

Grafos, matrizes autoadjuntas e espectra

Kostiantyn Iusenko

September 20, 2021

Contents

1	Espectro dos grafos.	2
1	Matrizes autoadjuntos	2
2	Grafos e seu espectro	3
3	Espectro \longleftrightarrow Propriedades do Grafo.	6
3.1	Diâmetro	7
3.2	Grafos regulares	7
3.3	Número de independência	10
3.4	Número cromático	10
4	Grafos de Dynkin	10
4.1	Espectro dos A_n, D_n, \tilde{A}_n e \tilde{D}_n	12
4.2	Espectro dos $E_n, \tilde{E}_n, n = 6, 7, 8$	13
4.3	Índex dos grafos maiores que grafos de Dynkin	14
2	Problema do Hermann Weyl e suas generalizações	16
1	Problema de Hermann Weyl	16
1.1	Problema	16
1.2	Primeiros resultados	17
1.3	Desigualdades de Horn.	19
2	Problema espectral aditivo	20
2.1	Modificação do problema de Weyl	20
2.2	*-álgebras e suas representações	20
2.3	Certas *-álgebras relacionadas com os grafos	21
2.4	Crescimento e finitude da $\mathcal{A}_{\Gamma, \chi}$	22
2.5	Relações polinomiais em $\mathcal{A}_{\Gamma, \chi}$	23
2.6	Estrutura das representações	24

Aula 1

Espectro dos grafos.

1 Matrizes autoadjuntas

Um conceito fundamental para estas duas aulas é a noção de matriz autoadjunta. Assim primeiramente vamos lembrar as definições e as propriedades básicas sobre matrizes autoadjuntas.

Definição 1.1. Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ é chamada *autoadjunta* (*hermitiana*, *simétrica*) se ela satisfaz

$$A^T = \overline{A},$$

ou, equivalente, A considerando como operador linear $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ satisfaz

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle,$$

para todos vetores $x, y \in \mathbb{C}^n$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é produto interno em \mathbb{C}^n .

Tal noção faz sentido para matrizes sobre \mathbb{R} também, neste caso $A \in M_n(\mathbb{R})$ é chamada *autoadjunta* (*simétrica*), se

$$A^T = A.$$

O seguinte resultado (chamado Teorema Espectral) desempenha um papel fundamental em Álgebra Linear.

Teorema 1.2 (Espectral). *Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$ uma matriz autoadjunta, assim existe uma base ortonormal em \mathbb{C}^n formado pelos autovetores de A . Além disso todo autovalor de A é real.*

Proof. Vamos apresentar a prova apenas para matrizes sobre \mathbb{R} . Considere o problema de maximizar a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \langle x, Ax \rangle, \end{aligned}$$

sujeito à restrição $\langle x, x \rangle = 1$ (bola unitária em \mathbb{R}^n). Com f é contínua e bola unitária é um compacto, assim tal ponto extremo existe. Por a simetria de A , o gradiente de f é facilmente calculado (Exercício para casa!) como sendo

$$\nabla f(x) = 2Ax,$$

enquanto o gradiente da norma euclidiana $\langle x, x \rangle$ é $2x$. Em um ponto x onde um máximo é atingido, temos

$$\nabla f(x) = 2Ax = \lambda(2x),$$

para algum multiplicador de Lagrange λ . Assim, x é um autovetor de A com autovalor λ . Os argumentos usuais mostram que A se restringe a um operador auto-adjunto no hiperplano ortogonal a x ; escolhendo uma base ortonormal desse hiperplano, podemos representar essa restrição de A por uma matriz simétrica real de tamanho $(n - 1) \times (n - 1)$, e o argumento se repete. \square

Observação 1.3. O teorema espectral admite generalização para espaços de dimensão infinita. Nomeadamente, seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert (ou seja, espaço linear sobre \mathbb{C} com produto interno, completo em topologia gerada pela norma) e seja $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador autoadjunto (limitado ou não limitado), ou seja

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle,$$

para todos $x, y \in \mathcal{H}$, assim

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_{\lambda},$$

onde E_{λ} é certa medida dos ortorojetores. Tal decomposição é generalização de decomposição da matriz autoadjunta em uma soma,

$$A = \sum \lambda_i P_i,$$

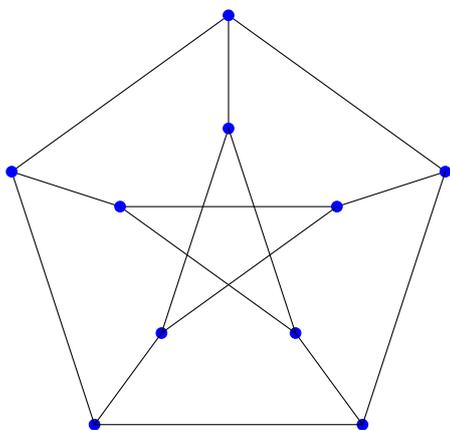
onde $\lambda_i \in \mathbb{R}$ são autovalores de A e $P_i = P_i^2 = P_i^*$ são projeções ortogonais nos auto-subespaços correspondes ($P_i \perp P_j$ pelo Teorema espectral, e $\sum P_i = \text{Id}$).

2 Grafos e seu espectro

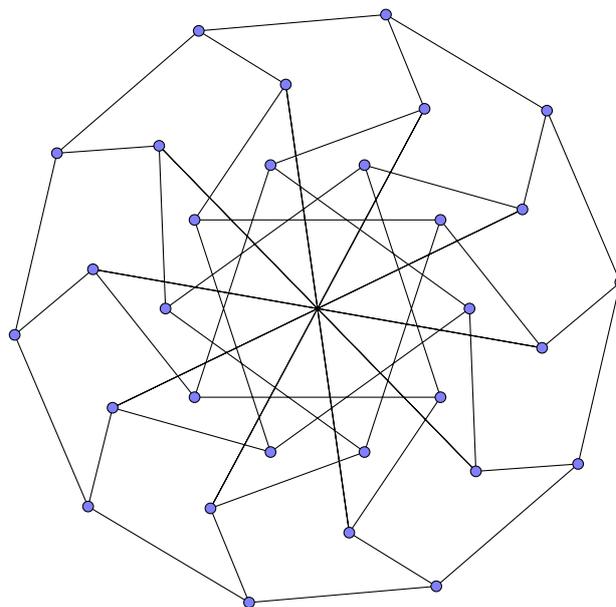
As referencias principais sobre a teoria espectral dos grafos são [BH12, CRS10]. Um grafo é um par $\Gamma = (V, E)$ com:

- V um conjunto finito de vértices;
- $E \subseteq V \times V$ um conjunto simétrico e irreflexivo de arestas (ou seja a gente suponha que o grafo não tem arestas múltiplas e não tem os laços).

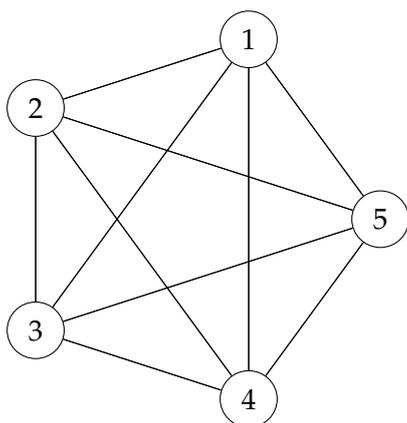
Por exemplo,



Petersen



Tutte-Coxeter



Definição 2.1. A *matriz adjacência* A_Γ de Γ é matriz (com entradas 0 ou 1) com o tamanho $n \times n$, $n = |V|$ e $A_\Gamma = (a_{ij})$, com

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se existe aresta entre } i \text{ e } j, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Exemplo 2.2. Se Γ é $\bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet$, assim a matriz de adjacência é

$$A_\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

As propriedades da matriz de adjacência A_Γ explicam várias propriedades do grafo Γ . Por exemplo as potências de A_Γ “controlam” os caminhos em Γ em grafo Γ como o seguinte Lema afirma.

Lema 2.3. Se $k \geq 0, i, j \in V$ assim

$$(A_\Gamma^k)_{ij} = \text{numero de caminhos de tamanho } k \text{ em } \Gamma.$$

Definição 2.4. O polinômio característico é polinômio característico da matriz A_Γ . Respectivamente, o espectro de grafo Γ é o multiconjunto σ_Γ dos autovalores de A_Γ .

Observação 2.5. Como A_Γ é matriz simétrica, assim σ_Γ consiste dos números reais:

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n.$$

O maior autovalor α_1 de A_Γ vamos denotar por α_Γ e chamar *index* de Γ .

Exemplo 2.6. Se Γ é , assim

$$A_\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

o polinômio característico é

$$\chi_\Gamma(x) = -x^3 + 3x + 2,$$

e os autovalores são

$$2, -1, -1.$$

Logo o index do grafo Γ é $\alpha_\Gamma = 2$.

