

# MAT0120 - Álgebra I para Licenciatura

## Lista 1 - Soluções

Professor: Kostiantyn Iusenko  
Monitor: Douglas de Araujo Smigly

1º Semestre de 2021

### 1 Axiomática de $\mathbb{Z}$

(1) Dado um inteiro  $x$ , chamamos de *valor absoluto* de  $x$  o número inteiro designado por  $|x|$  e definido por

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Sejam  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Prove que

- (a)  $|a| \geq 0$ ;
- (b)  $|a| = 0$  se, e somente se,  $a = 0$ ;
- (c)  $-|a| \leq a \leq |a|$ ;
- (d)  $|ab| = |a||b|$ ;
- (e)  $|a + b| \leq |a| + |b|$ ;
- (f)  $||a| - |b|| \leq |a - b|$ .

#### Solução

(a) Pela definição de valor absoluto, temos dois casos a analisar:

- $a \geq 0$  : Se  $a \geq 0$ , então por definição,  $|a| = a \geq 0$ .
- $a < 0$ . Se  $a < 0$ , isso significa que  $-a > 0$ , e  $|a| = -a > 0$ .

Portanto, concluímos que  $|a| \geq 0$  para todo  $a$ .

(b) ( $|a| = 0 \Rightarrow a = 0$ ) : Vamos verificar que se  $|a| \neq 0$ , então  $a \neq 0$ . Veja que, se  $a < 0$ , então  $-a > 0$ , e  $|a| = -a > 0$ , o que implica  $a \neq 0$ . Agora, se  $a > 0$ , então  $|a| = a > 0$ , assim  $a \neq 0$ . Logo,  $|a| = 0$  apenas para  $a = 0$ .

( $|a| = 0 \Leftarrow a = 0$ ) : Por definição,  $|0| = 0$ .

(c)

Novamente, vamos dividir a situação em dois casos:

- Se  $a < 0$ , então  $-a > 0$  e  $|a| = -a > 0 > a$  e  $-|a| = a$ . Logo,

$$-|a| = a < |a|.$$

- Se  $a \geq 0$ , então  $|a| = a > 0$ , e  $-|a| < 0 < a$ , logo

$$-|a| < a = |a|$$

Juntando as duas informações, temos

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

(d) Vamos primeiramente provar que  $|a| = \sqrt{a^2}$ . Observe que:

- Se  $a = 0$ , então  $|a| = 0 = \sqrt{0^2} = \sqrt{a^2}$ .
- Se  $a > 0$ , então  $|a| = a = \sqrt{a^2}$ .
- Se  $a < 0$ , então  $-a > 0$ . Assim, pelo caso anterior, segue que  $|-a| = \sqrt{(-a)^2}$ . Agora, por definição, como  $-a$  é positivo, então  $|-a| = -a = |a|$ . Além disso,  $\sqrt{(-a)^2} = \sqrt{a^2}$ . Portanto,

$$|a| = |-a| = \sqrt{(-a)^2} = \sqrt{a^2}.$$

Agora, aplicando tal propriedade na igualdade que precisamos verificar, ficamos com

$$|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{(a^2b^2)} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2} = |a||b|.$$

(e) Utilizando o item (c), temos:

$$-|a| \leq a \leq |a| \quad \text{e} \quad -|b| \leq b \leq |b|.$$

Somando ambas, vem

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

Vamos agora analisar os possíveis valores de  $a + b$  na identidade acima:

- Se  $a + b \geq 0$ , então  $|a + b| = a + b \leq |a| + |b|$
- Se  $a + b < 0$ , então  $|a + b| = -(a + b) \leq |a| + |b|$ .

Em ambos os casos, concluímos que  $|a + b| \leq |a| + |b|$ .

(f) Observe que, pela Desigualdade Triangular provada no item (e)

$$|a| = |a - b + b| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|.$$

Logo,

$$|a| - |b| \leq |a - b| + |b| - |b| = |a - b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b|.$$

Por outro lado, com o resultado acima, trocando  $a$  com  $b$ , temos  $|b| - |a| \leq |b - a|$ , o que nos permite limitar  $-|a - b|$  por

$$|a - b| = |-(a - b)| = |b - a| \geq |b| - |a| = -(|a| - |b|) \Rightarrow -|a - b| \leq |a| - |b|.$$

Juntando as duas informações, temos:

$$-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|.$$

Vamos analisar os possíveis valores de  $|a| - |b|$  :

- Se  $|a| - |b| \geq 0$ , então  $||a| - |b|| = |a| - |b| \leq |a - b|$ .
- Se  $|a| - |b| < 0$ , então  $||a| - |b|| = -(|a| - |b|) = |b| - |a| \leq |b - a| = |-(a - b)| = |a - b|$ .

Em ambos os casos, concluímos que  $||a| - |b|| \leq |a - b|$ .

(2) Prove que o conjunto  $S = \{m \in \mathbb{Z} \mid 7 < m < 8\}$  é vazio.

### Solução

Observe que, se  $m \in \mathbb{Z}$  é tal que  $7 < m < 8$ , então  $0 < m - 7 < 1$ . Assim,

$$S = \{m \in \mathbb{Z} \mid 7 < m < 8\} = \{m \in \mathbb{Z} \mid 0 < m - 7 < 1\},$$

e tomando  $s \in \mathbb{Z}$ , basta mostrar que o conjunto

$$S' = \{s \in \mathbb{Z} \mid 0 < s < 1\}$$

é vazio. Para isto, vamos supor por absurdo que  $S' \neq \emptyset$ . Nesse caso,  $S'$  é um conjunto não-vazio de números inteiros não-negativos, e pelo Princípio da Boa Ordem, segue que este admite um elemento mínimo. Chamemo-lo de  $\xi$ . Assim,

$$\xi \in S \Rightarrow 0 < \xi < 1.$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade por  $\xi$ , temos que  $0 < \xi^2 < \xi < 1$ . Ou seja, existe um outro elemento  $\xi^2 \in S'$  que é menor que  $\xi$ , o que é absurdo, pois  $\xi$  é minimal. Logo, tal elemento não pode existir, e  $S' = \emptyset$ . Consequentemente,  $S = \emptyset$ , como queríamos demonstrar.

(3) Um elemento  $a \in \mathbb{Z}$  é dito *inversível* se existir um elemento  $a' \in \mathbb{Z}$  tal que  $aa' = 1$ . Mostre que os únicos elementos inversíveis de  $\mathbb{Z}$  são 1 e  $-1$ .

### Solução

Seja  $a \in \mathbb{Z}$ , e suponha que  $a$  é inversível. Assim, existe um elemento  $a' \in \mathbb{Z}$  tal que  $aa' = 1$ . Veja que  $a \neq 0$ , pois  $0 \cdot a' = 0 \neq 1$ .

Se  $a \neq 0$ ,

$$a \cdot a' \Rightarrow |a \cdot a'| = |1| \Rightarrow |a||a'| = 1.$$

Mas

$$|a| \geq 1$$

e

$$|a'| \geq 1.$$

Então, a única forma do produto  $|a||a'|$  ser 1 é caso  $|a| = 1$ , o que implica pela definição de valor absoluto vista no exercício 2 que  $a = 1$  ou  $a = -1$ .

