{x^2 + y^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{2t} \quad \text{Aplicando Regra l'Hôpital} \\ &= \frac{1}{2}, \quad \text{pelo limite fundamental.} \end{aligned}$$

$$\text{Ou seja } \alpha = \frac{1}{2}.$$

Exercício 11.6

Seja:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^2 - y^2)(x-1)^2}{(x^2 + y^2)[(x-1)^2 + (y-1)^2]} & (x,y) \neq (0,0), (1,1) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \\ 0 & (x,y) = (1,1) \end{cases}$$

Determine os pontos de continuidade de f .

Solução 11.6

Primeiro observe que se $(a,b) \neq (0,0), (1,1)$ assim f é contínua em (a,b) aplicando as propriedades acima.

Se $(a,b) = (0,0)$ e seguinte limite não existe

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 - y^2)(x-1)^2}{(x^2 + y^2)[(x-1)^2 + (y-1)^2]}$$

Assim $f(x,y)$ é descontínua no ponto $(0,0)$.

Por outro lado

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(x^2 - y^2)(x-1)^2}{(x^2 + y^2)[(x-1)^2 + (y-1)^2]} = 0 = f(1,1)$$

Pois

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \rightarrow 0, \text{ quando } (x, y) \rightarrow (1, 1)$$

e $\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2 + (y-1)^2}$ é limitada.

Assim $f(x, y)$ é contínua no ponto $(1, 1)$.

Resumindo f é contínua em todos os pontos do plano xy exceto o ponto $(0, 0)$.

Exercício 11.7: (Trabalho p/ casa)

Mostre que

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{yx^2 + xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{ge } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

é contínua em todo plano xy .

Exercício 11.8: (Trabalho p/ casa)

Mostre que

$$f(x, y) = \cos(\ln(x^y)).$$

é contínua no seu domínio.

Exercício 11.9: (Trabalho p/ casa)

Seja:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + x^2y + y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Determine α de modo que f seja contínua em $(0, 0)$.

Resposta: 1.

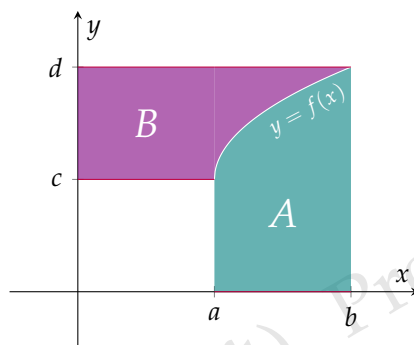
Aula 12. Revisão 1.

12.1 Volume dos sólidos de revolução

Lembrete da Aula 2. Seja $f(x)$ uma função contínua. Considere os seguintes conjuntos.

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{array} \right\},$$

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{array} \right\},$$



conforme o desenho na figura do lado.

Assim o volume do sólido obtido pelo rotação de conjunto A em torno do eixo- x é:

$$\pi \int_a^b f(x)^2 dx. \quad (12.1)$$

O volume do sólido obtido pelo rotação de conjunto B em torno do eixo- y é:

$$\pi \int_c^d g(y)^2 dy. \quad (12.2)$$

O volume do sólido obtido pelo rotação de conjunto A em torno do eixo- y é

$$2\pi \int_a^b x f(x) dx. \quad (12.3)$$

O volume do sólido obtido pelo rotação de conjunto B em torno do eixo- x é

$$2\pi \int_c^d y g(y) dy. \quad (12.4)$$

Onde $g(y)$ é função inversa da $f(x)$.

Exercício 12.1: (Lista 1, 1e)

Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo- x , do conjunto de todos os pares (x, y) tais que:

$$0 \leq y \leq x, \quad x^2 + y^2 \leq 2.$$

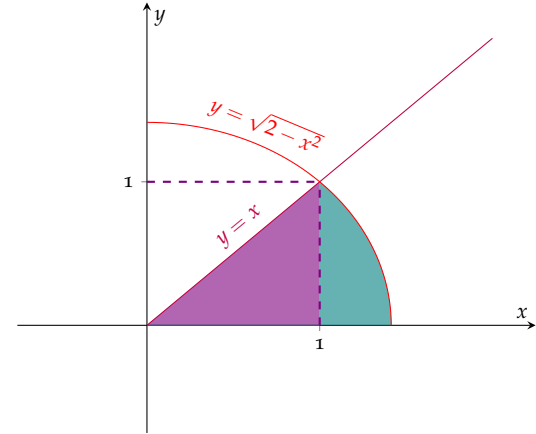
Solução 12.1

Temos que a circunferência $x^2 + y^2 = 2$ e a reta $y = x$ se interceptam quando

$$x^2 + x^2 = 2 \implies x = \pm 1.$$

Podemos dividir a região, conforme a figura do lado

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 = \pi \int_0^1 x^2 dx + \pi \int_1^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2 - y^2} \right)^2 dx \\ &= \pi \left(\frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \left(2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} \right) \\ &= \pi \left(\frac{1}{3} + \left(2\sqrt{2} - 2 - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3} \right) \right) \\ &= \pi \left(-\frac{4}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3} \right) \\ &= \frac{4\pi}{3} (\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

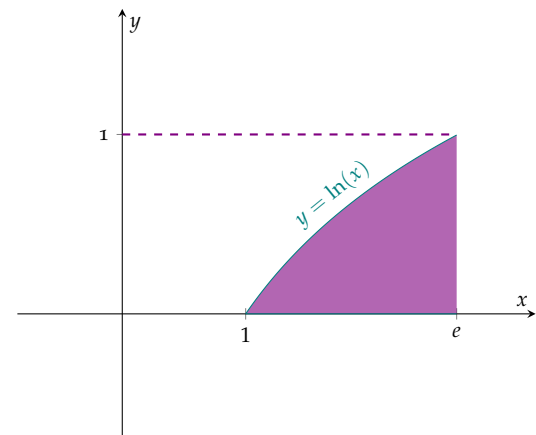


Exercício 12.2: (Lista 1, 2a)

Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo- y , do conjunto de todos os pares (x, y) tais que:

$$1 \leq x \leq e, \quad 0 \leq y \leq \ln x.$$

Solução 12.2



$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \int_1^e x \ln x dy = \left| \begin{array}{l} f(x) = \ln x \quad f'(x) = 1/x \\ g'(x) = x \quad g(x) = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| \\
 &= 2\pi \left(\frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \right) \\
 &= 2\pi \left(\frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e \right) \\
 &= 2\pi \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \right) \\
 &= 2\pi \left(\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \right).
 \end{aligned}$$

Exercício 12.3: (Lista 1, 2g)

Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo- y , do conjunto de todos os pares (x, y) tais que:

$$0 \leq x \leq 2, \quad \sqrt{x-1} \leq y, \quad 0 \leq y \leq x^2.$$

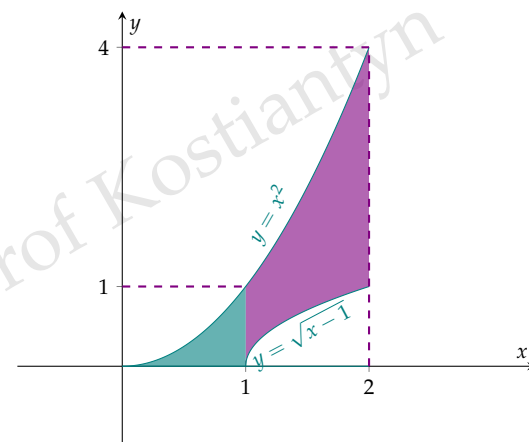
Solução 12.3

$$V = 2\pi \left(\int_0^2 x \cdot x^2 dx - \int_1^2 x \cdot \sqrt{x-1} dx \right)$$

$$\begin{aligned}
 \int x \sqrt{x-1} dx &= \left| \begin{array}{l} \sqrt{x-1} = u, \quad x = u^2 + 1 \\ dx = 2u du \end{array} \right| \\
 &= \int (u^2 + 1) u \cdot 2u du \\
 &= \frac{2}{5} u^5 + \frac{2}{3} u^3 = \frac{2}{5} (\sqrt{x-1})^5 + \frac{2}{3} (\sqrt{x-1})^3.
 \end{aligned}$$

Logo

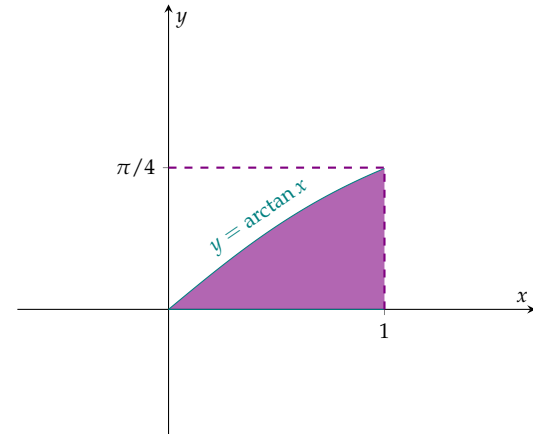
$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \left(\frac{x^4}{4} \Big|_0^2 - \left[\frac{2}{5} (\sqrt{x-1})^5 + \frac{2}{3} (\sqrt{x-1})^3 \right] \Big|_1^2 \right) \\
 &= 2\pi \left(4 - \frac{2}{5} - \frac{2}{3} \right) = 2\pi \left(\frac{60 - 6 - 10}{15} \right) \\
 &= 2\pi \frac{44}{15} = \frac{88\pi}{15}.
 \end{aligned}$$



Exercício 12.4: (Lista 1, 2d)

Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo- y , do conjunto de todos os pares (x, y) tais que:

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \arctan x.$$

**Solução 12.4**

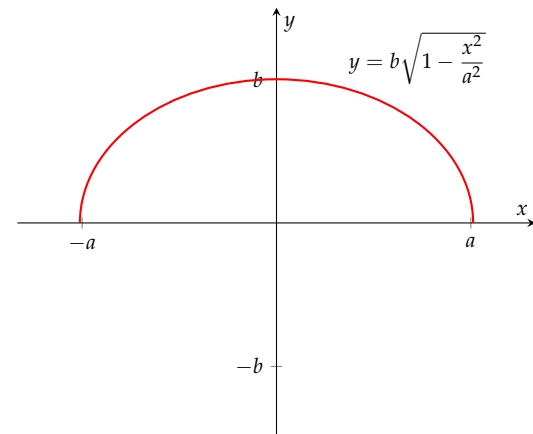
$$\begin{aligned} V &= 2\pi \cdot \int_0^1 x \arctan(x) dx \\ &= \left| \begin{array}{ll} f(x) = \arctan x & f'(x) = 1/(1+x^2) \\ g'(x) = x & g(x) = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{2} x^2 \arctan(x) - \int \frac{x^2}{2(x^2+1)} dx \right]_0^1 \\ &= 2\pi \frac{\pi-2}{4} = \pi \frac{\pi-2}{2} \approx 1.7932 \end{aligned}$$

Durante as contas usamos que:

$$\int \frac{x^2}{2(x^2+1)} dx = \frac{1}{2} (-\arctan(x) + x)$$

Exercício 12.5: (Lista 1, 4)

Uma elipse com eixos $2a$ e $2b$ gira-se: 1) em torno do eixo x ; 2) em torno do eixo y . Calcule os volumes dos sólidos correspondentes. Em caso particular $a = b$ calcule o volume da bola.

**Solução 12.5**

Temos que o arco (no quadrante 1 e 2) da elipse com eixos $2a$ e $2b$ tem equação:

$$y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Assim o volume do sólido obtido em torno do eixo- x é

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-a}^a \left(b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right)^2 dx \\ &= \pi b^2 \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = \pi b^2 \left(x - \frac{x^3}{3a^2} \right) \Big|_{-a}^a = \\ &= 2\pi b^2 \left(a - \frac{a}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi b^2 a. \end{aligned}$$

Semelhante, usando a fórmula para rotação em torno eixo-y, temos

$$V = 2\pi \int_0^b \left(a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \right)^2 dy = \frac{4}{3} \pi a^2 b$$

Quando $a = b$ recebemos $\frac{4}{3} \pi a^3$ o volume da esfera com raio a .

12.2 Área da superfície da revolução

Lembrete (da Aula 3). As áreas superficiais de tais sólidos podem ser calculadas através os seguintes fórmulas:

Área da superfície do sólido obtido pela rotação em torno do eixo-x:

$$A(S) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx, \quad (12.5)$$

Área da superfície do sólido obtido pela rotação em torno do eixo-y:

$$A(S) = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (12.6)$$

Exercício 12.6

Determine a área de superfície do sólido obtido por rotação do conjunto limitado por $y = \sqrt{9 - x^2}$, $-2 \leq x \leq 2$ em torno do eixo-x.

Solução 12.6

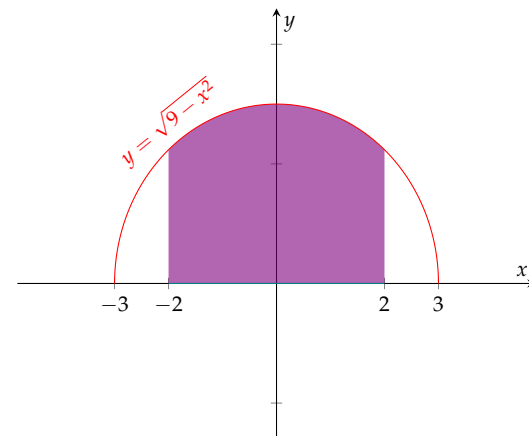
Vamos primeiro cuidar da derivada e da raiz.

$$f'(x) = \frac{1}{2} (9 - x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x) = -\frac{x}{(9 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{9 - x^2}} = \sqrt{\frac{9}{9 - x^2}} = \frac{3}{\sqrt{9 - x^2}}$$

Agora, aplicando fórmula (12.5), temos

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_{-2}^2 2\pi \sqrt{9 - x^2} \frac{3}{\sqrt{9 - x^2}} dx \\ &= \int_{-2}^2 6\pi dx \\ &= 24\pi \end{aligned}$$



Exercício 12.7

Determine a área de superfície do sólido obtido por rotação do conjunto limitado por $y = \sqrt[3]{x}$, $1 \leq x \leq 8$ em torno do eixo-y.