Exemplo 2.7. Para o grafo de Petersen como no exemplo acima, temos que

$$A_\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

o polinômio característico é

$$\chi_\Gamma = t^{10} - 15t^8 + 75t^6 - 24t^5 - 165t^4 + 120t^3 + 120t^2 - 160t + 48,$$

e espectro é $\sigma_\Gamma = \{3, 1, 1, 1, 1, 1, -2, -2, -2, -2\}$. Logo o index é 3.

Estudando o espectro do grafo Γ de certa forma basta fazer isso para os componentes conexos do Γ como a seguinte proposição afirma.

Proposição 2.8. *Se $\Gamma = \Gamma_1 \sqcup \Gamma_2 \sqcup \dots \sqcup \Gamma_n$ é união disjunta dos componentes conexos de Γ assim*

$$\sigma_\Gamma = \sigma_{\Gamma_1} \cup \sigma_{\Gamma_2} \cup \dots \cup \sigma_{\Gamma_n},$$

como multiconjunto.

Para provar a proposição basta observar que a matriz adjacência do Γ escreva-se como

$$A_\Gamma = \begin{bmatrix} A_{\Gamma_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{\Gamma_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{\Gamma_n} \end{bmatrix}.$$

O seguinte resultado é conhecido como o Teorema Perron-Frobenius para grafos.

Teorema 2.9 (Perron-Frobenius). *Seja Γ um grafo conexo, assim*

- (1) *index de Γ é positivo, ou seja $\alpha_\Gamma > 0$;*
- (2) *para qualquer autovalor α_i temos que*

$$|\alpha_i| \leq \alpha_\Gamma;$$

- (3) *α_Γ tem multiplicidade 1;*
- (4) *existe autovalor positivo correspondente α_Γ .*

3 Espectro \longleftrightarrow Propriedades do Grafo.

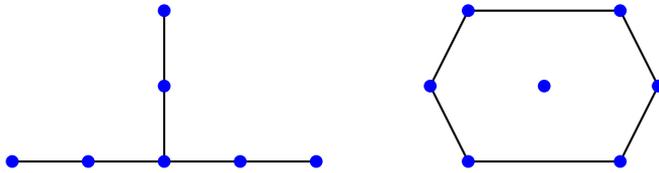
Existe uma ligação forte entre as propriedades do grafo e seu espectro como vamos ver nessa seção. Mesmo assim, sabendo apenas o espectro não tem como recuperar o grafo em geral. Por exemplo, os seguintes dois grafos



tem o mesmo espectro:

$$2, 0, 0, 0, -2,$$

mas são fundamentalmente diferente: um grafo é conexo e outro desconexo. Mesma coisa acontece para os seguinte grafos:



cujos espectro é

$$2, 1, 1, 0, -1, -1, -2.$$

3.1 Diâmetro

Definição 3.1. A *distância* entre dois vértices $i, j \in V$ em Γ definida como o comprimento de menor caminho entre i, j . Agora, o *diâmetro* do grafo Γ d_Γ é a maior distância entre dois vertices.

Proposição 3.2. Se Γ está conectado com o diâmetro d_Γ , então Γ tem pelo menos $d_\Gamma + 1$ autovalores distintos.

Proof. Seja m o número de autovalores diferentes de A_Γ . Por ser diagonalizável, o polinômio mínimo de A_Γ tem grau m e há $\beta_0, \dots, \beta_{m-1} \in \mathbb{R}$ tais que

$$A_\Gamma^m = \beta_0 + \beta_1 A_\Gamma + \dots + \beta_{m-1} A_\Gamma^{m-1}.$$

Suponha que $i, j \in V$ com $d(i, j) = t$, assim há caminhos entre i e j de comprimento t mas não há mais curto. Em termos de A_Γ temos que

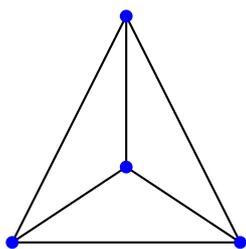
$$(A_\Gamma^k)_{ij} = 0, \quad 0 \leq k \leq t-1, \quad (A_\Gamma^t)_{ij} > 0.$$

Assim $t < m$, pois caso contrario a equação acima vai gerar absurdo. Logo a afirmação segue. \square

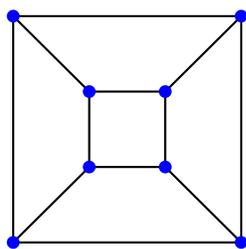
3.2 Grafos regulares

Um grafo Γ é chamado *regular do grau k* se todas vértices tem exatamente k -arestas.

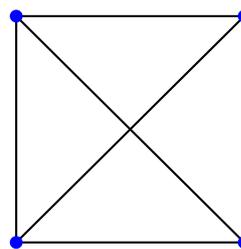
Exemplo 3.3. Os seguintes tres grafos são regulares de grau 3.



Tetraedro

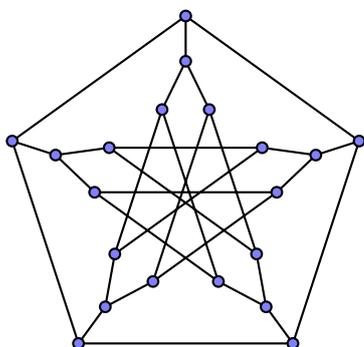


Cubo



Grafo completo

Exemplo 3.4. O seguinte grafo é maior grafo 3-regular de diâmetro 3:



Finalmente, no exemplo acima, o Tutte-Coxeter grafo é 3-regular com 30 vértices e 45 arestas.

Para qualquer grafo, podemos definir os seguintes três valores de maneira natural:

- k_{min} – grau minimal em Γ ;
- k_{max} – grau maximal em Γ ;
- \bar{k} – grau médio em Γ ;

Obviamente, temos que

$$k_{min} \leq \bar{k} \leq k_{max},$$

onde as igualdades acontecem se e somente se Γ é regular.

A seguinte proposição descreva uma ligação entre o grau de regularidade k e o index do grafo α_Γ .

Proposição 3.5. ([BH12, Proposição 3.1.2]) *Suponha que grafo Γ é conexo, assim*

(1) *Se Γ é regular de grau k , logo $\alpha_\Gamma = k$;*

(2) *Se Γ não é regular, assim*

$$k_{min} < \bar{k} < \alpha_\Gamma < k_{max}.$$

Proof. (1). Suponha que Γ é k -regular, assim

$$A_\Gamma \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

ou seja k é autovalor. Agora é fácil verificar que se $t > k$, assim a matriz $t\text{Id}_n - A_\Gamma$ é estritamente diagonalmente dominante ($a_{ii} > \sum_{j \neq i} a_{ij}$ para todos i , veja [HJ13, Capítulo 6]). Assim pelo [HJ13, Teorema 6.2.27], temos que $t\text{Id}_n - A_\Gamma$ é invertível. Logo, k é o maior autovalor.

(2). Temos que

$$A_\Gamma \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \leq k_{\max} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

assim pelo Teorema de Perron-Frobenius, temos que $\alpha_\Gamma \leq k_{\max}$. Caso $A_\Gamma [1 \ \dots \ 1]^T = k_{\max} [1 \ \dots \ 1]^T$, assim Γ é k -regular. Suponha que

$$[1 \ \dots \ 1]^T = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i,$$

numa base ortonormal dos autovetores x_i de A_Γ , assim

$$n\bar{k} = [1 \ \dots \ 1] A [1 \ \dots \ 1]^T = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \alpha_i \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \alpha_\Gamma = n\alpha_\Gamma.$$

Se $n\bar{k} = n\alpha_\Gamma$ logo $\sum \lambda_i^2 (\alpha_i - \alpha_\Gamma) = 0$. Como α_Γ é simples, logo $x_1 = [1 \ \dots \ 1]^T$ e Γ é regular. \square

Corolário 3.6. Um grafo Γ é regular se e somente se $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = n\alpha_\Gamma$.

Proof. [\implies] Se Γ é regular de grau k , assim $\alpha_\Gamma = k$ e

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = \text{tr} A_\Gamma^2 = kn.$$

[\impliedby]

Suponha $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = n\alpha_\Gamma$. Temos

$$\bar{k} = \frac{1}{n} \text{tr} A_\Gamma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = \alpha_\Gamma.$$

Logo, grafo é regular pela proposição acima. \square

3.3 Número de independência

O número de independência $in(\Gamma)$ do grafo Γ é o máximo cardinalidade de a conjunto de vértices não adjacentes dois a dois.

Proposição 3.7.

$$in(G) \leq |\{i : \alpha_i \geq 0\}|, \quad e, \quad in(G) \leq |\{i : \alpha_i \leq 0\}|.$$

3.4 Número cromático

Uma coloração de vértice apropriada de um grafo Γ é uma atribuição de cores aos vértices de forma que os vértices adjacentes obtenham cores diferentes. O número cromático $\chi(\Gamma)$ é o número mínimo de cores de uma coloração de vértice apropriada de Γ .