(4) Sejam  $p, q \in \mathbb{Z}$ .

(a) Prove que

$$(i) \quad p \cdot (-q) = (-p) \cdot q = -(p \cdot q);$$

$$(ii) \quad (-p) \cdot (-q) = p \cdot q.$$

(b) Mostre que se a multiplicação em  $\mathbb{Z}$  tivesse sido definida satisfazendo  $(-p) \cdot (-q) = -(p \cdot q)$ , para todos  $p, q \in \mathbb{N}$ , então os números inteiros não satisfariam os seguintes axiomas:

(i) Propriedade cancelativa: para toda terna de inteiros  $a, b, c$ , com  $a \neq 0$ , tem-se que, se  $ab = ac$ , então  $b = c$ .

(ii) Propriedade distributiva: para toda terna de inteiros  $a, b, c$  de inteiros tem-se que  $a(b + c) = ab + ac$ .

(c) Se fosse válido que  $(-3) \cdot (-5) = -15$ , mostre que teríamos  $7 \cdot 2 = -16$ .

### Solução

(a) Mostrar que  $p \cdot (-q) = -(p \cdot q)$  significa mostrar que o número  $p \cdot (-q)$  é inverso aditivo de  $p \cdot q$ , isto é,  $p \cdot (-q) + p \cdot q = 0$ . E de fato:

$$p \cdot (-q) + p \cdot q = p \cdot ((-q) + q) = p \cdot 0 = 0.$$

Analogamente, mostramos que  $(-p) \cdot q = -(p \cdot q)$ , o que completa a prova de (i). Agora, usando (i), temos

$$(-p) \cdot (-q) = -(p \cdot (-q)) = -(-(p \cdot q)) = p \cdot q,$$

o que verifica (ii).

(b) Seja  $a = -5, b = 3$  e  $c = -3$ , então se tivéssemos  $(-5) \cdot (-3) = -(5 \cdot 3) = -15$ ,

$$(-5) \cdot 3 = (-5) \cdot (-3),$$

mas  $3 \neq -3$ . Logo, a propriedade cancelativa não seria válida.

Agora, veja que

$$(-5)(3 + (-3)) = -5 \cdot 0 = 0$$

Por outro lado, pela propriedade distributiva,

$$(-5)(3 + (-3)) = (-5) \cdot 3 + (-5) \cdot (-3) = -15 + (-15) = -30 \neq 0.$$

Logo, a propriedade distributiva não seria válida.

(c) Escrevendo  $7 = 10 - 3$  e  $2 = 7 - 5$ , temos pela lei distributiva que

$$\begin{aligned} 7 \cdot 2 &= (10 - 3) \cdot (7 - 5) \\ &= 10 \cdot 7 + 10 \cdot (-5) + (-3) \cdot 7 + (-3) \cdot (-5) \\ &= 70 - 50 - 21 - 15 \\ &= -16. \end{aligned}$$

## 2 Indução Finita

(1) Prove que se vale o Princípio da Indução Finita, então vale o Princípio da Boa Ordem.

### Solução

Seja  $A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  um conjunto finito não-vazio. Para  $n = 1$ , temos que  $A_1 = \{a_1\}$  e  $a_1$  é claramente elemento minimal de  $A_1$ . Agora, suponha que para  $n = k > 1$ , o conjunto  $A_k = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  tenha elemento minimal  $a_k^*$ . O conjunto  $A_{k+1} = A_k \cup a_{k+1}$  possui duas opções: ou  $a_{k+1} \leq a_k^*$ , o que implica que  $a_{k+1}$  é um elemento minimal de  $A_{k+1}$ , ou  $a_{k+1} > a_k^*$ , o que implica que  $a_k^*$  é elemento minimal de  $A_{k+1}$ . Logo, por indução,  $A_n$  sempre tem um elemento minimal, e portanto, vale o Princípio da Boa Ordem.

(2) Prove que se vale a segunda forma do Princípio da Indução Finita, então vale o Princípio da Boa Ordem.

### Solução

Seja  $A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  um conjunto finito não-vazio. Para  $n = 1$ , temos que  $A_1 = \{a_1\}$  e  $a_1$  é claramente elemento minimal de  $A_1$ . Agora, suponha que para todo  $n$ , com  $1 \leq n \leq k$ , o conjunto  $A_k = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  tenha elemento minimal  $a_k^*$ . O conjunto  $A_{k+1} = A_k \cup a_{k+1}$  possui duas opções: ou  $a_{k+1} \leq a_k^*$ , o que implica que  $a_{k+1}$  é um elemento minimal de  $A_{k+1}$ , ou  $a_{k+1} > a_k^*$ , o que implica que  $a_k^*$  é elemento minimal de  $A_{k+1}$ . Logo, por indução,  $A_n$  sempre tem um elemento minimal, e portanto, vale o Princípio da Boa Ordem.

(3) Prove por indução que

$$(a) \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall n \geq 1;$$

$$(b) \sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \forall n \geq 1;$$

$$(c) \text{ [Desigualdade de Bernoulli] } (1+h)^n \geq 1+nh, \text{ onde } h > 0 \text{ está fixado e } n \geq 0.$$

### Solução

(a) Vamos primeiramente testar o caso **base**  $n = 1$ :

$$1^2 = \frac{1 \cdot (2 \cdot 1 + 1) (1 + 1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Agora, temos como **hipótese** que a afirmação é válida para certo  $k > 1$ , ou seja,

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(2k+1)(k+1)}{6}$$

Vamos mostrar que a expressão é válida para  $n = k + 1$ , correspondendo ao **passo indutivo**:

$$\begin{aligned}
 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k + 1)^2 &= \frac{k(2k + 1)(k + 1)}{6} + (k + 1)^2 \\
 &= (k + 1) \left( \frac{k(2k + 1)}{6} + (k + 1) \right) \\
 &= \frac{(k + 1)}{6} (k(2k + 1) + 6(k + 1)) \\
 &= \frac{(k + 1)}{6} (2k^2 + 7k + 6) \\
 &= \frac{(k + 1)}{6} ((k + 2)(2k + 3)) \\
 &= \frac{(k + 1)(2k + 3)(k + 2)}{6}.
 \end{aligned}$$

(b) O caso **base** é  $n = 1$  :

$$1^3 = \left( \frac{1(1 + 1)}{2} \right)^2 = \left( \frac{1 \cdot 2}{2} \right)^2 = 1^2 = 1$$

Agora, vamos assumir por **hipótese** que para certo  $n = k > 1$ , a expressão a ser demonstrada é válida, ou seja,

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = \left( \frac{k(k + 1)}{2} \right)^2$$

O **passo indutivo** será verificar que isso acarreta a validade da expressão para  $n = k + 1$  :

$$\begin{aligned}
 1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k + 1)^3 &= \left( \frac{k(k + 1)}{2} \right)^2 + (k + 1)^3 \\
 &= \frac{k^2(k + 1)^2}{4} + (k + 1)^3 \\
 &= (k + 1)^2 \left( \frac{k^2}{4} + (k + 1) \right) \\
 &= \frac{(k + 1)^2}{4} (k^2 + 4(k + 1)) \\
 &= \frac{(k + 1)^2}{4} (k^2 + 4k + 4) \\
 &= \frac{(k + 1)^2}{4} (k + 2)^2 \\
 &= \left( \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} \right)^2.
 \end{aligned}$$