Solução 12.7

Vamos primeiro cuidar da derivada e da raiz.

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{9x^{\frac{4}{3}}}} = \sqrt{\frac{9x^{\frac{4}{3}} + 1}{9x^{\frac{4}{3}}}} = \frac{\sqrt{9x^{\frac{4}{3}} + 1}}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

Agora, aplicando a fórmula (12.6), temos

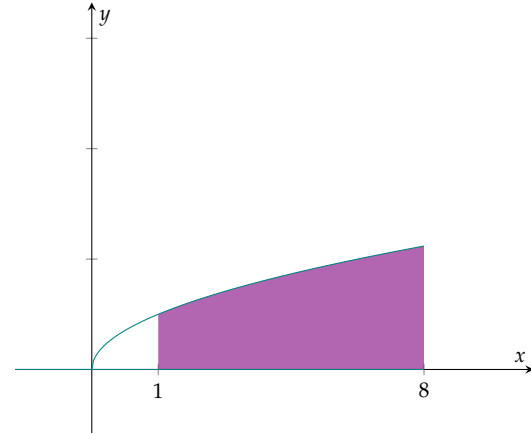
$$A(S) = \int_1^8 2\pi x \frac{\sqrt{9x^{\frac{4}{3}} + 1}}{3x^{\frac{2}{3}}} dx = \frac{2\pi}{3} \int_1^8 x^{\frac{1}{3}} \sqrt{9x^{\frac{4}{3}} + 1} dx$$

Usando substituição

$$u = 9x^{\frac{4}{3}} + 1 \quad du = 12x^{\frac{1}{3}} dx$$

a integral fica

$$\begin{aligned} A(S) &= \frac{\pi}{18} \int_{10}^{145} \sqrt{u} du \\ &= \frac{\pi}{27} u^{\frac{3}{2}} \Big|_{10}^{145} \\ &= \frac{\pi}{27} \left(145^{\frac{3}{2}} - 10^{\frac{3}{2}} \right) \approx 199.48 \end{aligned}$$

**Exercício 12.8: (Lista 1, 1a)**

Determine a área de superfície do sólido obtido por rotação do conjunto limitado por

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad -1 \leq x \leq 1$$

Solução 12.8

Vamos primeiro cuidar da derivada e da raiz.

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{1 + f'(x)^2} &= \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2} \\
 &= \frac{\sqrt{4 - 2 + e^{2x} + e^{-2x}}}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{2 + e^{2x} + e^{-2x}}}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{(e^x + e^{-x})^2}}{2} \\
 &= \frac{(e^x + e^{-x})}{2}.
 \end{aligned}$$

Agora, aplicando fórmula (12.5), temos

$$\begin{aligned}
 A(S) &= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 (e^x + e^{-x}) (e^x + e^{-x}) dx \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 e^{2x} + 2 + e^{-2x} dx \\
 &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} e^{2x} + 2x - \frac{1}{2} e^{-2x} \right) \Big|_{-1}^1 \\
 &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} (e^2 - e^{-2}) + 4 - \frac{1}{2} (e^{-2} - e^2) \right) \\
 &= \frac{\pi}{2} (e^2 - e^{-2} + 4)
 \end{aligned}$$

12.3 Centro de massa

Lembrete da Aula 8. Seja R uma região limitada acima pelo gráfico de uma função contínua $f(x)$, abaixo pelo gráfico de outra função contínua $g(x)$ e entre as retas $x = a$ e $x = b$, respectivamente.

Assim: a massa da lâmina é

$$m = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx. \quad (12.7)$$

Os momentos M_x e M_y da lâmina em relação aos eixos x e y , respectivamente, são

$$M_x = \int_a^b \frac{[f(x)]^2 - [g(x)]^2}{2} dx, \quad M_y = \int_a^b x[f(x) - g(x)] dx.$$

(12.8)

As coordenadas do centro de massa $(\bar{x}, \bar{y})$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}. \quad (12.9)$$

Exercício 12.9: (Aula 8, Trabalho p/ casa)

Calcule o centro de massa da região limitada por $y = x^3$ e $y = \sqrt{x}$.

Solução 12.9

Primeiramente calculamos a massa da lâmina,

$$\begin{aligned} m &= \int_0^1 \sqrt{x} - x^3 dx \\ &= \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

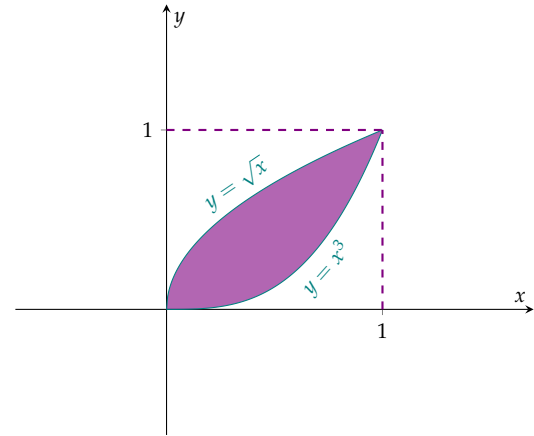
Calculando momentos, temos

$$\begin{aligned} M_x &= \int_0^1 \frac{1}{2} (x - x^6) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{7} x^7 \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{28}, \\ M_y &= \int_0^1 x (\sqrt{x} - x^3) dx = \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} - x^4 dx = \left(\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{5} x^5 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Assim as coordenadas do centro são

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1/5}{5/12} = \frac{12}{25} \\ \bar{y} &= \frac{5/28}{5/12} = \frac{3}{7} \end{aligned}$$

Assim o centro de massa tem as coordenadas $\left(\frac{12}{25}, \frac{3}{7} \right)$.

**Exercício 12.10: (Lista 1, Exer 2)**

Calcule o centro de massa da região limitada por $y = 9 - x^2$ com $-3 \leq x \leq 3$.