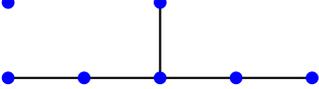
Proposição 3.8. (Wilf, [BH12, Proposição 4.2.1]) *Seja Γ um grafo conexo. Então $\chi(\Gamma) \leq 1 + \alpha_\Gamma$ com a igualdade se e somente se Γ for completo ou for um ciclo ímpar.*

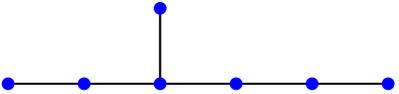
4 Grafos de Dynkin

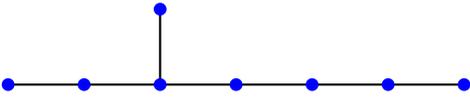
Os seguintes grafos são chamados *grafos de Dynkin*:

A_n :  $|A_n| = n$

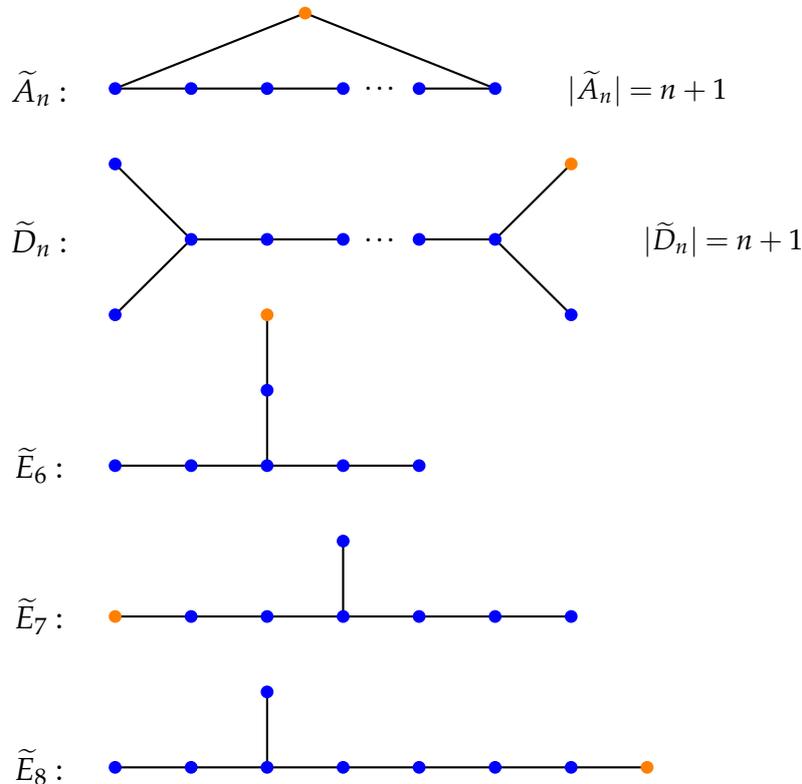
D_n :  $|D_n| = n$

E_6 : 

E_7 : 

E_8 : 

Adicionando mais uma vértice ao cada grafo vamos receber os grafos de *Dynkin* estendidos.

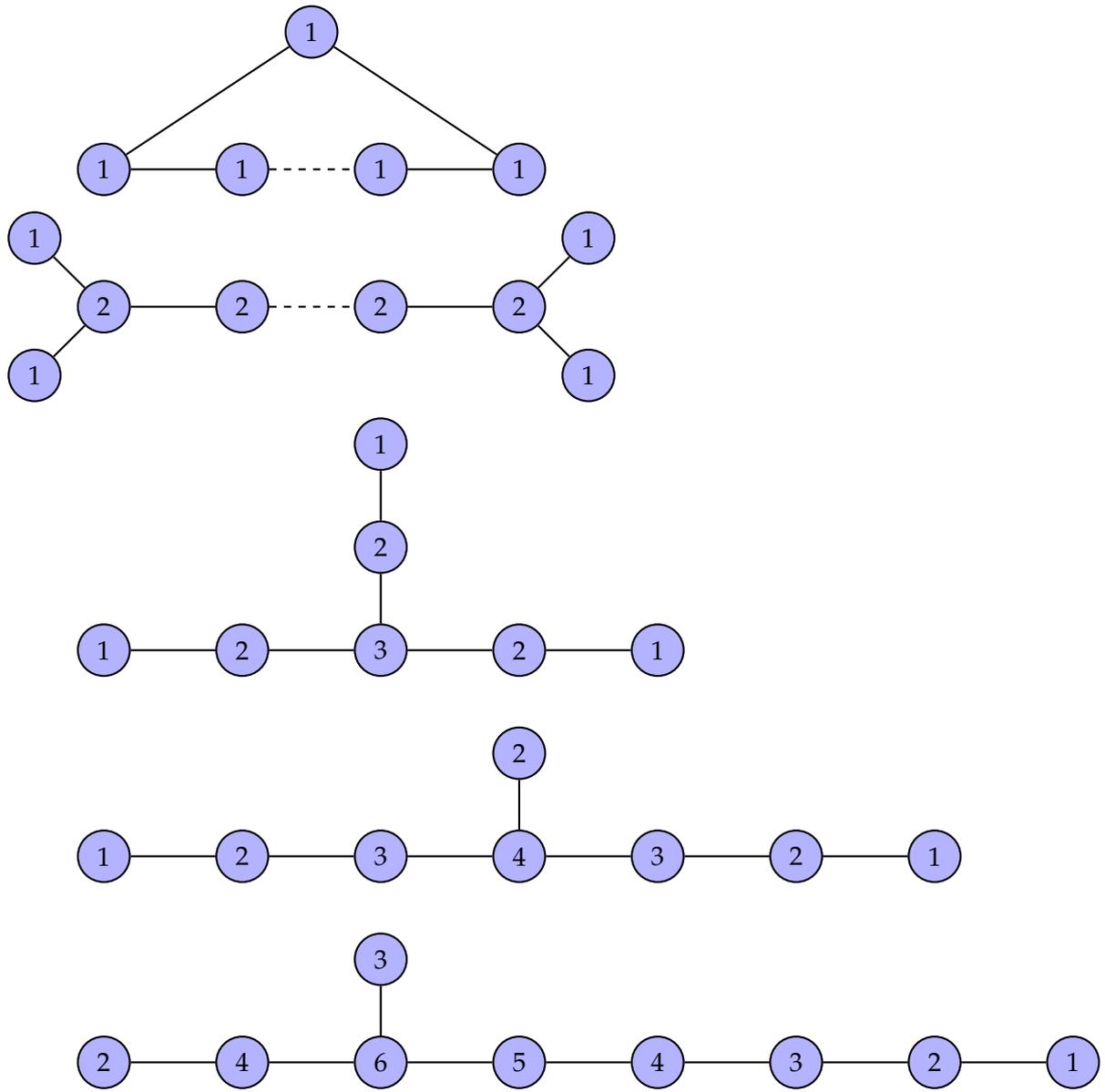


È um mistério como estes grafos aparecem na Matemática em vários lugares aparentemente bem diferentes: álgebras de Lie, teoria de representações das álgebras de dimensão finita, classificação dos certos grupos finitos, classificação das singularidades, etc. Acontece que na Teoria espectral dos Grafos eles distinguem os grafos dependendo do índice.

Teorema 4.1. (Smith, [BH12, Teorema 3.3.1]) *Seja Γ um grafo conexo, assim*

- (1) *O índice $\alpha_\Gamma < 2$ se e somente se quando Γ é um grafo de Dynkin;*
- (2) *O índice $\alpha_\Gamma = 2$ se e somente se quando Γ é um grafo de Dynkin estendido.*

Se Γ , assim pelo Teorema de Smith, temos que $\alpha_\Gamma = 2$. Aplicando o Teorema de Perron-Frobenius deve existir um autovetor positivo correspondente esse autovalor. Abaixo vamos apresentar tal autovetor para todo grafo de Dynkin estendido.



Abaixo vamos discutir como provar o Teorema de Smith. Primeiramente vamos descrever o espectro dos grafos de Dynkin.

4.1 Espectro dos A_n, D_n, \tilde{A}_n e \tilde{D}_n

A prova da seguinte Proposição vou deixar como o trabalho para casa.