- (c) Como  $h$  está fixado, utilizaremos  $n$  para realizar a indução. O caso **base** é  $n = 0$ , donde obtemos

$$(1 + h)^0 = 1 \geq 1 + 0 \cdot h = 1$$

Agora, a **hipótese** é que a expressão é válida para certo  $n = k > 0$ :

$$(1 + h)^k \geq 1 + kh$$

Vejamos que isso ocasiona a validade desta para  $n = k + 1$ , correspondendo ao **passo indutivo**:

$$\begin{aligned} (1 + h)^{k+1} &= (1 + h)^k (1 + h) \\ &\geq (1 + kh) (1 + h) \\ &= 1 + h + kh + kh^2 \\ &= 1 + (k + 1)h + \underbrace{kh^2}_{>0} > 1 + (k + 1)h. \end{aligned}$$

(4) Prove por indução que

- (a)  $n^3 + 2n$  é sempre divisível por 3 para todo  $n \geq 0$ ;
- (b)  $5^n - 4n + 15$  é sempre divisível por 16 para todo  $n \geq 0$ ;
- (c)  $2n^3 + 3n^2 + 7n$  é sempre divisível por 6 para todo  $n \geq 0$ .
- (d)  $4^{2n-1} + 1$  é sempre divisível por 5 para todo  $n \geq 1$ .
- (e)  $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$  é sempre divisível por 11 para todo  $n \geq 1$ .

### Solução

Lembrando que se um número inteiro  $k$  é divisível por 3, então existe um  $t \in \mathbb{Z}$  tal que  $k = 3t$ , estamos aptos a resolver os itens pedidos:

- (a) **Caso Base:**  $n = 0$  Temos que

$$0^3 + 2 \cdot 0 = 0 = 0 \cdot 3$$

Logo,  $n^3 + 2n$  é divisível por 3 para  $n = 0$ .

**Hipótese:** Assuma que  $n^3 + 2n$  é divisível por 3 para certo  $n = k > 0$ , ou seja, que para certo  $t \in \mathbb{Z}$ , seja satisfeito

$$k^3 + 2k = 3t.$$

**Passo Indutivo:** Provemos que  $n^3 + 2n$  é divisível por 3 para  $n = k + 1$ :

$$\begin{aligned} (k + 1)^3 + 2(k + 1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2 \\ &= k^3 + 2k + 3(k^2 + k + 1) \\ &= 3t + 3(k^2 + k + 1) \\ &= 3(t + k^2 + k + 1) = 3q; \quad q \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Portanto, por indução, concluímos que  $n^3 + 2n$  é divisível por 3 para todo  $n \geq 0$ .

(b) **Caso Base:**  $n = 0$  Temos que

$$5^0 - 4 \cdot 0 + 15 = 1 + 15 = 16 = 1 \cdot 16$$

Logo,  $5^n - 4n + 15$  é divisível por 16 para  $n = 0$ . **Hipótese:** Assuma que  $5^n - 4n + 15$  é divisível por 16 para certo  $n = k > 0$ , ou seja, que para certo  $t \in \mathbb{Z}$ , seja satisfeito

$$5^n - 4n + 15 = 16t$$

*Passo Indutivo:* Provemos que  $5^n - 4n + 15$  é divisível por 16 para  $n = k + 1$  :

$$\begin{aligned} 5^{k+1} - 4(k+1) + 15 &= 5^{k+1} - 4k + 11 \\ &= 5^{k+1} - 20k + 16k + 75 - 64 \\ &= 5^{k+1} - 20k + 75 + 16k - 64 \\ &= 5(5^k - 4k + 15) + 16(k - 4) \\ &= 5 \cdot 16t + 16(k - 4) = 16(5t - k + 4) = 16q; \quad q \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

(c) **Caso Base:**  $n = 0$  Temos que

$$2 \cdot 0^3 + 3 \cdot 0^2 + 7 \cdot 0 = 0 = 0 \cdot 6$$

*Hipótese:* Assuma que  $2n^3 + 3n^2 + 7n$  é divisível por 6 para certo  $n = k > 0$ , ou seja, que para certo  $t \in \mathbb{Z}$ , seja satisfeito

$$2k^3 + 3k^2 + 7k = 6t$$

*Passo Indutivo:* Provemos que  $2n^3 + 3n^2 + 7n$  é divisível por 6 para  $n = k + 1$  :

$$\begin{aligned} 2(k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 7(k+1) &= 2(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + 3(k^2 + 2k + 1) + 7(k+1) \\ &= 2k^3 + 6k^2 + 6k + 2 + 3k^2 + 6k + 3 + 7k + 7 \\ &= 2k^3 + 3k^2 + 7k + 6k^2 + 6k + 12 \\ &= 6t + 6(k^2 + k + 2) \\ &= 6(t + k^2 + k + 2) = 6q; \quad q \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$



(d) **Caso Base:**  $n = 1$  Temos que

$$4^{2 \cdot 1 - 1} + 1 = 4^1 + 1 = 5 = 1 \cdot 5$$

*Hipótese:* Assuma que  $4^{2n-1} + 1$  é divisível por 5 para certo  $n = k > 1$ , ou seja, que para certo  $t \in \mathbb{Z}$ , seja satisfeito

$$4^{2n-1} + 1 = 5t$$

*Passo Indutivo:* Provemos que  $4^{2n-1} + 1$  é divisível por 5 para  $n = k + 1$  :

$$\begin{aligned} 4^{2 \cdot (k+1) - 1} + 1 &= 4^{2k+2-1} - 1 \\ &= 4^{2+(2k-1)} + 1 \\ &= 4^2 \cdot 4^{2k-1} + 1 \\ &= 16 \cdot 4^{2k-1} + 1 \\ &= 15 \cdot 4^{2k-1} + 4^{2k-1} + 1 \\ &= 15 \cdot 4^{2k-1} + 5t \\ &= 5(3 \cdot 4^{2k-1} + t) = 5q; \quad q \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

(e) **Caso Base:**  $n = 1$  Temos que

$$6^{2 \cdot 1 - 2} + 3^{1+1} + 3^{1-1} = 1 + 9 + 1 = 11 = 1 \cdot 11$$

*Hipótese:* Assuma que  $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$  é divisível por 11 para certo  $n = k > 1$ , ou seja, que para certo  $t \in \mathbb{Z}$ , seja satisfeito

$$6^{2k-2} + 3^{k+1} + 3^{k-1} = 11t$$

*Passo Indutivo:* Provemos que  $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$  é divisível por 11 para  $n = k + 1$  :