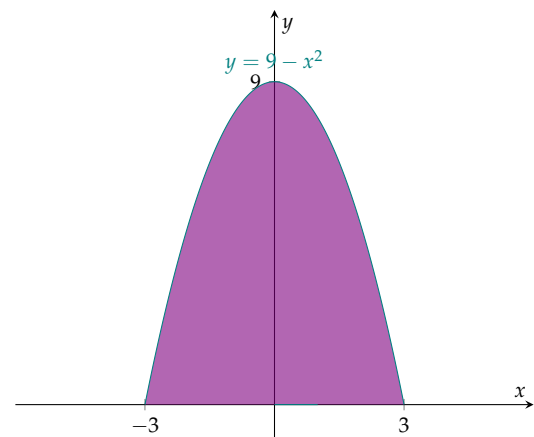
Solução 12.10

Primeiramente calculamos a massa da lâmina,

$$m = \int_{-3}^3 (9 - x^2) dx = \left(9x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-3}^3 = 54.$$

Calculando momentos, temos

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-3}^3 \frac{1}{2} (9 - x^2)^2 dx = \frac{648}{5}, \\ M_y &= \int_{-3}^3 x(9 - x^2) dx = 0. \end{aligned}$$



Assim as coordenadas do centro são

$$\bar{x} = \frac{0}{54} = 0$$
$$\bar{y} = \frac{648/5}{54} = \frac{12}{5}$$

Assim o centro de massa tem as coordenadas $\left(0, \frac{12}{5}\right)$.

Anotações MAT3210 (Draft). Prof Kostiantyn

Aula 13. Revisão 2.

13.1 Comprimento das curvas

Vamos lembrar as fórmulas para calcular os comprimentos das curvas. Mais informações estão disponíveis na Aula 7.

Seja $f(x)$ uma função suave no intervalo $[a, b]$. Então, o comprimento do arco da porção do gráfico de $f(x)$ do ponto $(a, f(a))$ ao ponto $(b, f(b))$ é dado por:

$$\text{Comprimento do Arco} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (13.1)$$

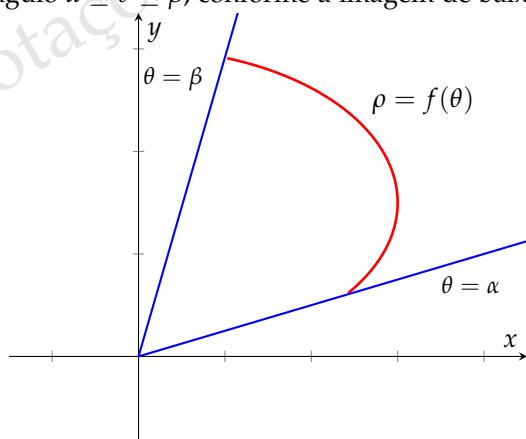
Se a curva dada pelas equações paramétricas (como na Aula 4):

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

onde t varia num intervalo $[c, d]$, então o comprimento do arco da porção do gráfico da curva $(x(t), y(t))$ do ponto $(x(c), y(c))$ ao ponto $(x(d), y(d))$ é dado por:

$$\text{Comprimento da curva} = \int_c^d \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt. \quad (13.2)$$

Finalmente, se a curva é dada pela equação polar $\rho = f(\theta)$ com ângulo $\alpha \leq \theta \leq \beta$, conforme a imagem de baixo.



Assim o comprimento do arco da curva $\rho = f(\theta)$ com ângulo $\alpha \leq \theta \leq \beta$ é dado por

$$\text{Comprimento da curva} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta. \quad (13.3)$$

Exercício 13.1: (Lista 1, (a))

Calcule o comprimento do arco da função $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ quando $0 \leq x \leq 1$.

Solução 13.1

Vamos cuidar primeiramente da derivada e da raiz. Temos

$$f'(x) = x^{\frac{1}{2}} \text{ e } \sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{1 + x}$$

Assim, aplicando a fórmula (13.1), temos

$$\text{Comprimento do Arco} = \int_0^1 (1+x)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{4}{15} + \frac{4\sqrt{2}}{15}$$

Exercício 13.2: (Lista 1, (e))

Calcule o comprimento de arco da função $f(x) = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ quando $a \leq x \leq b$.

Solução 13.2

Observe que podemos escrever $f(x)$ como

$$f(x) = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \ln(e^x - 1) - \ln(e^x + 1).$$

Assim, temos

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x - 1)}{(e^x - 1)(e^x + 1)} = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + f'(x)^2} &= \sqrt{1 + \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(e^{2x} + 1)^2}{(e^{2x} - 1)^2}} \\ &= \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} \\ &= \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - 1} - 1. \end{aligned}$$

Assim, aplicando a fórmula (13.1), temos

$$\begin{aligned}\text{Comprimento do Arco} &= \int_a^b \left(\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1} - 1 \right) dx \\ &= \left| u = e^{2x} - 1, du = 2e^{2x} dx \right| \\ &= \left[\ln |e^{2x} - 1| - x \right] \Big|_a^b \\ &= \ln \left| \frac{e^{2b} - 1}{e^{2a} - 1} \right| - (b - a).\end{aligned}$$

Exercício 13.3: (Lista 1, 2(c))

Calcule o comprimento de curva dada em forma paramétrica:

$$x(t) = 1 - \cos t, \quad y(t) = t - \sin t,$$

quando $0 \leq t \leq \pi$.

Solução 13.3

Temos

$$x'(t) = \sin t, \quad y'(t) = 1 - \cos t.$$

Portanto

$$\begin{aligned}\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} &= \sqrt{\sin^2 t + (1 - \cos t)^2} \\ &= \sqrt{\sin^2 t + 1 - 2 \cos t + \cos^2 t} \\ &= \sqrt{2 - 2 \cos t} = \sqrt{2 \cdot 2 \sin^2 \frac{t}{2}} = 2 \sin \frac{t}{2}.\end{aligned}$$

Assim, aplicando a fórmula (13.2), temos

$$\begin{aligned}\text{Comprimento do Arco} &= \int_0^\pi 2 \sin \frac{t}{2} dt \\ &= 4 \left(-\cos \frac{t}{2} \right) \Big|_0^\pi = 4.\end{aligned}$$

Exercício 13.4: (Lista 1, 2(d))

Calcule o comprimento de curva dada em forma paramétrica:

$$x(t) = \frac{t^2}{2}, \quad y(t) = \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}},$$

quando $0 \leq t \leq 1$.

Solução 13.4

Temos

$$x'(t) = t, \quad y'(t) = t^{\frac{3}{2}}.$$

Portanto

$$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{t^2 + t^3} = t\sqrt{1+t}.$$

Assim, aplicando a fórmula (13.2), temos

$$\begin{aligned} \text{Comprimento do Arco} &= \int_0^1 t\sqrt{1+t} dt \\ &= \left| \begin{array}{l} t+1 = u^2, \quad t=1 \rightarrow u = \sqrt{2} \\ dt = 2u du, \quad t=0 \rightarrow u = 1 \end{array} \right| \\ &= \int_1^{\sqrt{2}} (u^2 - 1)u(2u) du \\ &= 2 \int_1^{\sqrt{2}} (u^4 - u^2) du \\ &= 2 \left[\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} \right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{4}{15} + \frac{4\sqrt{2}}{15}. \end{aligned}$$

Exercício 13.5: (Lista 1, 4(b))

Calcule o comprimento de curva dada em equações polares:

$$\rho(\theta) = 1 + \cos \theta,$$

quando $0 \leq \theta \leq \pi$.