Proposição 4.2. Para o grafo de Dynkin A_n temos:

$$\chi_{A_n}(\lambda) = \prod_{1 \leq j \leq n} \left(\lambda - 2 \cos \frac{j\pi}{n+1} \right),$$

portanto:

$$\sigma(A_n) = \left\{ 2 \cos \frac{j\pi}{n+1} \mid j = 1, \dots, n \right\} \quad \alpha_{A_n} = 2 \cos \frac{\pi}{n+1}.$$

Para o grafo de Dynkin estendido \tilde{A}_n , temos:

$$\chi_{\tilde{A}_n}(\lambda) = \prod_{0 \leq j \leq n} \left(\lambda - 2 \cos \frac{j\pi}{n+1} \right),$$

portanto:

$$\sigma(\tilde{A}_n) = \left\{ 2 \cos \frac{j\pi}{n+1} \mid j = 0, \dots, n \right\} \quad \alpha_{\tilde{A}_n} = 2.$$

Proposição 4.3. Para o grafo de Dynkin D_n temos:

$$\chi_{D_n}(\lambda) = \prod_{0 \leq j \leq n-2} \left(\lambda - 2 \cos \frac{(1+2j)\pi}{2(n-1)} \right),$$

portanto:

$$\sigma(A_n) = \left\{ 2 \cos \frac{(1+2j)\pi}{2(n-1)} \mid j = 0, \dots, n-2 \right\} \cup \{0\}, \quad \alpha_{D_n} = 2 \cos \frac{\pi}{2(n-1)}.$$

Para o grafo de Dynkin estendido \tilde{D}_n , temos:

$$\chi_{\tilde{D}_n}(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 - 4) \prod_{1 \leq j \leq n-3} \left(\lambda - 2 \cos \frac{j\pi}{n-2} \right),$$

portanto:

$$\sigma(\tilde{D}_n) = \left\{ 2 \cos \frac{j\pi}{n-2} \mid j = 1, \dots, n-3 \right\} \cup \{-2, 0, 0, 2\}, \quad \alpha_{\tilde{D}_n} = 2.$$

4.2 Espectro dos $E_n, \tilde{E}_n, n = 6, 7, 8$

Proposição 4.4. Para grafos de Dynkin E_6, E_7, E_8 temos

$$\chi_{E_6}(\lambda) = \lambda^6 - 5\lambda^4 + 5\lambda^2 - 1 = \prod_{1 \leq j \leq 6} \left(\lambda - 2 \cos \frac{m_j\pi}{12} \right), \quad m_j = 1, 4, 5, 7, 8, 11,$$

$$\chi_{E_7}(\lambda) = \lambda(\lambda^6 - 6\lambda^4 + 9\lambda^2 - 3) = \prod_{1 \leq j \leq 7} \left(\lambda - 2 \cos \frac{m_j\pi}{18} \right), \quad m_j = 1, 5, 7, 9, 11, 13, 17,$$

$$\chi_{E_8}(\lambda) = \lambda^8 - 7\lambda^6 + 14\lambda^4 - 8\lambda^2 + 1 = \prod_{1 \leq j \leq 8} \left(\lambda - 2 \cos \frac{m_j\pi}{30} \right), \quad m_j = 1, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 23, 29.$$

Assim:

$$\begin{aligned}\sigma(E_6) &= \left\{ 2 \cos \frac{m_j \pi}{12} \mid m_j = 1, 4, 5, 7, 8, 11 \right\}, & \alpha_{E_6} &= 2 \cos \frac{\pi}{12}, \\ \sigma(E_7) &= \left\{ 2 \cos \frac{m_j \pi}{18} \mid m_j = 1, 5, 7, 9, 11, 13, 17 \right\}, & \alpha_{E_7} &= 2 \cos \frac{\pi}{18}, \\ \sigma(E_8) &= \left\{ 2 \cos \frac{m_j \pi}{30} \mid m_j = 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 \right\}, & \alpha_{E_8} &= 2 \cos \frac{\pi}{30}.\end{aligned}$$

Proposição 4.5. Para grafos $\tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$ temos:

$$\begin{aligned}\chi_{\tilde{E}_6}(\lambda) &= \lambda (\lambda^2 - 1)^2 (\lambda^2 - 4), \\ \chi_{\tilde{E}_7}(\lambda) &= \lambda (\lambda^2 - 1) (\lambda^2 - 4) \prod_{1 \leq j \leq 3} \left(\lambda - 2 \cos \frac{j\pi}{4} \right), \\ \chi_{\tilde{E}_8}(\lambda) &= \lambda (\lambda^2 - 1) (\lambda^2 - 4) \prod_{1 \leq j \leq 4} \left(\lambda - 2 \cos \frac{j\pi}{5} \right).\end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}\sigma(\tilde{E}_6) &= \{0, \pm 1, \pm 1, \pm 2\}, & \alpha_{\tilde{E}_6} &= 2, \\ \sigma(\tilde{E}_7) &= \left\{ 2 \cos \frac{j\pi}{4} \mid j = 1, 2, 3 \right\} \cup \{0, \pm 1, \pm 2\}, & \alpha_{\tilde{E}_7} &= 2, \\ \sigma(\tilde{E}_8) &= \left\{ 2 \cos \frac{j\pi}{5} \mid j = 1, 2, 3, 4 \right\} \cup \{0, \pm 1, \pm 2\}, & \alpha_{\tilde{E}_8} &= 2.\end{aligned}$$

4.3 Índice dos grafos maiores que grafos de Dynkin

Sabendo o espectro dos grafos de Dynkin e grafos estendidos basta mostrar que se grafo Γ maior do que grafo de Dynkin estendido, assim $\alpha_\Gamma > 2$. Neste caso podemos proceder como seguinte. Seja $A \geq 0$ uma matriz *irredutível*, ou seja impossível colocar ela na forma triangular superior de bloco por permutações simultâneas de linhas/columnas. Observem que a matriz A_Γ é irreducível se e somente se Γ é conexo. Dada uma extensão das matrizes irreducíveis A e B , podemos controlar o maior autovalor de A como seguinte.

Proposição 4.6. Se $A \geq B \geq 0$ e β é um autovalor de B , então $|\beta| \leq \alpha_1$, onde α_1 é maior autovalor de A . Se a igualdade vale assim $B = A$.

Proof. Seja $x \geq 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $Bx = \beta x$. Isto é

$$A|x| \geq B|x| \geq |\beta| \cdot |x|$$

então pelo teorema Perron-Frobenius temos que $|\beta| \leq \alpha_1$. Se a igualdade for verdadeira, assim o Teorema Perron-Frobenius implique que $|\beta| = \alpha_1$, que $|x| > 0$ e que $A|x| = |\beta||x|$ e usando desigualdade acima nós vemos que

$$(A - B)|x| = 0$$

de modo que $A = B$. □

Corolário 4.7. *Se B é um menor principal de A e β um autovalor de B , assim $|\beta| < \alpha_1$.*

Corolário 4.8. *Seja Γ um grafo conexo. Se Γ' é obtido a partir de Γ retirando uma aresta ou um vértice, então*

$$\alpha_{\Gamma'} < \alpha_{\Gamma}.$$

Aula 2

Problema do Hermann Weyl e suas generalizações

Nessa Aula vamos discutir o problema clássica do Hermann Weyl sobre o espectro de 3 matrizes autoadjuntas A, B e C tais que $A = B + C$ e suas generalizações. Depois, vamos considerar a generalização deste problema para n -tupla dos operadores autoadjuntos num espaço de Hilbert. vamos ver as generalizações seria conveniente codificar em termos de certos grafos e estudar as representações da certa álgebra (involutiva). Estudando as propriedades de tais álgebras vamos ver como os grafos de Dynkin aparecem nesse contexto.

1 Problema de Hermann Weyl

1.1 Problema

Sejam dados três conjuntos dos numeros reais:

$$\begin{aligned}\sigma_A : \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \cdots \geq \alpha_n, \\ \sigma_B : \beta_1 \geq \beta_2 \geq \beta_3 \geq \cdots \geq \beta_n, \\ \sigma_C : \gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \gamma_3 \geq \cdots \geq \gamma_n.\end{aligned}$$

Problema(Hermann Weyl [[Wey12](#)], 1912) Descrever as condições necessárias e suficientes para α_i 's, β_i 's e γ_i ' de modo que existem três matrizes autoadjuntas A, B e C do mesmo tamanho, cujos espectros são σ_A, σ_B e σ_C respectivamente e

$$A + B = C.$$

A resposta completa para este problema é fascinante, exigindo uma descrição estranhamente recursiva, antes conhecida como conjectura de Horn (veja de baixo), que agora está resolvida e conectada a um grande número de outros campos da matemática, como a teoria dos invariantes geométricos, a teoria da intersecção e varios outros. O

problema de Hermann Weyl é ligado para vários problemas aparentemente independentes tais como:

- problema sobre o produto tensorial para componentes de irredutível representações de GL_n com os pesos maximais;
- fatores invariantes;
- cálculo de Schubert;
- feixes tóricos semi-estáveis,

e muitos outros. veja [Ful00] (e as referencias la) para detalhes ausentes. Alem disso tem as aplicações típicas para matrizes aleatórias, quando uma das matrizes (digamos, B) é “pequena” em algum sentido, de modo que $A + B$ é uma perturbação de A (veja [Ful00] (e as referencias la) para detalhes ausentes).

1.2 Primeiros resultados

Como $\text{tr}C = \text{tr}A + \text{tr}B$, assim temos que

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{i=1}^n \beta_i. \quad (1.1)$$

A igualdade acima chama-se *igualdade de traço*.