$$\begin{aligned} 6^{2(k+1)-2} + 3^{(k+1)+1} + 3^{(k+1)-1} &= 6^{2k+2-2} + 3^{k+1+1} + 3^{k+1-1} \\ &= 6^{2+(2k-2)} + 3^{1+(k+1)} + 3^{1+(k-1)} \\ &= 6^2 \cdot 6^{2k-2} + 3 \cdot 3^{k+1} + 3 \cdot 3^{k-1} \\ &= 6^{2k-2} + 3^{k+1} + 3^{k-1} + 35 \cdot 6^{2k-2} + 2 \cdot 3^{k+1} + 2 \cdot 3^{k-1} \\ &= 11t + 35 \cdot (2 \cdot 3)^{2k-2} + 2 \cdot 3^{(k-1)+2} + 2 \cdot 3^{k-1} \\ &= 11t + 35 \cdot 2^2 \cdot 3^{2(k-1)} \cdot 3^{2(k-1)} + 2 \cdot 3^2 \cdot 3^{k-1} + 2 \cdot 3^{k-1} \\ &= 11t + 35 \cdot 4^{k-1} \cdot 9^{k-1} + 18 \cdot 3^{k-1} + 2 \cdot 3^{k-1} \\ &= 11t + 35 \cdot 36^{k-1} + 20 \cdot 3^{k-1} \\ &= 11t + 35 \cdot (3 \cdot 12)^{k-1} + 20 \cdot 3^{k-1} \\ &= 11t + 35 \cdot 12^{k-1} \cdot 3^{k-1} + 20 \cdot 3^{k-1} \\ &= 11t + (35 \cdot 12^{k-1} + 20) \cdot 3^{k-1} \\ &= 11t + 5 \cdot (7 \cdot 12^{k-1} + 4) \cdot 3^{k-1} \\ &= 11t + 5 \cdot (7 \cdot (11 + 1)^{k-1} + 4) \cdot 3^{k-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 11t + 5 \cdot \left( 7 \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} 11^{k-1-i} + 4 \right) \cdot 3^{k-1} \\
&= 11t + 5 \cdot \left( 7 \cdot \left( 11 \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-1}{i} 11^{k-1-i} + 1 \right) + 4 \right) \cdot 3^{k-1} \\
&= 11t + 5 \cdot \left( 7 \cdot 11 \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-1}{i} 11^{k-1-i} + 7 + 4 \right) \cdot 3^{k-1} \\
&= 11t + 5 \cdot \left( 7 \cdot 11 \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-1}{i} 11^{k-1-i} + 11 \right) \cdot 3^{k-1} \\
&= 11t + 11 \cdot \left( 35 \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-1}{i} 11^{k-1-i} + 1 \right) \cdot 3^{k-1} \\
&= 11 \left( t + \left( 35 \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-1}{i} 11^{k-1-i} + 1 \right) \cdot 3^{k-1} \right) = 11q; \quad q \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

(5) Sejam  $a$  e  $r$  dois números inteiros. Dizemos que a sequência  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ , onde  $a_1 = a, a_2 = a + r, a_3 = a + 2r, \dots, a_n = a + (n-1)r$  é uma *progressão aritmética* de razão  $r$ . Prove, utilizando o princípio de indução finita, que a soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão aritmética é dada por:

$$\sum_{i=1}^n a_i = a + (a+r) + (a+2r) + \dots + (a+(n-1)r) = \frac{n(2a + (n-1)r)}{2}$$

### Solução

O caso **base** é  $n = 1$ :

$$\frac{1 \cdot (2a + (1-1)r)}{2} = \frac{2a + 0}{2} = a$$

Vamos assumir por **hipótese** que para certo  $n = k > 1$ , a somatória demonstrada é válida, ou seja,

$$\sum_{i=1}^k a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_k = \frac{k(2a + (k-1)r)}{2}$$

Vamos então verificar a validade da fórmula para  $n = k + 1$ , compreendendo o **passo indutivo**:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} a_i &= a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} = \frac{k(2a + (k-1)r)}{2} + a_{k+1} \\
&= \frac{k(2a + (k-1)r)}{2} + a + ((k+1) - 1)r \\
&= \frac{k(2a + (k-1)r) + 2a + 2kr}{2} \\
&= \frac{2ak + k(k-1)r + 2a + 2kr}{2} \\
&= \frac{2a(k+1) + r(k(k-1) + 2k)}{2} \\
&= \frac{2a(k+1) + r(k^2 - k + 2k)}{2} \\
&= \frac{2a(k+1) + r(k^2 + k)}{2} \\
&= \frac{2a(k+1) + rk(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(2a + kr)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(2a + ((k+1) - 1)r)}{2}.
\end{aligned}$$

(6) Considere a seguinte sequência de somas:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2!} = \frac{1}{2} \\
& \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = \frac{5}{6} \\
& \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = \frac{23}{24} \\
& \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = \frac{119}{120}
\end{aligned}$$

e seja  $P(n)$  a soma

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n-1}{n!}$$

Determine uma expressão para  $P(n)$  e, em seguida, utilizando o Princípio da Indução Finita, prove sua validade para  $n \geq 2$ .

### Solução

Observe que o denominador de cada expressão é  $n!$ , já que  $\text{mmc}(2!, 3!, \dots, n!) = n!$ , e o numerador é uma unidade menor do que o denominador. Logo, podemos conjecturar que

$$P(n) = \sum_{i=2}^n \frac{n! - 1}{n!}$$

Provemos a fórmula para  $P(n)$  por indução. O caso **base** é  $n = 2$ , o qual é claramente verdadeiro pelo enunciado:

$$\frac{1}{2!} = \frac{1}{2} = \frac{2! - 1}{2} = \frac{2 - 1}{2}$$

Agora, assumamos que o resultado é válido para  $n = k > 2$ , ou seja, que

$$P(k) = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{k-1}{k!} = \frac{k! - 1}{k!}$$

Vejam que o resultado é válido para  $n = k + 1$ , com o **passo indutivo**:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{k-1}{k!} + \frac{k}{(k+1)!} &= \frac{k! - 1}{k!} + \frac{k}{(k+1)!} \\ &= \frac{(k! - 1)(k+1) + k}{(k+1)!} \\ &= \frac{1}{(k+1)!} \cdot ((k! - 1)(k+1) + k) \\ &= \frac{1}{(k+1)!} \cdot (k! \cdot k + k! - k - 1 + k) \\ &= \frac{1}{(k+1)!} \cdot (k!(k+1) - 1) \\ &= \frac{(k+1)! - 1}{(k+1)!} \end{aligned}$$

(7) Prove que se  $n \geq 3$ , então a soma dos ângulos internos de um polígono regular de  $n$  lados é

$$(n - 2) \cdot 180^\circ$$

### Solução

Vamos provar a afirmação utilizando indução em  $n$ . Iniciando com o caso base, para  $n = 3$ , o polígono convexo é um triângulo, e sabemos da geometria euclidiana elementar que a soma de seus ângulos internos é  $180^\circ$ , ou seja,  $S_3 = (3 - 2) \cdot 180^\circ = 180^\circ$ .

Suponha agora por hipótese que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo com  $n = k$  lados seja

$$S_k = (k - 2) \cdot 180^\circ.$$

Considere o polígono convexo  $A_0A_1 \dots A_k$  com  $n = k + 1$  lados, ilustrado na figura 1.