Solução 13.5

Temos

$$\rho'(\theta) = -\sin \theta.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} &= \sqrt{(1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{1 + 2\cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{2 + 2\cos \theta} = \sqrt{2 \cdot 2\cos^2 \frac{\theta}{2}} = 2\cos \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

Assim, aplicando a fórmula (13.3), temos

$$\begin{aligned} \text{Comprimento do Arco} &= \int_0^\pi 2\cos \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= 4\left(\sin \frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^\pi = 4. \end{aligned}$$

Exercício 13.6: (Lista 1, 4(d))

Calcule o comprimento de curva dada em equações polares:

$$\rho(\theta) = e^{-\theta},$$

quando $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Solução 13.6

Temos

$$\rho'(\theta) = -e^{-\theta}.$$

Portanto

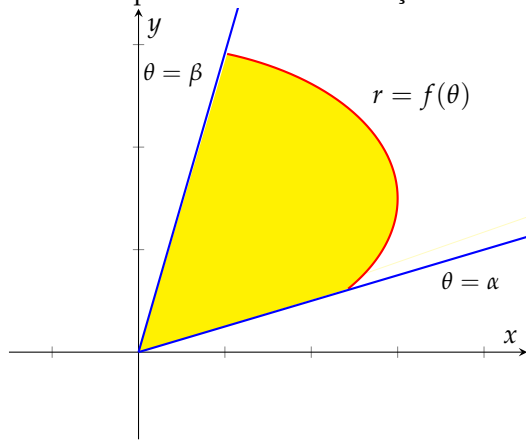
$$\begin{aligned}\sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} &= \sqrt{e^{-2\theta} + e^{-2\theta}} \\ &= \sqrt{2}e^{-\theta}.\end{aligned}$$

Assim, aplicando a fórmula (13.3), temos

$$\begin{aligned}\text{Comprimento do Arco} &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}e^{-\theta} d\theta \\ &= \sqrt{2}(-e^{-\theta}) \Big|_0^{2\pi} = \sqrt{2}[1 - e^{-2\pi}].\end{aligned}$$

13.2 Áreas em coordenadas polares

Vamos lembrar as fórmulas para calcular as áreas das regiões em coordenadas polares. Mais informações estão disponíveis na Aula 6.



Estaremos procurando a área amarela no esboço acima do conjunto A , dado por

$$A = \left\{ (\rho, \theta) \mid \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq f(\theta), \\ \alpha \leq \theta \leq \beta \end{array} \right\}.$$

A fórmula para encontrar esta área é,

$$\text{Área } A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta. \quad (13.4)$$

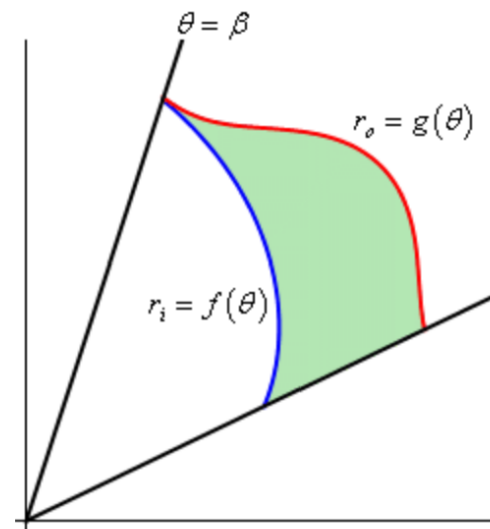
Além disso nos vários exemplos é bem útil calcular as áreas de regiões entre duas curvas $f(\theta)$ e $g(\theta)$ quando o raio varia como no esboço de lado.

Estaremos procurando a área no esboço do lado dado por

$$A = \left\{ (\rho, \theta) \mid \begin{array}{l} g(\theta) \leq \rho \leq f(\theta), \\ \alpha \leq \theta \leq \beta \end{array} \right\}.$$

A fórmula para encontrar esta área é,

$$\text{Área } A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f^2(\theta) - g^2(\theta)] d\theta. \quad (13.5)$$



Exercício 13.7: (Lista 1, 3(d))

Calcule a área de interseção das curvas:

$$\rho(\theta) = \cos \theta, \quad \rho(\theta) = \sin \theta.$$

Solução 13.7

Lembrando a aula 5, temos que $\rho(\theta) = \cos \theta$ define a circunferência no plano, pois

$$\begin{aligned} \rho &= \cos \theta, \\ \Rightarrow \rho^2 &= \rho \cos \theta, \\ \Rightarrow x^2 + y^2 &= x, \\ \Rightarrow (x - 1/2)^2 + y^2 &= (1/2)^2, \end{aligned}$$

ou seja $\rho(\theta) = \cos \theta$ é circunferência com centro em ponto $(1/2, 0)$ e raio $1/2$. Semelhante, $\rho(\theta) = \sin \theta$ é circunferência com centro em ponto $(0, 1/2)$ e raio $1/2$. Eles se encontram quando

$$\cos \theta = \sin \theta, \quad \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Observe que para calcular a área interior das ambas as circunferências, podemos dividir a região para duas: quando o ângulo varia entre 0 e $\pi/4$ e quando o ângulo varia entre $\pi/4$ e $\pi/2$ (como na figura do lado). Aplicando a fórmula (13.4) temos

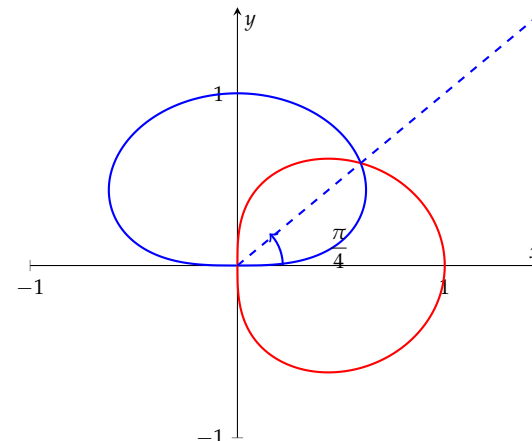
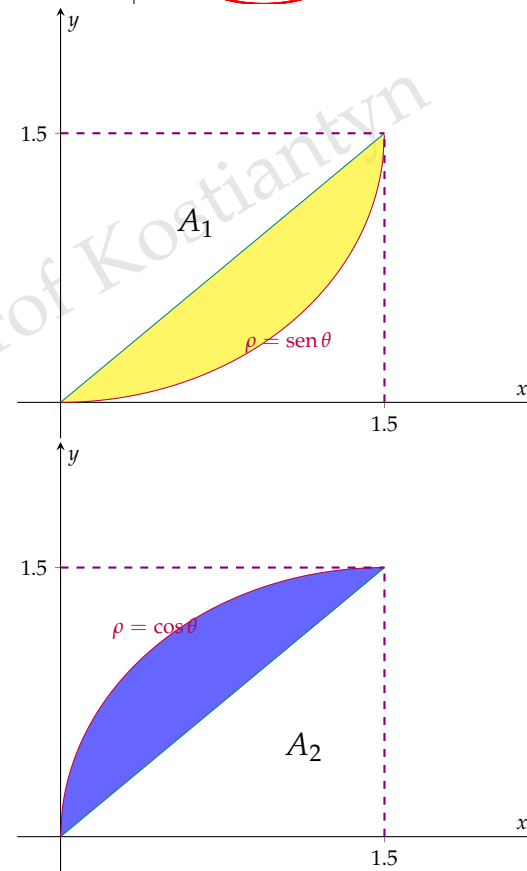
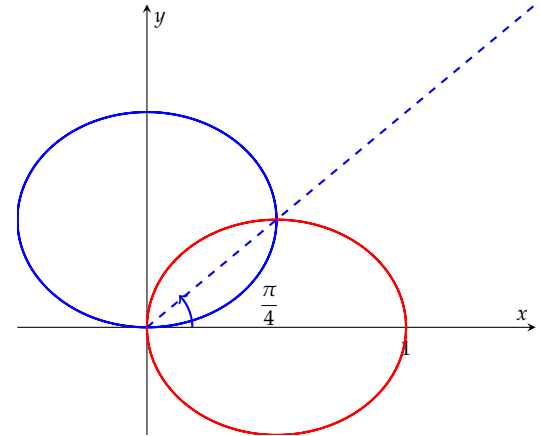
$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \sin^2 \theta d\theta + \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \sin^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/4} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right] = \frac{\pi - 2}{8}. \end{aligned}$$