Podemos pensar em A como um operador linear no complexo espaço euclidiano \mathbb{C}^n equipado com seu produto interno usual $\langle x, y \rangle$, escrito também como x^*y e a norma associada $\|x\| = (x^*x)^{1/2}$. O Teorema Espectral nos diz que todo operador Hermitiano A pode ser diagonalizado em alguma base ortonormal; ou equivalentemente, existe uma matriz unitária U tal que $UAU^* = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Se u_j são os autovetores ortonormais correspondentes aos seus autovalores α_j , escrevemos $A = \sum \alpha_j u_j u_j^*$, e chamamos isso de *resolução espectral* de A . Usando isso, é fácil ver que o conjunto $\{\langle x, Ax \rangle : \|x\| = 1\}$ é igual ao intervalo $[\alpha_n, \alpha_1]$. Em particular, temos

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \max_{\|x\|=1} \langle x, Ax \rangle \\ \alpha_n &= \min_{\|x\|=1} \langle x, Ax \rangle \end{aligned}$$

Para cada vetor fixo x , a quantidade $\langle x, Ax \rangle$ depende linearmente de A . As equações acima expressam α_1, α_n como máximo ou mínimo sobre essas funções lineares. Muitas vezes, eles levam a desigualdades interessantes, por exemplo temos

$$\begin{aligned} \gamma_1 &\leq \alpha_1 + \beta_1 \\ \gamma_n &\geq \alpha_n + \beta_n \end{aligned}$$

O Hermann Weyl no seu artigo original [Wey12] recebeu as seguintes desigualdades seguinte as ideias acima.

Teorema 1.1. Se $i \leq j$, assim temos que

$$\gamma_j \leq \alpha_i + \beta_{j-i+1}.$$

Proof. A gente vai dar apenas esboço da prova. Sejam u_j, v_j e w_j são autovalores de A, B e $A + B$ que correspondem os autovalores α_j, β_j e γ_j . Considere os seguintes subespaços:

$$\begin{aligned} W &= \{w_1, w_2, \dots, w_j\}, \\ U &= \{u_i, u_{i+1}, \dots, u_n\}, \\ V &= \{v_{j-i+1}, v_{j-i+2}, \dots, v_n\}. \end{aligned}$$

Temos que

$$\dim W = j, \quad \dim U = n - i + 1, \quad \dim V = n - j + i,$$

assim $\dim W + \dim U + \dim V = 2n + 1$, ou seja $W \cap U \cap V$ tem interseção de dimensão maior igual a 1. Tomando vetor unitário $x \in W \cap U \cap V$ temos que

$$\gamma_j \leq \langle x, (A + B)x \rangle \leq \langle x, Ax \rangle + \langle x, Bx \rangle \leq \alpha_i + \beta_{j-i+1},$$

pois $\langle x, Ax \rangle$ está no intervalo $[\alpha_n, \alpha_i]$, $\langle x, Bx \rangle$ está no intervalo $[\beta_n, \beta_{j-i+1}]$ e $\langle x, (A + B)x \rangle$ está no intervalo $[\gamma_j, \gamma_1]$. \square

No caso particular, quando $n = 2$ essas desigualdade geram 3 desigualdades

$$\gamma_1 \leq \alpha_1 + \beta_1, \quad \gamma_2 \leq \alpha_1 + \beta_2, \quad \gamma_2 \leq \alpha_2 + \beta_1, \quad (1.2)$$

e acontece essas três desigualdades são suficiente para caracterizar os possíveis autovalores de A, B e C ; ou seja, se três pares de números reais $\{\alpha_1, \alpha_2\}, \{\beta_1, \beta_2\}, \{\gamma_1, \gamma_2\}$, cada um ordenado de forma decrescente, satisfazem essas relações, então existem 2×2 matrizes autoadjuntas A e B de modo que esses pares são os autovalores de A, B e $A + B$

Quando $n \geq 3$, existem mais relações. O primeiro devido a Ky Fan (1949) diz

$$\sum_{j=1}^k \gamma_j \leq \sum_{j=1}^k \alpha_j + \sum_{j=1}^k \beta_j, \text{ for } 1 \leq k \leq n. \quad (1.3)$$

Quando $k = n$, os dois lados de (1.3) são iguais; isso é apenas a igualdade de traço (1.1). Uma generalização substancial disso foi obtida por V. B. Lidskii (1950). Para resumir, deixe $[1, n]$ denotar o conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$. O teorema de Lidskii diz que para cada subconjunto $I \subset [1, n]$ com cardinalidade $|I| = k$, temos

$$\sum_{i \in I} \gamma_i \leq \sum_{i \in I} \alpha_i + \sum_{j \leq k} \beta_j \quad (1.4)$$

Observe que essas desigualdades incluem (1.3) como um caso especial escolhendo $I = [1, k]$.

Quando $n = 3$, obtemos seis relações das desigualdades de Weyl:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &\leq \alpha_1 + \beta_1, & \gamma_2 &\leq \alpha_1 + \beta_2, & \gamma_2 &\leq \alpha_2 + \beta_1 \\ \gamma_3 &\leq \alpha_1 + \beta_3, & \gamma_3 &\leq \alpha_3 + \beta_1, & \gamma_3 &\leq \alpha_2 + \beta_2 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Mais cinco resultam das desigualdades (1.4):

$$\begin{aligned} \gamma_1 + \gamma_2 &\leq \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 \\ \gamma_1 + \gamma_3 &\leq \alpha_1 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2 \\ \gamma_2 + \gamma_3 &\leq \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2 \\ \gamma_1 + \gamma_3 &\leq \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_3 \\ \gamma_2 + \gamma_3 &\leq \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \beta_3 \end{aligned} \quad (1.6)$$

(use a simetria em A, B). Acontece que mais uma relação

$$\gamma_2 + \gamma_3 \leq \alpha_1 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_3$$

é válido. Além disso, as relações (1.5), (1.6) junto com (1.1) são suficientes para caracterizar os possíveis autovalores de A, B e C para caso $n = 3$.

1.3 Desigualdades de Horn.

O teorema de Lidskii despertou muito interesse e várias outras desigualdades foram descobertas. Todos eles têm a forma

$$\sum_{k \in K} \gamma_k \leq \sum_{i \in I} \alpha_i + \sum_{j \in J} \beta_j \quad (1.7)$$

Isso leva às seguintes questões. Quais são todos os triplos (I, J, K) de subconjuntos de $[1, n]$ para os quais as desigualdades (1.7) são verdadeiras? Essas desigualdades, junto com (1.1), são suficientes para caracterizar α, β e γ que podem ser autovalores das matrizes Hermitianas A, B e $A + B$?

Em um artigo fundamental [Hor62] em 1962, Alfred Horn fez uma conjectura que afirmava que essas desigualdades, juntamente com relação do traço (1.1), são suficientes e que o conjunto T_r^n de triplos (I, J, K) de cardinalidade r em $[1, n]$ pode ser descrito por indução em r como segue. Vamos escrever $I = \{i_1 < i_2 < \dots < i_r\}$ e da mesma forma para J e K . Então, para $r = 1$, (I, J, K) está em T_1^n se $k_1 = i_1 + j_1 - 1$. Para $r > 1$, $(I, J, K) \in T_r^n$ se

$$\sum_{i \in I} i + \sum_{j \in J} j = \sum_{k \in K} k + \binom{r+1}{2}$$

e, para todos $1 \leq p \leq r - 1$ e todos $(U, V, W) \in T_p^r$

$$\sum_{u \in U} i_u + \sum_{v \in V} j_v \leq \sum_{w \in W} k_w + \binom{p+1}{2}$$

Horn provou sua conjectura para $n = 3$ e 4 . Observe que quando $n = 2$, essas condições apenas se reduzem às três desigualdades dadas por (1.2). Quando $n = 3$, elas se reduzem ao doze desigualdades (1.5), (1.6). Quando $n = 7$, há 2.062 desigualdades dadas por essas condições, assim o numero das desigualdades cresce bem rápido quando n cresce.

Teorema 1.2. (Klyachko [Kly98] e Knutson, Tao [KT99]) *Conjetura de Horn é verdadeira.*

2 Problema espectral aditivo

2.1 Modificação do problema de Weyl

O problema de Weyl possui varios generalizações. Com a relação com espaços vetorias filtrados (veja, por exemplo, [Tot94]) acontece o problema em procurando possíveis espectros $\sigma(A_i)$ dos n -matrizes autoadjuntos que satisfazem

$$A_1 + \dots + A_n = \lambda \text{Id}.$$

Vamos consideramos uma modificação de tal problema como o seguinte. Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert separável. Para um operador linear limitado $X \in L(\mathcal{H})$ denotamos por $\sigma(X)$ seu espectro. Suponha que dados os subconjuntos finitos $M_i \subset \mathbb{R}_+$:

$$M_i = \{0 = \alpha_0^{(i)} < \alpha_1^{(i)} < \dots < \alpha_{m_i}^{(i)}\}$$

e $\lambda \in \mathbb{R}_+$. O problema (chamado *problema espectral aditivo*) é determinar se existe uma n -tupla de operadores autoadjuntos limitados $A_i = A_i^*$ em \mathcal{H} tais que seus espectros satisfazem $\sigma(A_i) \subset M_i$ e

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = \lambda \text{Id},$$

e descrever todas tais tuplas irredutíveis a menos de equivalência unitária. Dizemos que duas tuplas $A_i \in L(\mathcal{H})$ e $A'_i \in L(\mathcal{H}')$ são *unitariamente equivalentes* se existir um operador unitário $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ tal que $A'_i U = U A_i$ para todos i .