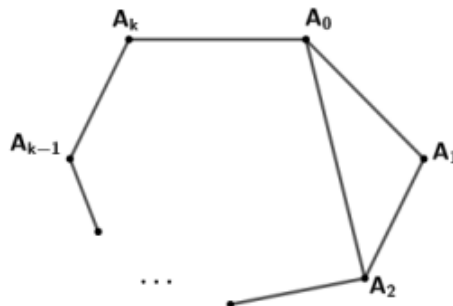


Figura 1: Polígono de  $k + 1$  lados

O polígono  $A_0A_2 \cdots A_k$  que se obtém traçando o segmento  $\overline{A_0A_2}$  tem  $k$  lados. Consequentemente a soma dos seus ângulos internos é  $S_k = (k - 2) \cdot 180^\circ$ . Agora, a soma dos ângulos internos do polígono original será a soma dos ângulos do triângulo  $A_0A_1A_2$  adicionada de  $S_k$ , isto é,

$$S_{k+1} = S_k + 180^\circ = (k - 2) \cdot 180^\circ + 180^\circ = (k + 1 - 2) \cdot 180^\circ.$$

Assim, a soma dos ângulos internos de um polígono regular de  $n$  lados de fato é  $(n - 2) \cdot 18^\circ$ .

(8) Sabe-se que a forma trigonométrica do número complexo  $z = a + bi$  é dada por

$$z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta),$$

onde  $\theta = \arg z$  e  $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Prove, utilizando o Princípio de Indução Finita, a fórmula de De Moivre, isto é, se  $z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ , então

$$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

### Solução

Começemos com o caso **base**. Nessa situação, o caso base é dado para  $n = 0$ , onde temos:

$$z^0 = \rho^0 (\cos(0\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(0\theta)) = 1 \cdot (\cos(0) + i \cdot \operatorname{sen}(0)) = 1 = z^0$$

Agora, suponha por **hipótese** que a fórmula de De Moivre é válida para um certo  $n = k > 0$ , ou seja,

$$z^k = \rho^k (\cos(k\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(k\theta))$$

Temos então que, para  $n = k + 1$ ,

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= z^k \cdot z^1 = \left( \rho^k (\cos(k\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(k\theta)) \right) \cdot (\rho (\cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta)) \\ &= \rho^{k+1} (\cos(k\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(k\theta)) \cdot (\cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta) \\ &= \rho^{k+1} (\cos(k\theta) \cos \theta - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(k\theta) + i \cdot (\cos k\theta \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} k\theta \cos \theta)) \\ &= \rho^{k+1} (\cos(k\theta + \theta) + i \cdot (\operatorname{sen}(k\theta + \theta))) \\ &= \rho^{k+1} (\cos((k+1)\theta) + i \cdot \operatorname{sen}((k+1)\theta)) \end{aligned}$$

Portanto, o **passo indutivo** está finalizado e a fórmula de De Moivre provada.

(9) Seja  $a \neq 0 \in \mathbb{Z}$  e  $m \in \mathbb{N}$ . Definimos a potência não-negativa de  $a$  do seguinte modo:

$$a^m = \begin{cases} 1, & \text{se } m = 0 \\ a, & \text{se } m = 1. \\ a^{m-1} \cdot a, & \text{se } m > 1 \end{cases}$$

Prove que

(a)  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \forall m, n \in \mathbb{N};$

(b)  $(a^m)^n = a^{m \cdot n}, \forall m, n \in \mathbb{N}.$

### Solução

Provemos ambos os itens por indução:

(a) O caso base é  $n = 0$  :

$$a^m \cdot a^0 \stackrel{\text{def}}{=} a^m \cdot 1 = a^{m+0} = a^m$$

A hipótese de indução é que, para certo  $n = k$ , é válido

$$a^m \cdot a^k = a^{m+k}; k \in \mathbb{Z}.$$

Provemos agora que a afirmação é válida para  $n = k + 1$  :

$$a^m \cdot a^{k+1} = a^m \cdot (a^k \cdot a^1) = (a^m \cdot a^k) \cdot a^1 = a^{m+k} \cdot a^1 \stackrel{\text{def}}{=} a^{m+k+1}$$

(b) O caso base é  $n = 0$  :

$$(a^m)^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1 = a^{m \cdot 0} = a^0$$

A hipótese de indução é que, para certo  $n = k$ , é válido

$$(a^m)^k = a^{m \cdot k}; k \in \mathbb{Z}$$

Provemos agora que a afirmação é válida para  $n = k + 1$  :

$$(a^m)^{k+1} = (a^m)^k \cdot (a^m)^1 = a^{m \cdot k} \cdot a^m = a^{m \cdot k + m} = a^{m(k+1)}$$

(10) Prove que  $x - y$  divide  $x^n - y^n$  para quaisquer inteiros  $x, y$  distintos e  $n \geq 1$ .

### Solução

Vamos provar o resultado por indução. Primeiramente, observemos o **caso base**  $n = 1$  :

$$x^1 - y^1 = x - y = 1 \cdot (x - y)$$

Como **hipótese de indução**, assumamos que  $x - y$  divide  $x^n - y^n$  para  $n = k > 1$ , ou seja, que

$$x^k - y^k = t(x - y); t \in \mathbb{Z}$$

Realizemos agora o **passo indutivo**, mostrando que a afirmação é válida para  $n = k + 1$ :

$$\begin{aligned} x^{k+1} - y^{k+1} &= x \cdot x^k - y \cdot y^k \\ &= x \cdot x^k - x \cdot y^k + x \cdot y^k - y \cdot y^k \\ &= x(x^k - y^k) + y^k(x - y) \\ &= x \cdot t(x - y) + y^k(x - y) \\ &= (x - y)(xt + y^k) \\ &= (x - y)q; \quad q \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

(11) Para todo inteiro  $n \geq 1$ , prove que

$$(a) \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x};$$

$$(b) 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1 \text{ ([Dica:] Use o item anterior).}$$

**Solução**

(a) O caso base é  $n = 1$ . Temos:

$$1 + \frac{x}{1-x} = \frac{1-x+x}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

Agora, assumamos por hipótese que a afirmação é válida para  $n = k > 1$ , ou seja,

$$1 + x + \dots + x^{k-1} + \frac{x^k}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

Vamos provar que o resultado é válido para  $n = k + 1$ . Para isso, observe primeiramente que, da hipótese de indução, temos

$$1 + x + \dots + x^{k-1} + \frac{x^k}{1-x} = \frac{1}{1-x} \Rightarrow$$

$$1 + x + \dots + x^{k-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^k}{1-x}$$

Utilizando isso, estamos aptos a realizar o passo indutivo para provar que

$$1 + x + \dots + x^{k-1} + x^k + \frac{x^{k+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} 1 + x + \dots + x^{k-1} + x^k + \frac{x^{k+1}}{1-x} &= \frac{1}{1-x} - \frac{x^k}{1-x} + x^k + \frac{x^{k+1}}{1-x} \\ &= \frac{1 - x^k + x^k(1-x) + x^{k+1}}{1-x} \\ &= \frac{1 - x^k + x^k - x^{k+1} + x^{k+1}}{1-x} \\ &= \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

(b) Para  $x = 2$ , temos:

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = \frac{1}{1-2} - \frac{2^n}{1-2} = -1 - \frac{2^n}{-1} = 2^n - 1$$

**(12)** \* Seja  $n$  um inteiro positivo. Mostre que

$$(a) \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0;$$

$$(b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

### Solução

(a) Para resolver esse item, vamos considerar a expansão de  $(x + y)^n$  :

$$(x + y)^n = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \dots + \binom{n}{n-1} x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 y^n \quad (1)$$