Exercício 13.8: (Lista 1, 3(e))

Calcule a área de interseção das curvas:

$$\rho^2(\theta) = \cos \theta, \quad \rho^2(\theta) = \sin \theta,$$

com $\rho \geq 0$.



Solução 13.8

Os gráficos se encontram quando

$$\cos^2 \theta = \sin^2 \theta, \quad \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

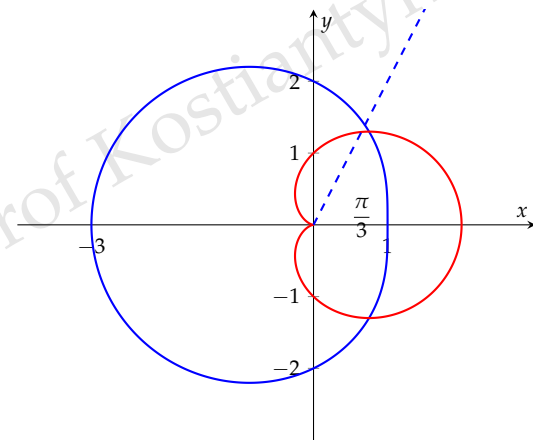
Agora conforme imagem do lado e prosseguindo como no exercício anterior temos:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta d\theta \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1. \end{aligned}$$

Exercício 13.9: (Lista 1, 3(b))

Calcule a área de interseção das curvas:

$$\rho(\theta) = 2 - \cos \theta, \quad \rho(\theta) = 1 + \cos \theta.$$

**Solução 13.9**

Os gráficos se encontram quando

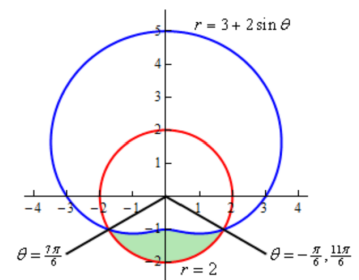
$$2 - \cos \theta = 1 + \cos \theta, \quad \Rightarrow \cos \theta = 1/2, \quad \Rightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{3}.$$

Agora conforme imagem do lado e prosseguindo como nos exercícios anteriores temos:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= 2 \left[\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 - \cos \theta)^2 d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta \right] \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (4 - 4 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Exercício 13.10: Aula 7, Trabalho p/ casa

Determine a área que está fora do $\rho = 3 + 2 \cos \theta$ e dentro do $\rho = 2$.

**Solução 13.10**

Para determinar esta área, precisamos saber os valores de θ para os quais as duas curvas se cruzam. Podemos determinar esses pon-

tos definindo as duas equações e resolvendo:

$$3 + 2 \sin \theta = 2$$

$$\sin \theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

Então, esta é a região que obtemos usando os limites $\frac{7\pi}{6}$ para $\frac{11\pi}{6}$. Agora conforme imagem do lado temos e aplicando (13.5) temos:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} \frac{1}{2} \left((2)^2 - (3 + 2 \sin \theta)^2 \right) d\theta \\ &= \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} \frac{1}{2} \left(-5 - 12 \sin \theta - 4 \sin^2 \theta \right) d\theta \\ &= \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} \frac{1}{2} (-7 - 12 \sin \theta + 2 \cos(2\theta)) d\theta \\ &= \frac{1}{2} (-7\theta + 12 \cos \theta + \sin(2\theta)) \Big|_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} \\ &= \frac{11\sqrt{3}}{2} - \frac{7\pi}{3} \end{aligned}$$

Exercício 13.11: Aula 7, Trabalho p/ casa

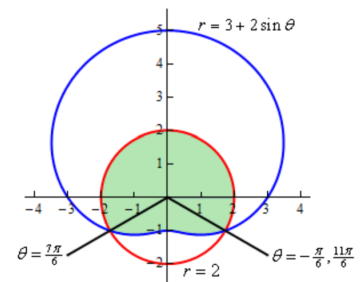
Determine a área que dentro das ambas $\rho = 3 + 2 \cos \theta$ e $\rho = 2$.

Solução 13.11

Neste caso, vamos notar que o círculo é dividido em duas partes e estamos atrás da parte superior. Observe também que encontramos a área da parte inferior no Exercício anterior. Portanto, a área é,

Area = Area da Circunferencia - Area do Exercício anterior

$$\begin{aligned} &= \pi(2)^2 - \frac{11\sqrt{3}}{2} + \frac{7\pi}{3} \\ &= -\frac{11\sqrt{3}}{2} + \frac{19\pi}{3}. \end{aligned}$$



Aula 14. Revisão 3.

14.1 Domínios das funções de várias variáveis.

Exercício 14.1: Lista 2. 1(e)

Ache e esboce o domínio da função:

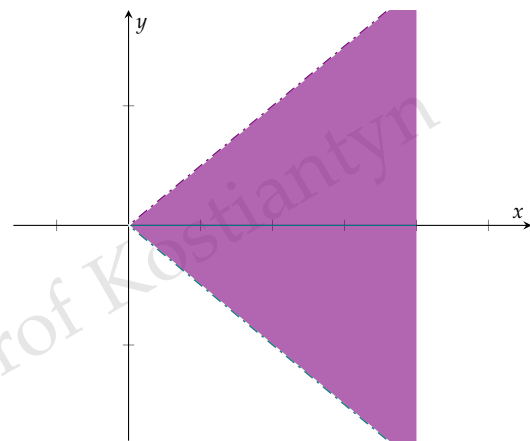
$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$$

Solução 14.1

O domínio da função é todos os pontos onde as raízes $\sqrt{x+y}$ e $\sqrt{x-y}$ são definidas e não nulas. Ou seja é dado por

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > -y, x > y\}.$$

As condições $x = -y$, $x = y$ são duas retas no plano. Assim o domínio são os pontos entre as retas com $x > 0$. Observe que precisa tirar ambas as retas da imagem, pois se $x = y$ ou $x = -y$ a função não está bem definida.