Observação 2.1. Uma diferença essencial entre o problema acima e o problema clássico de Weyl é que não fixamos a dimensão do espaço de Hilbert (que pode ser até infinito) e não fixamos as multiplicidades espectrais.

2.2 *-álgebras e suas representações

Podemos estudar o problema acima usando os métodos da teoria de representações das álgebras involutivas. Assim vamos vamos brevemente ver o que são as *-álgebras e suas *-representações.

Uma \mathbb{C} -álgebra \mathcal{A} (isto é, um \mathbb{C} -espaço linear com um produto associativo) é chamada **-álgebra* (ou *álgebra involutiva*, se \mathcal{A} possui uma *involução* $*$: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ que satisfaz

$$(a + b)^* = a^* + b^*, \quad (ab)^* = b^* a^*, \quad (a^*)^* = a, \quad (\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Por exemplo $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$ é uma álgebra involutiva com a involução $A^* = \overline{A^T}$. Outro exemplo é dado por $\mathcal{A} = L(\mathcal{H})$, onde \mathcal{H} é um espaço de Hilbert, e para um operador dado $A \in L(\mathcal{H})$ a involução $*$ é definido como operador adjunto de A .

Dada uma $*$ -álgebra \mathcal{A} uma $*$ -representação de \mathcal{A} é um espaço de Hilbert \mathcal{H} junto com $*$ -homomorfismo das álgebras

$$\pi : \mathcal{A} \rightarrow L(\mathcal{H}),$$

ou seja π é homomorfismo das algebra e $\pi(a^*) = \pi(a)^*$.

Dados duas representações (\mathcal{H}, π) e (\mathcal{H}', π') dizemos que eles são *unitariamente equivalentes* se existir um operador unitário $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ tal que

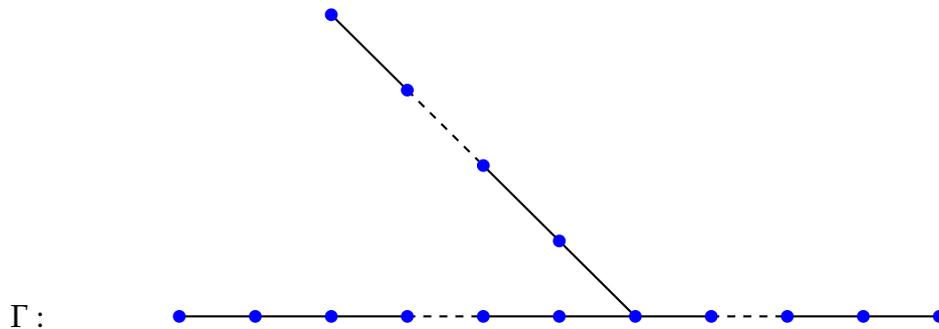
$$\pi(a)U = U\pi'(a), \quad a \in \mathcal{A}.$$

Uma $*$ -representação (\mathcal{H}, π) da álgebra \mathcal{A} chama-se *irredutível* se os únicos operadores $V \in L(\mathcal{H})$ que comutam com $\pi(a)$ para todos $a \in \mathcal{A}$ são operadores escalares.

Observação 2.2. De certa forma basta estudar apenas $*$ -representações irredutíveis a menos de equivalência unitária.

2.3 Certas $*$ -álgebras relacionadas com os grafos

A informação dada em conjuntos M_i e valor λ pode ser codificada completamente pelo um grafo que tem a forma estrela com n -braços com i -esimo braço tem $|M_i|$ elementos:

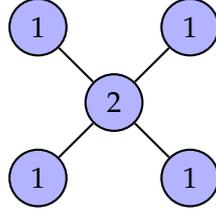


E uma função χ no conjunto dos vértices desse grafo

$$\chi = (\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_{m_1}^{(1)}; \dots; \alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_{m_n}^{(n)}; \lambda).$$

que codifique os elementos dos conjuntos M_i e λ

Exemplo. Suponha que temos 4 conjuntos $M_i = \{0,1\}$, com $i = 1, \dots, 4$, e $\lambda = 2$, o grafo correspondente é \tilde{D}_4 :



Onde a gente colocou os componentes do χ em vertices correspondetes. Agora, considere a seguinte $*$ -álgebra

$$\mathcal{A}_{\Gamma, \chi} = \mathbb{C} \langle a_1, \dots, a_n \mid a_i = a_i^*, (a_i - \alpha_0^{(i)}) \dots (a_i - \alpha_{m_i}^{(i)}) = 0, \\ a_1 + a_2 + \dots + a_n = \gamma e \rangle.$$

O problema espectral aditivo é equivalente ao seguinte tarefas a serem resolvidas:

- para cada peso χ decidir se ou não álgebra $\mathcal{A}_{\Gamma, \chi}$ tem $*$ -representação;
- descrever todos $*$ -representações irredutíveis de $\mathcal{A}_{\Gamma, \chi}$ a menos de equivalência unitária.

A vantagem desse abordagem é que podemos usar as ferramentas da teoria das representações (das álgebras involutivas) para atacar o problema mencionada. Além disso estudando as propriedades da álgebra podemos esperar que eles trazem as informações sobre as representações dela.

2.4 Crescimento e finitude da $\mathcal{A}_{\Gamma, \chi}$

Dependendo das propriedades do gráfico Γ a estrutura da algebra $\mathcal{A}_{\Gamma, \chi}$ é bastante diferente.

Estudando as propriedades da uma algebra uma das questões naturais é *crescimento* dele. Esse noção chegou de grupos. Seja $S = \{g_1 \dots g_n\}$ um conjunto de geradores para um grupo G finitamente gerado. Seja $S^{(n)}$ a coleção de todos os elementos de G que podem ser escritos como uma palavra em S de comprimento $\leq n$, e seja $f_G(n) = |S^{(n)}|$ é o número de elementos de $S^{(n)}$. A função $f_G(n)$ é chamada de *função de crescimento* de G (em relação aos geradores escolhidos). Uma definição semelhante pode ser dada para álgebra. Seja, a_1, \dots, a_r um conjunto de geradores de uma algebra A sobre um corpo \mathbb{F} , de modo que todo $a \in A$ é uma combinação linear de monômios no a_i . Seja V o espaço vetorial gerado pelos a_i , e seja V^k o subespaço vetorial de A de todas as \mathbb{F} -combinações lineares de produtos $v_1 \dots v_k, v_i \in V$. Então a função

$$f_A(n) = \sum_{i=1}^n \dim V^i$$

é a função de crescimento de A .

Observem que o crescimento de f_A não depende da escolha de V e o crescimento da álgebra de grupo $\mathbb{F}[G]$ é o crescimento de G .

Teorema 2.3. (M. Vlasenko, A. Mellit e Yu.S. Samoilenko, [VMS05])

- Se Γ é um grafo de Dynkin tipo A_n, D_n, E_6, E_7 ou E_8 , assim $\mathcal{A}_{\Gamma, \chi}$ é uma álgebra da dimensão finita;
- Se Γ é um grafo de Dynkin estendido $\tilde{D}_4, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7$ ou \tilde{E}_8 , assim $\mathcal{A}_{\Gamma, \chi}$ é uma álgebra da dimensão infinita, mas tem crescimento polinomial;
- Se Γ contém um grafo de Dynkin estendido como próprio subgrafo assim $\mathcal{A}_{\Gamma, \chi}$ tem crescimento exponencial, e contém álgebra involutiva livre de dois geradores.

2.5 Relações polinomiais em $\mathcal{A}_{\Gamma, \chi}$

O teorema de Amitsur-Levitzki afirma que a álgebra de $n \times n$ matrizes sobre um anel comutativo satisfaz uma certa identidade de grau $2n$. Isso foi provado por Amitsur e Levitsky (1950). Em particular, os anéis da matriz são anéis de identidade polinomial, de modo que a menor identidade que eles satisfazem tem um grau exatamente $2n$. Onde o polinômio padrão de grau n é