Como a soma se trata de termos alternantes, ou seja,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} + (-1)^n \binom{n}{n},$$

Podemos colocar  $x = 1$  e  $y = -1$  na Equação (1) para obter a soma acima, chegando assim a:

$$\begin{aligned} (1 + (-1))^n &= \binom{n}{0} 1^n (-1)^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} (-1)^1 + \dots + \binom{n}{n-1} 1^1 (-1)^{n-1} + \binom{n}{n} 1^0 (-1)^n \\ 0^n &= \binom{n}{0} (-1)^0 + \binom{n}{1} (-1)^1 + \dots + \binom{n}{n-1} (-1)^{n-1} + \binom{n}{n} (-1)^n \\ 0 &= \binom{n}{0} (-1) - \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} (-1)^{n-1} + \binom{n}{n} (-1)^n \\ 0 &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \end{aligned}$$

(b) Como nos coeficientes binomiais temos a presença do termo  $2n$ , vamos analisar o comportamento de

$$(x + 1)^{2n} = (x + 1)^n (1 + x)^n.$$

Desenvolvendo cada binômio separadamente, temos:

$$\begin{aligned} (1 + x)^{2n} &= \binom{2n}{0} x^{2n} + \binom{2n}{1} x^{2n-1} + \dots + \binom{2n}{n} x^n + \dots + \binom{2n}{2n-1} x^1 + \binom{2n}{2n} x^0 \\ (x + 1)^n &= \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1} x^1 + \binom{n}{n} x^0 \\ (1 + x)^n &= \binom{n}{0} x^0 + \binom{n}{1} x^1 + \dots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} + \binom{n}{n} x^n \end{aligned}$$

Ao multiplicarmos os dois últimos, obtemos um polinômio equivalente ao primeiro, ou seja:

$$\begin{aligned} \binom{2n}{0} x^{2n} + \binom{2n}{1} x^{2n-1} + \dots + \binom{2n}{n} x^n + \dots + \binom{2n}{2n-1} x^1 + \binom{2n}{2n} x^0 &= \\ \left[ \binom{n}{n} \cdot \binom{n}{0} \right] x^0 + \dots + \left[ \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 \right] x^n + \dots + \left[ \binom{n}{0} \cdot \binom{n}{n} \right] x^{2n} & \end{aligned}$$



Note que o coeficiente de  $x^n$  nos dois polinômios devem ser iguais. Assim:

$$\left[ \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 \right] = \binom{2n}{n} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

(13) Prove por indução finita para todo  $n > 1$  que

(a)  $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$ ;

(b)  $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$ ;

(c)  $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$ ,

(d)  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$ .

### Solução

(a) **Caso :**  $n = 2$ . Para  $n = 2$ , temos que

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{14}{24} > \frac{13}{24}$$

*Hipótese:* **Hipótese:** Suponha que, para  $n = k > 2$ ,

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}$$

*Passo Indutivo:* Para  $n = k + 1$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k+1)+1} + \cdots + \frac{1}{2(k+1)} &= \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} \\ &= \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} \\ &> \frac{13}{24} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{13}{24} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \\ &> \frac{13}{24} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{2k+2} = \frac{13}{24}. \end{aligned}$$

**(b) Caso base:** O caso base é  $n = 2$ . Temos

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2 \cdot 2}$$

*Hipótese:* Suponha que, para  $n = k > 2$ ,

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{k+1}{2k}$$

*Passo Indutivo:* Provemos que a afirmação é válida para  $n = k + 1$  :

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) &= \frac{k+1}{2k} \cdot \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \\ &= \frac{k+1}{2k} \cdot \left(\frac{(k+1)^2 - 1}{(k+1)^2}\right) \\ &= \frac{k+1}{2k} \cdot \left(\frac{k^2 + 2k}{(k+1)^2}\right) \\ &= \frac{(k+2)}{2(k+1)} \\ &= \frac{(k+1) + 1}{2(k+1)}. \end{aligned}$$

**(c) Caso base:**  $n = 1$

$$1 \cdot 1! = 1 \quad \text{e} \quad (1+1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1$$

*Hipótese:* Suponha a afirmação válida para  $n = k > 1$ , ou seja,

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + k \cdot k! = (k+1)! - 1$$

*Passo:* Vejamos que a afirmação é válida para  $n = k + 1$  :

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + k \cdot k! + (k+1)(k+1)! &= (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! \\ &= (k+1)!(1 + (k+1)) - 1 \\ &= (k+2)(k+1)! - 1 = (k+2)! - 1. \end{aligned}$$

(d) *Caso Base:* Para  $n = 1$ , temos

$$\frac{1}{1 \cdot (1+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$$

*Hipótese:* Suponha a validade para  $n = k > 1$ :

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

*Passo Indutivo:* Provemos que a afirmação é válida para  $n = k + 1$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k(k+2) + 1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{(k^2 + 2k + 1)}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}. \end{aligned}$$

(14)

(a) Considere a sequência de números inteiros  $(a_n)_{n \geq 0}$  dada por

$$a_n = \begin{cases} 2, & \text{se } n = 0; \\ 3, & \text{se } n = 1; \\ 3a_{n-1} - 2a_{n-2}, & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Mostre que

$$a_n = 2^n + 1, \quad \forall n \geq 0.$$

(b) Considere a sequência de números inteiros  $(b_n)_{n \geq 0}$  dada por

$$b_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0; \\ 1, & \text{se } n = 1; \\ 3b_{n-1} - 2b_{n-2}, & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Mostre que

$$b_n = 2^n - 1, \quad \forall n \geq 0.$$

(c) Considere a *Sequência de Fibonacci*  $(F_n)_{n \geq 0}$  dada por

$$F_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0; \\ 1, & \text{se } n = 1; \\ F_{n-1} + F_{n-2}, & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Mostre que

(i)  $F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n+1}$ ;

(ii)  $F_{n+1}F_{n+2} - F_nF_{n+3} = (-1)^n$ .

### Solução

Vamos utilizar a segunda forma do Princípio da Indução Finita:

(a) **Caso Base:** Vejamos que a afirmação é válida para  $n = 0$  e  $n = 1$  :

$n = 0$ :

$$2^0 + 1 = 2 = a_0$$

$n = 1$ :

$$2^1 + 1 = 3 = a_1$$

**Hipótese:** Suponha que a afirmação é válida **para todo**  $n \geq k \geq 1$ , ou seja, para  $k$  entre 1 e  $n$ , inclusive, temos

$$a_k = 2^k + 1$$

**Passo Indutivo:** Provemos que a afirmação é válida para  $n = k + 1$  :

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 3a_k - 2a_{k-1} = 3(2^k + 1) - 2(2^{k-1} + 1) \\ &= 3 \cdot 2^k + 3 - 2^k - 2 \\ &= 2 \cdot 2^k + 1 \\ &= 2^{k+1} + 1. \end{aligned}$$

(b) **Caso Base:** Vejamos que a afirmação é válida para  $n = 0$  e  $n = 1$  :