Exercício 14.2: Lista 2. 1(j)

Ache e esboce o domínio da função:

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}.$$

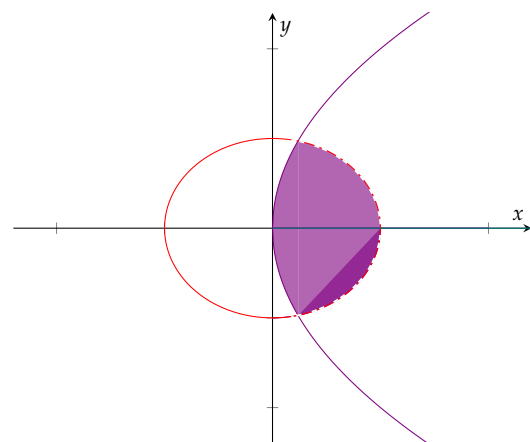
Solução 14.2

O domínio da função são todos os pontos onde as raízes $\sqrt{4x - y^2}$ e $\ln(1 - x^2 - y^2)$ estão definidos e $\ln(1 - x^2 - y^2) \neq 0$. Ou seja é dado por

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x > y^2, 1 - x^2 - y^2 > 0, 1 - x^2 - y^2 \neq 1\}.$$

Observe que isso pode ser escrito como

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y^2/4, 0 < x^2 + y^2 < 1\}.$$



A condição $x > y^2/4$ define uma parábola no plano e $x^2 + y^2 = 1$ é a circunferência com raio 1 e centro na origem. O esboço do domínio é dado pela imagem ao lado. Observe que precisa de tirar a parte da circunferência que fica do lado esquerdo da parábola.

14.2 Limites

Exercício 14.3: Lista 2, 4(b)

Calcule

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}.$$

Solução 14.3

Vamos fazer a troca $t = x^2 + y^2$. Observe que se $(x, y) \rightarrow 0$ assim obviamente $t = x^2 + y^2 \rightarrow 0$. Por outro lado se $t \rightarrow 0$ assim $(x, y) \rightarrow 0$. Assim o limite dado podemos reescrever como

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sqrt{t + 1} - 1}.$$

Multiplicando pelo conjugado $\sqrt{t + 1} + 1$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sqrt{t + 1} - 1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(\sqrt{t + 1} + 1)}{(\sqrt{t + 1} - 1)(\sqrt{t + 1} + 1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(\sqrt{t + 1} + 1)}{t + 1 - 1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (\sqrt{t + 1} + 1) = 2. \end{aligned}$$

Assim, o limite é 2.

Exercício 14.4: Lista 2, 4(b)

Calcule

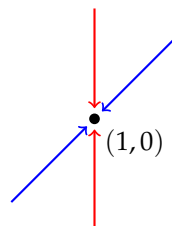
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{xy - y}{(x - 1)^2 + y^2}.$$

Solução 14.4

Seja $f(x, y) = \frac{xy - y}{(x - 1)^2 + y^2}$. Vamos mostrar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x, y)$$

não existe. Vamos nos primeiro aproximar $(1, 0)$ ao longo do reta $x = 1$. Então $x = 1$ dá $f(1, y) = 0y / (0 + y^2) = 0$ para todos $y \neq 0$, en-



tão

$$f(x, y) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad (x, y) \rightarrow (1, 0),$$

ao longo da reta $x = 1$. Agora nos aproximamos ao longo da reta $y = x - 1$. Então $f(x, x - 1) = \frac{(x - 1)(x - 1)}{(x - 1)^2 + (x - 1)^2} = \frac{1}{2}$ para todos $x \neq 0$, assim

$$f(x, y) \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{quando} \quad (x, y) \rightarrow (1, 0),$$

ao longo da reta $y = x - 1$. Como f tem dois limites diferentes ao longo de dois caminhos diferentes, o limite não existe.

Exercício 14.5: Lista 2, 4(a)

Calcule

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{y}}{xy + y}.$$

Solução 14.5

Seja $f(x, y) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{y}}{xy + y}$. Vamos ver o valor aproximado da $f(x, x)$ ao longo do caminho $y = x$. Temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{xx + x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1 - x}{(x^2 + x)(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x^2 + x)(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}. \end{aligned}$$

Este limite não existe, pois o denominador aproxima 0 e o numerador é não nulo. Assim o limite da $f(x, y)$ no ponto $(0, 0)$ também não existe.

Para calcular o seguinte limite, vamos lembrar o teorema do confronto e as seguintes propriedades dos limites (veja Aula 10 para mais detalhes):

Theorem 14.1: Propriedades dos limites.

Sejam $f(x, y)$, $g(x, y)$ duas funções. Assim

(1) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = 0$ se e somente se $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} |f(x, y)| = 0$.

(2) Se $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L_1$ e $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) = L_2$, então:

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [c \cdot f(x, y)] = c \cdot L_1$, para qualquer constante c ;

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x, y) + g(x, y)] = L_1 + L_2$;

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x, y) \cdot g(x, y)] = L_1 \cdot L_2$;

d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{L_1}{L_2}$, se $L_2 \neq 0$.

Theorem 14.2: Teorema de confronto. Versão 1.

Sejam $f(x, y)$, $g(x, y)$ e $h(x, y)$ e seja (a, b) um ponto, tais que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} h(x, y)$$

e

$$f(x, y) \leq g(x, y) \leq h(x, y),$$

para todos (x, y) "perto" do ponto (a, b) . Então, resulta destas condições que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) = L.$$

Na prática, muito útil a seguinte versão do Teorema de Confronto (que segue diretamente da primeira versão).

Theorem 14.3: Teorema de confronto. Versão 2.

Sejam $f(x, y)$ e $g(x, y)$ e seja (a, b) um ponto, tais que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = 0$$

e $g(x, y)$ é uma função limitada em ponto (a, b) , ou seja existe M tal que

$$|g(x, y)| \leq M,$$

para todos (x, y) "pertos" do ponto (a, b) . Então, resulta destas condições que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) \cdot g(x, y) = 0.$$

De fato várias funções são limitadas, por exemplo $g(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ e $\tilde{g}(x, y) = \frac{y^2}{x^2 + y^2}$, pois

$$0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2$$

e, semelhante

$$0 \leq y^2 \leq x^2 + y^2.$$

Exercício 14.6: Lista 2, 4(f)

Calcule

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}.$$

LEMBRETE:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Solução 14.6

Usando o lembrete do lado, temos que

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

Assim o limite pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+y)^3}{x^2+y^2} \\ = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[x \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} + 3y \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} + 3x \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2} + y \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2} \right]. \end{aligned}$$

Agora cada termo tem fator x ou y (que tentem para o) e fator $\frac{x^2}{x^2+y^2}$

ou $\frac{y^2}{x^2+y^2}$. Portanto, usando o Teorema do confronto, temos que o limite é 0.