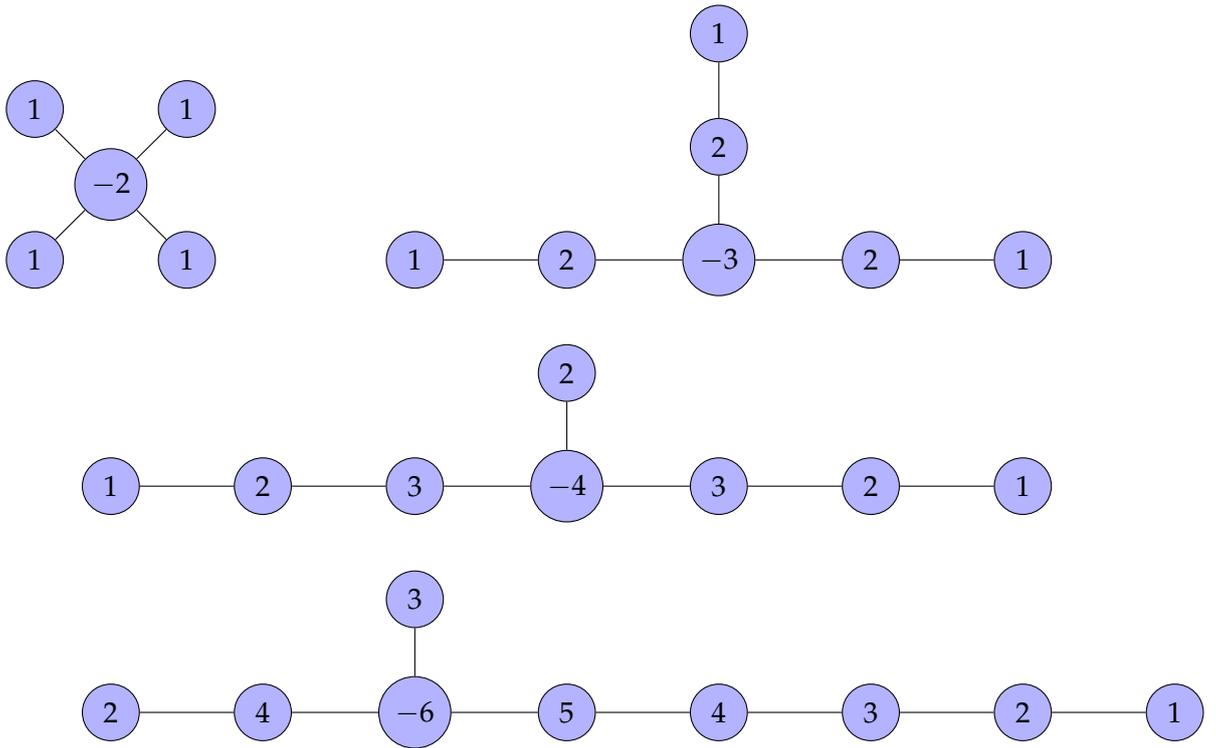
$$S_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}.$$

em variáveis não comutativas x_1, \dots, x_n e a soma é feita por todo $n!$ elementos do grupo simétrico S_n . Dizemos que uma álgebra \mathcal{A} é F_n -álgebra se ela satisfaz a polinômio padrão do grau n . Por exemplo $M_n(R)$ é F_{2n} -álgebra por resultado do Amitsur e Levitsky.

Observação 2.4. Saber se ou não uma $*$ -álgebra A é F_n álgebra é bem importante para representações dela. Nomeadamente, se A é F_{2n} -álgebra assim as dimensões das representações irredutíveis são limitadas pelo n .

Teorema 2.5. (Mellit) Seja Γ é um grafo de Dynkin estendido $\tilde{D}_4, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7$ ou \tilde{E}_8 . Suponha que χ é uma função no grafo com a propriedade que $\langle \chi, v_\Gamma \rangle = 0$ assim $\mathcal{A}_{\Gamma, \chi}$ é F_{2n} -álgebra, com $n = 2, 3, 5, 6$ para $\tilde{D}_4, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7$ ou \tilde{E}_8 respectivamente.

A função v_Γ usada no Teorema acima é relacionada com o autovetor do index do grafo correspondente e dada como o seguinte.



2.6 Estrutura das representações

Como a gente viu a estrutura da álgebra $\mathcal{A}_{\Gamma, \lambda}$ depende fortemente do grafo Γ . Assim não é surpresa que a teoria das representações dessa álgebra depende também do grafo Γ :

Dynkin: Neste caso a descrição das $*$ -representações é conhecida e a classificação foi feito pelo Kruglyak e Roiter (veja [KR05]). No caso toda $*$ -representação irreduzível tem dimensão limitada e representações dependem de 0-parametros.

Dynkin estendido: Neste caso a descrição das $*$ -representações irreduzível é possível ainda. Existem $*$ -representação irreduzíveis com dimensões illimitadas, mas a descrição das representações depende de 1-parametro no maximo.

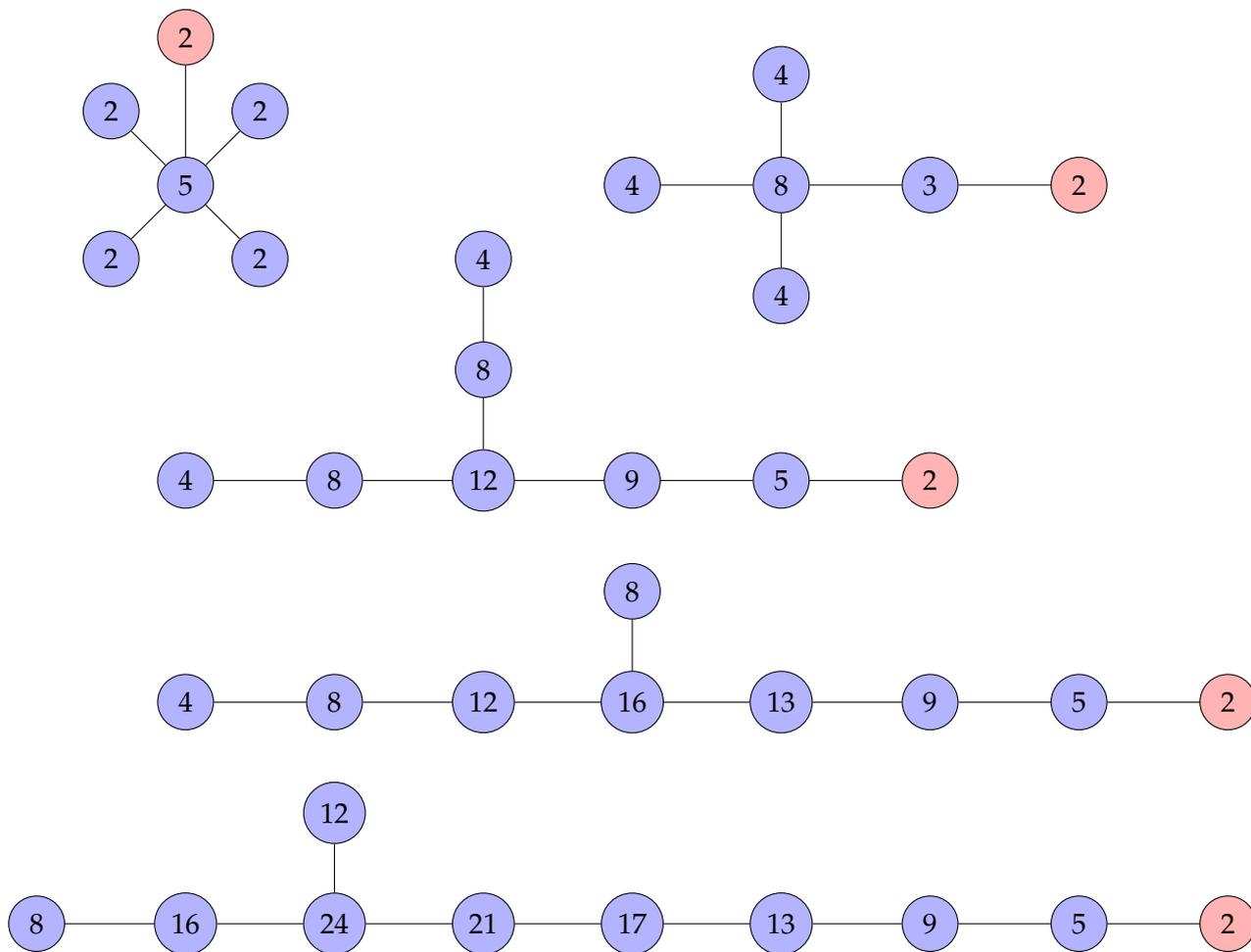
Se Γ **contem Dynkin estendido:** Neste caso a situação é mais complicada. Mencionarei dois resultados que indicam que a descrição completa dos irreduzíveis pode ser até impossível.

Teorema 2.6. (Ostrovskii, [AOS07]) *Se Γ contem o grafo de Dynkin estendido como subgrafo próprio, assim existe função χ_{Γ} de modo que álgebra $\mathcal{A}_{\Gamma, \chi_{\Gamma}}$ tem $*$ -representação irreduzível de dimensão infinita.*

Teorema 2.7. (KI, Weist, [WY13]) *Seja Γ um grafo em forma de estrela que contém um grafo de Dynkin estendido como um subgrafo próprio. Então existe um a função χ_{Γ} tal que a álgebra*

$\mathcal{A}_{\Gamma, \chi_{\Gamma}}$ tem uma família de *-representações irredutíveis não equivalentes que dependem de um número arbitrário de parâmetros contínuas.

O Teorema acima foi provada estendendo os grafos de Dynkin por um ponto e construindo a função χ_{Γ} para tais estensões:



Trabalho

Entregar até 31 de Outubro:

- 3 exercícios do Bloco A,
- + 3 exercícios do Bloco B,
- + 2 exercícios do Bloco C,
- + 2 exercícios do Bloco D.