$n = 0$ :

$$2^0 - 1 = 0 = b_0$$

$n = 1$ :

$$2^1 - 1 = 1 = b_1$$

**Hipótese:** Suponha que a afirmação é válida **para todo**  $n \geq k \geq 1$ , ou seja, para  $k$  entre 1 e  $n$ ,

$$b_k = 2^k - 1$$

**Passo Indutivo:** Provemos que a afirmação é válida para  $n = k + 1$  :

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= 3b_k - 2b_{k-1} = 3(2^k - 1) - 2(2^{k-1} - 1) \\ &= 3 \cdot 2^k - 3 - 2^k + 2 \\ &= 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1. \end{aligned}$$

(c) Observe que

$$F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$$

$$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$$

$$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$$

$$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$$

Vamos provar ambos os itens por indução:

(i) **Caso base:** Para  $n = 2$ , temos

$$F_2^2 - F_3F_1 = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1 = (-1)^{2+1}$$

**Hipótese:** Suponha que a afirmação é válida **para todo**  $n \geq k \geq 1$ , ou seja, para  $k$  entre 1 e  $n$ ,

$$F_k^2 - F_{k+1}F_{k-1} = (-1)^{k+1}$$

**Passo indutivo:** Para  $n = k + 1$ ,

$$\begin{aligned} F_{k+1}^2 - F_{k+2}F_k &= F_{k+1}^2 - (F_{k+1} + F_k)F_k \\ &= F_{k+1}^2 - F_k \cdot F_{k+1} - F_k^2 \\ &= F_{k+1}(F_{k+1} - F_k) - F_k^2 \\ &= F_{k+1}F_{k-1} - F_k^2 \\ &= -(F_k^2 - F_{k+1}F_{k-1}) \\ &= -(-1)^{k+1} = (-1)^{k+2}. \end{aligned}$$

(ii) **Caso base:** Para  $n = 2$ , temos

$$F_2^2 - F_3F_1 = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1 = (-1)^{2+1}$$

**Hipótese:** Suponha que a afirmação é válida **para todo**  $n \geq k \geq 1$ , ou seja, para  $k$  entre 1 e  $n$ ,

$$F_3F_4 - F_2F_5 = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = 1 = (-1)^2$$

**Passo indutivo:** Para  $n = k + 1$ ,

$$\begin{aligned} F_{k+2}F_{k+3} - F_{k+1}F_{k+4} &= (F_k + F_{k+1})F_{k+3} - F_{k+1}(F_{k+2} + F_{k+3}) \\ &= F_kF_{k+3} + \cancel{F_{k+1}F_{k+3}} - F_{k+1}F_{k+2} - \cancel{F_{k+1}F_{k+3}} \\ &= F_kF_{k+3} - F_{k+1}F_{k+2} \\ &= -(F_{k+1}F_{k+2} - F_kF_{k+3}) \\ &= -(-1)^k = (-1)^{k+1}. \end{aligned}$$

**(15)** Prove que, se  $n$  é um múltiplo de 8, então  $F_n$  é múltiplo de 7.

[Dica:] Prove que  $F_{n+8} = 7F_{n+4} - F_n$ .

**Solução**

Vamos provar inicialmente que  $F_{n+8} = 7F_{n+4} - F_n$ .

Faremos a demonstração por indução:

**Caso Base:** Para  $n = 0$ , temos

$$F_{0+8} = F_8 = 21 = 7 \cdot 3 - 0 = 7F_{0+4} - F_0$$

Para  $n = 1$ , temos

$$F_{1+8} = F_9 = 34 = 7 \cdot 5 - 1 = 7F_{1+4} - F_1$$

**Hipótese:** Suponha que a afirmação é válida para todo  $n$  com  $0 \leq n \leq k$ , ou seja,  $F_{k+8} = 7F_{k+4} - F_k$ .

**Passo indutivo:** Vamos provar que o resultado é válido para  $n = k + 1$  :

$$\begin{aligned} F_{(k+1)+8} &= F_{k+9} \\ &= F_{k+8} + F_{k+7} \\ &= 7F_{k+4} - F_k + 7F_{k+3} - F_{k-1} \\ &= 7(F_{k+4} + F_{k+3} - (F_k + F_{k-1})) \\ &= 7F_{k+5} - F_{k+1} \end{aligned}$$

Vejam agora que  $F_n$  é múltiplo de 7, se  $n$  é múltiplo de 8. Sendo  $n$  múltiplo de 8, podemos escrevê-lo na forma  $n = 8t$ , onde  $t \in \mathbb{N}$ . Vamos mostrar esse resultado por indução em  $t$ .

**Caso Base:** Para  $t = 0$ , temos

$$F_{8 \cdot 0} = F_0 = 0 = 0 \cdot 7.$$

**Hipótese:** Suponha que, para  $t = k$ , é válido que

$$F_{8k} = 7q, \quad q \in \mathbb{N}.$$

**Passo Indutivo:** Vamos verificar que, para  $t = k + 1$ ,  $F_{8(k+1)}$  é múltiplo de 7. Com auxílio do fato demonstrado acima, temos

$$\begin{aligned} F_{8(k+1)} &= F_{8k+8} \\ &= 7F_{8k+4} - F_{8k} \\ &= 7F_{8k+4} - 7q \\ &= 7(F_{8k+4} - q) \\ &= 7r, r \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

**(16)** \* Prove que todo número natural pode ser representado como uma soma de diversos números de Fibonacci distintos.

### Solução

Provaremos o resultado por indução em  $n$ , pela segunda forma. Começemos com o **caso base**. Se  $n = 0, n = 1$  ou  $n = 2$ , então a existência da representação desejada é trivial.

Agora vamos supor por **hipótese** que todo número natural menor que  $n$  pode ser representado como uma soma de diversos números de Fibonacci distintos. Agora, vamos encontrar o maior número de Fibonacci menor ou igual a  $n$ . Suponha que é  $F_m$ ; ou seja,  $F_m \leq n < F_{m+1}$ . A diferença  $d = n - F_m$  é menor do que  $n$  e também menor do que  $F_m$ , já que  $F_{m+1} = F_m + F_{m-1}$ . Pela hipótese de indução,  $d$  pode ser representado como uma soma de diversos números de Fibonacci distintos e é claro que  $F_m$  é grande demais para ser incluído. Logo, somando  $F_m$ , obtemos a expressão desejada para  $n$ , já que  $d$  pode ser escrito como soma de números de Fibonacci distintos, e

$$n = d + F_m.$$

(17) O que há de errado com a seguinte demonstração por indução de que para todo inteiro positivo  $n$  nós temos  $a^{n-1} = 1$ ?

Demonstração: Para  $n = 1, a^{1-1} = a^0 = 1$ , correto. Assumindo o teorema válido para  $k \leq n$ , temos para  $n + 1$  :

$$a^{(n+1)-1} = a^n = \frac{a^{n-1} \cdot a^{n-1}}{a^{n-2}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1,$$

como desejávamos.

### Solução

Vamos observar como o passo indutivo foi desenvolvido.

$$a^{(n+1)-1} = a^n = \frac{a^{n-1} \cdot a^{n-1}}{a^{n-2}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1,$$

Atente para o fato de que, na expressão em **vermelho**, o autor da demonstração utilizou que  $a^{n-1} = 1$  e  $a^{n-2} = 1$ , o que não foi provada, já que em seu caso base, apenas mostrou-se a validade da expressão para  $n = 1$ , e não para  $n = 2$ , o qual claramente a afirmação está equivocada, visto que  $a^{2-1} = a^1 = a \neq 0$ . Assim, houve uma confusão entre o uso da primeira e da segunda forma do Princípio da Indução Finita, advindo daí o erro da demonstração em questão.