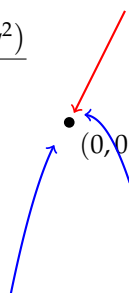
Exercício 14.7: Lista 2, 4(i)

Calcule

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 - y^2}.$$

Solução 14.7

Primeiramente, observe que

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 - y^2} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{(x+y)(x-y)} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - xy + y^2}{x-y}. \end{aligned}$$


Considere o caminho $y = 2x$ (caminho vermelho no esboço), ao longo deste caminho temos

$$\begin{aligned} f(x, 2x) &= \frac{x^2 - x \cdot 2x + 4x^2}{-x} = \frac{3x^2}{-x} \\ f(x, 2x) &= -3x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Considere o caminho $y = x - x^2$ (caminho azul no esboço). Neste caso, temos

$$\begin{aligned} f(x, x - x^2) &= \frac{x^2 - x(x - x^2) + (x - x^2)^2}{x - x + x^2} \\ &= \frac{x^2 - x^2 + x^3 + x^2 - 2x^3 + x^4}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - x^3 + x^4}{x^2} \\ &= 1 - x + x^2 \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Assim, ao longo de dois caminhos diferentes, a função aproxima os valores diferentes. Portanto o limite não existe.

Exercício 14.8: Lista 2, 4(j)

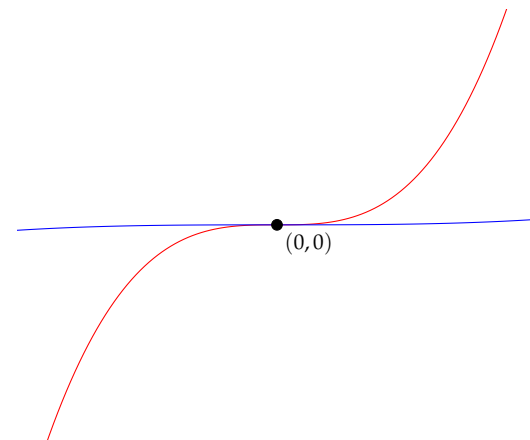
Calcule

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{(x^3 - y)}.$$

Solução 14.8

Primeiramente, observe que a curva $y = x^3$ onde o denominador é fora do domínio da função

$$f(x, y) = \frac{xy}{(x^3 - y)}.$$



Mas a curva $y = x^2 \operatorname{sen} x$ está no domínio e quando

$$(x, y) \rightarrow (0, 0)$$

a curva $y = x^2 \operatorname{sen} x$ aproxima $y = x^3$ (conforme a figura do lado) pois

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1,$$

pelo limite fundamental. Assim vamos ver o valor aproximado da $f(x, y)$ ao longo da curva $y = x^2 \operatorname{sen} x$. Temos:

$$f(x, x^2 \operatorname{sen} x) = \frac{x \cdot x^2 \cdot \operatorname{sen} x}{x^3 - x^2 \cdot \operatorname{sen} x} = \frac{x \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}$$

Agora temos (aplicando as duas vezes a regra L'Hôpital),

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x + x \cos x}{1 - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos x - x \cdot \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - x \cdot \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} \rightarrow \frac{2}{0} \end{aligned}$$

Ou seja o limite não existe. Portando o limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{(x^3 - y)}$$

não existe também.

14.3 Continuidade

Vamos lembrar, que se $f(x, y)$ é uma função de duas variáveis reais e (a, b) um ponto no domínio da $f(x, y)$. Dizemos que $f(x, y)$ é **contínua** no (a, b) , se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

Analogamente, a função $f(x, y)$ é **contínua numa região** $B \subset D$ se ele é contínua para todos (a, b) em B .

Temos as seguintes propriedades das funções contínuas.

Theorem 14.4: Propriedades das funções contínuas.

Sejam $f(x, y)$, $g(x, y)$ duas funções contínuas em ponto (a, b) . Então:

- $\frac{c}{f(x, y)}$ é função contínua em ponto (a, b) para qualquer constante c .
- $f(x, y) + g(x, y)$ é função contínua em ponto (a, b) (ou seja, **a soma das funções contínuas é contínua**).
- $f(x, y) \cdot g(x, y)$ é função contínua em ponto (a, b) (**o produto de funções contínuas é contínuo**).
- $\frac{f(x, y)}{g(x, y)}$ é função contínua em ponto (a, b) , se $g(a, b) \neq 0$ (**o quociente de funções contínuas é contínuo**).

Theorem 14.5: Composição das funções contínuas.

Seja g uma função de duas variáveis de um domínio $D \subset \mathbb{R}^2$. Suponha que g seja contínuo em algum ponto $(a, b) \in D$. Se h é uma função de uma variável real contínua em ponto $g(a, b)$, assim a função composta

$$f(x, y) = h(g(x, y)),$$

é função contínua em ponto (a, b) também.

Exercício 14.9: Lista 2, 5(c)

Determine o conjunto dos pontos de continuidade da função:

$$f(x, y) = \ln \frac{x - y}{x^2 + y^2}.$$

Solução 14.9

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x - y}{x^2 + y^2} > 0 \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y \right\}. \end{aligned}$$

Os polinômios $x - y$ e $x^2 + y^2$ são contínuos em todos os números reais e, portanto, temos

$$g(x, y) = \frac{x - y}{x^2 + y^2}$$

é contínua em todos os pontos (x, y) do conjunto D_f , pois $(0, 0)$ não pertence esse conjunto. Agora função $h(x) = \ln x$ é contínua no seu domínio, assim a continuidade da composição das funções nos diz que

$$h(g(x, y)) = \ln \frac{x - y}{x^2 + y^2}$$

é contínuo em todos os pontos (x, y) do conjunto D_f .

Exercício 14.10: Lista 2, 5(f)

Determine o conjunto dos pontos de continuidade da função:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Solução 14.10

Os polinômios x^2 e y^2 são contínuos em todos os números reais

e, portanto, temos $x^2 + y^2$, $\sqrt{x^2 + y^2}$ e $\cos \sqrt{x^2 + y^2}$ são funções contínuas para todos os pontos (x, y) do plano, como soma e composição das funções contínuas respectivamente. Assim a função $\frac{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}$ é contínua para todos os pontos onde o denominador é não nulo, ou seja, para todos $(x, y) \neq (0, 0)$.

Agora vamos calcular o limite da função $f(x, y)$ no ponto $(0, 0)$. Para ser contínua é necessário que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 1.$$

Temos:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} \end{aligned}$$

Aplicando a regra L'Hôpital, temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{2t} = \frac{1}{2} \neq 1 = f(0, 0).$$

Como

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) \neq f(0, 0).$$

Assim $f(x, y)$ é descontínua em $(0, 0)$. Resumindo, temos que $f(x, y)$ é contínua em todos os pontos tais que $(x, y) \neq (0, 0)$.