Bloco A

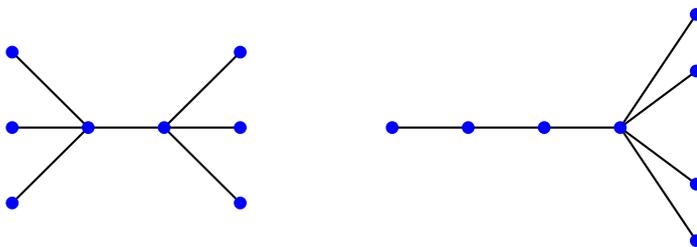
Exercício 1. Estende a prova do Teorema espectral (da Aula 1) para caso $A \in M_n(\mathbb{C})$ ou seja para números complexos.

Exercício 2. Mostre que o espectro do grafo completo K_n tem forma $n - 1$ com multiplicidade 1 e -1 com multiplicidade $n - 1$.

Exercício 3. Mostre que nenhum grafo tem autovalor $1/2$.

Exercício 4. Mostre que nenhum grafo tem autovalor $2 + \sqrt{5}$.

Exercício 5. Verifique se ambos os grafos de baixo tem o mesmo polinômio característico $t^4(t^4 - 7t^2 + 9)$, de modo que essas duas árvores são cospectrais.



Exercício 6. Define o *cone* sobre um grafo Γ como o grafo obtido pela adição um novo vértice x e juntando todos os vértices de Γ para x . Se Γ é regular de valência k em n vértices assim mostre que o cone sobre Γ tem polinômio característico

$$(x^2 - kx - n)\chi_{\Gamma}(x)/(x - k).$$

Exercício 7. Seja Γ qualquer grafo. Mostre que o grau médio \bar{k} (veja pagina 8 das Aula 1) pode ser calculado como

$$\bar{k} = \frac{1}{n} \text{tr} A_{\Gamma}.$$

Bloco B

Exercício 8. Mostre que o polinômio característico do grafo de Dynkin A_n satisfaz o seguinte relação de recorrência

$$\chi_{A_n}(\lambda) = \lambda \cdot \chi_{A_{n-1}}(\lambda) - \chi_{A_{n-2}}(\lambda), \quad n > 2,$$

com $\chi_{A_1}(\lambda) = \lambda$ e $\chi_{A_2}(\lambda) = \lambda^2 - 1$.

Exercício 9. Mostre que o polinômio característico do grafo de Dynkin \tilde{A}_n satisfaz:

$$\chi_{\tilde{A}_n}(\lambda) = \lambda \cdot \chi_{A_n}(\lambda) - 2\chi_{A_{n-1}}(\lambda) - 2.$$

Exercício 10. Usando Exercício 8 descreva o espectro do grafo de Dynkin A_n como na Proposição 4.2 (Aula 1).

Exercício 11. Usando Exercício 8 descreva o espectro do grafo de Dynkin \tilde{A}_n como na Proposição 4.2 (Aula 1).

Exercício 12. Mostre que o espectro para grafos D_4 e \tilde{D}_4 satisfaz os formulas como na Proposição 4.3.

Exercício 13. Calcule o espectro para grafo E_6 .

Bloco C

Exercício 14. Mostre que se dois matrizes Hermitianas satisfazem que $AB = BA$, então A e B são simultaneamente diagonalizáveis.

Exercício 15. Usando exercício anterior mostre “manualmente” as desigualdades de Weyl (Teorema 1.1 da Aula 2) e desigualdades de Lidski (1.4) para caso quando A e B comutam.

Exercício 16. Mostre a desigualdade de Weyl dual

$$\gamma_{i+j-n} \geq \alpha_i + \beta_j,$$

para $1 \leq i, j, i + j - n \leq n$.

Exercício 17. Mostre a desigualdade de Lidski dual

$$\gamma_{i_1} + \dots + \gamma_{i_k} \geq \alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_k} + \beta_{n-k+1} + \dots + \beta_n,$$

para $1 \leq i, j, i + j - n \leq n$.

Exercício 18. Use a desigualdade de Lidskii mais geral

$$\sum_{i=1}^n c_i \gamma_i \leq \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i + \sum_{i=1}^n c_i^* \beta_i,$$

onde $c_1, \dots, c_n \geq 0$, e $c_1^* \geq \dots \geq c_n^* \geq 0$ é o rearranjo decrescente de c_1, \dots, c_n junto com a desigualdade de Hölder para concluir a desigualdade *p-Weilandt-Hoffman*

$$\|(\gamma_i - \alpha_i)_{i=1}^n\|_{\ell_n^p} \leq \|B\|_{S^p}$$

para qualquer $1 \leq p \leq \infty$, onde

$$\|(a_i)_{i=1}^n\|_{\ell_n^p} := \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p}$$

é a norma ℓ^p usual e

$$\|B\|_{S^p} := \|(\beta_i)_{i=1}^n\|_{\ell_n^p},$$

é a norma *p-Schatten* de B .

Bloco D

Exercício 19. Sejam

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \cos \varphi \sin \varphi \\ \cos \varphi \sin \varphi & \sin^2 \varphi \end{bmatrix},$$

com $\varphi \in (0, \pi/2)$. Mostre que $P = P^2 = P^*$ e $Q = Q^2 = Q^*$, ou sejam P, Q são orthoprojetores em \mathbb{C} . Além disso mostre que se $\varphi \neq \varphi'$ em $[0, \pi]$ assim os pares correspondentes não são unitariamente equivalentes (veja Aula 2 para definição).

Exercício 20. Mostre que para qualquer $\varphi \in (0, \pi/2)$ a par P, Q como no exercício anterior é irredutível (ou seja unicos matrizes de $M_2(\mathbb{C})$ que comutam com ambas P e Q) são matrizes escalares.

Exercício 21. and either $a > 0, b > 0, c \in \mathbb{R}$, or $a = 0, b > 0, c > 0$, or $a > 0, b = 0, c > 0$. These representations form the first family in the statement of the theorem. The formulas for P_k are

Considere

$$P_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+a & -b-ic \\ -b+ic & 1-a \end{pmatrix}, \quad P_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-a & b-ic \\ b+ic & 1+a \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-a & -b+ic \\ -b-ic & 1+a \end{pmatrix}, \quad P_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+a & b+ic \\ -b-ic & 1-a \end{pmatrix}'$$

com $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Mostre que

- (1) $P_i = P_i^2 = P_i^*$ para $i = 1, 2, 3, 4$;
- (2) $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 2I$;
- (3) Para diferentes $a > 0, b > 0, c \in \mathbb{R}$ os formulas acima apresentas as tuplas unitariamente não equivalentes.

Exercício 22. Mostre que se $a > 0, b > 0, c \in \mathbb{R}$ assim as tuplas no exercício acima são irredutíveis. Conclui que eles são $*$ -representações da algebra $\mathcal{A}_{\tilde{D}_4, \chi}$ com $\chi = (2; 1, 1, 1, 1)$.

Bibliography

- [AOS07] Sergio Albeverio, Vasyl Ostrovskiy, and Yurii Samoilenko. On functions on graphs and representations of a certain class of $*$ -algebras. *J. Algebra*, 308(2):567–582, 2007.
- [BH12] Andries E. Brouwer and Willem H. Haemers. *Spectra of graphs*. Universitext. Springer, New York, 2012.
- [CRS10] Dragoš Cvetković, Peter Rowlinson, and Slobodan Simić. An introduction to the theory of graph spectra. 75:xii+364, 2010.
- [Ful00] William Fulton. Eigenvalues, invariant factors, highest weights, and Schubert calculus. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 37(3):209–249, 2000.
- [HJ13] Roger A. Horn and Charles R. Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2013.
- [Hor62] Alfred Horn. Eigenvalues of sums of Hermitian matrices. *Pacific J. Math.*, 12:225–241, 1962.
- [Kly98] Alexander A. Klyachko. Stable bundles, representation theory and Hermitian operators. *Selecta Math. (N.S.)*, 4(3):419–445, 1998.
- [KR05] S. A. Kruglyak and A. V. Roĭter. Locally scalar representations of graphs in the category of Hilbert spaces. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 39(2):13–30, 94, 2005.
- [KT99] Allen Knutson and Terence Tao. The honeycomb model of $GL_n(\mathbb{C})$ tensor products. I. Proof of the saturation conjecture. *J. Amer. Math. Soc.*, 12(4):1055–1090, 1999.
- [Tot94] Burt Totaro. Tensor products of semistables are semistable. In *Geometry and analysis on complex manifolds*, pages 242–250. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1994.
- [VMS05] M. A. Vlasenko, A. S. Mellit, and Yu. S. Samoilenko. On algebras generated by linearly connected generators with a given spectrum. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 39(3):14–27, 95, 2005.

- [Wey12] Hermann Weyl. Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung). *Math. Ann.*, 71(4):441–479, 1912.
- [WY13] Thorsten Weist and Kostyantyn Yusenko. Unitarizable representations of quivers. *Algebr. Represent. Theory*, 16(5):1349–1383, 2013.