(18) \* É dado um conjunto de  $n$  pontos em um círculo e cada par de pontos está ligado por um segmento. Acontece que três desses segmentos nunca se encontram no mesmo ponto. Em quantas partes eles dividem o interior do círculo?

### Solução

Vamos primeiramente iniciar uma busca para a fórmula que registre o número  $\mathcal{P}(n)$  de partes nas quais o círculo é dividido. Para  $n = 1, 2$ , é óbvio que  $\mathcal{P}(1) = 1, \mathcal{P}(2) = 2$ .

Fazendo os desenhos para  $n = 3, 4$  e  $5$ , obtemos que  $\mathcal{P}(3) = 4, \mathcal{P}(4) = 8$  e  $\mathcal{P}(5) = 16$ , como mostrado na figura abaixo:

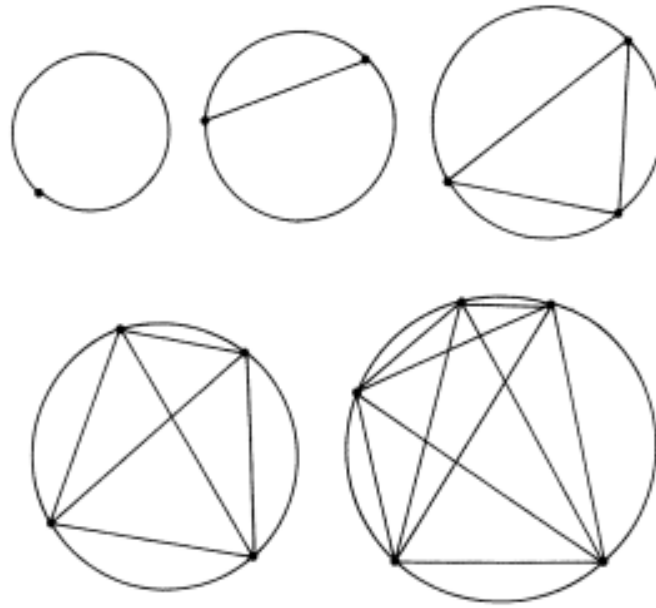


Figura 2: Desenhos para  $\mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2), \mathcal{P}(3), \mathcal{P}(4)$  e  $\mathcal{P}(5)$ .

Poderíamos baseado nessas observações conjecturar que  $\mathcal{P}(n) = 2^{n-1}$ , mas veremos que isso não ocorre.

Se o círculo possui  $n$  pontos, então existem  $\binom{n}{4}$  intersecções de cordas dentro do círculo, pois cada conjunto de quatro pontos fornece apenas uma dessas intersecções. Assim, o número de vértices na figura deve ser  $V = n + \binom{n}{4}$ . Para encontrar o número de arestas, contemos suas extremidades. Existem  $n + 1$  delas em cada um dos  $n$  pontos e quatro em cada uma das  $\binom{n}{4}$  intersecções, ou seja,

$$2A = n(n + 1) + 4 \binom{n}{4}.$$

Pela Fórmula de Euler  $V - A + F = 1$ , o número de regiões dentro do círculo deve ser

$$\begin{aligned} F &= 1 + A - V = 1 + \frac{n(n+1)}{2} + 2 \binom{n}{4} - \left( n + \binom{n}{4} \right) \\ &= \binom{n}{4} + \frac{n(n+1) - 2n}{2} + 1 \\ &= \binom{n}{4} + \frac{n(n-1)}{2} + 1 \\ &= \binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 1 \end{aligned}$$

Vamos provar então que

$$\mathcal{P}(n) = \binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 1.$$

Para o nosso **caso base**, vamos considerar.

Para o **passo indutivo**, suponha que para algum  $n = k$ , temos que

$$\mathcal{P}(k) = \binom{k}{4} + \binom{k}{2} + 1.$$



Vamos mostrar que a fórmula é válida para  $\mathcal{P}(k+1)$ .

Para isso, observe que, partindo do círculo com as  $\mathcal{P}(k)$  marcadas, ao adicionar um novo ponto, ligando aos demais  $k$  pontos, teremos a formação de  $k$  novas regiões. Além disso, como três segmentos não podem se encontrar no mesmo ponto, teremos outras  $\binom{k}{3}$  regiões formadas. Assim:

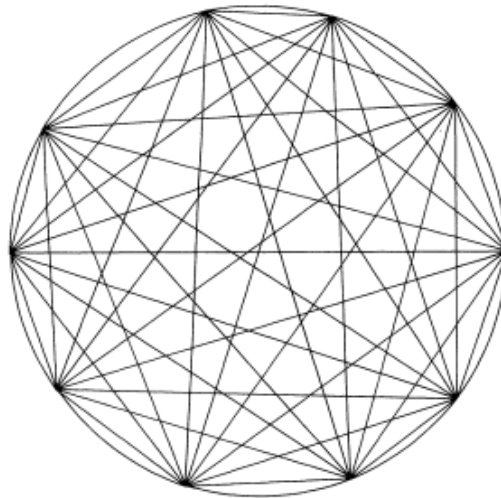
$$\begin{aligned}\mathcal{P}(k+1) &= \mathcal{P}(k) + \binom{k}{3} + k \\ &= \binom{k}{4} + \binom{k}{2} + 1 + \binom{k}{3} + \binom{k}{1} \\ &= \binom{k}{4} + \binom{k}{3} + \binom{k}{2} + \binom{k}{1} + 1 \\ &= \binom{k+1}{4} + \binom{k+1}{2} + 1,\end{aligned}$$

onde no último passo utilizamos a Relação de Stifel:

$$\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$$

Assim, mostramos que  $\mathcal{P}(k+1) = \binom{k+1}{4} + \binom{k+1}{2} + 1$ .

Uma curiosidade é que,  $\mathcal{P}(10) = 256$ , como mostrado na figura abaixo:



**(19)** \* [Pizza de Steiner] Qual é o maior número de partes em que se pode dividir o plano com  $n$  cortes retos?

### Solução

Denotando o número máximo de pedaços com  $n$  cortes por  $p_n$ , vamos provar por indução a fórmula:

$$p_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

No **caso base**, para  $n = 1$ , ou seja, com apenas um corte, é claro que só podemos obter dois pedaços. Portanto, a fórmula está correta, pois

$$p_1 = \frac{1(1+1)}{2} + 1 = 2.$$

Admitamos agora como **hipótese** que, para algum  $n = k$ , a fórmula para  $p_k$  esteja correta. Vamos mostrar que a fórmula para  $p_{k+1}$  também está correta.

Suponhamos que, com  $k$  cortes, obtivemos o número máximo  $\frac{k(k+1)}{2} + 1$  de pedaços e queremos fazer mais um corte, de modo a obter o maior número possível de pedaços. Vamos conseguir isso se o  $(k + 1)$ -ésimo corte encontrar cada um dos  $k$  cortes anteriores em pontos que não são de interseção de dois cortes.

Por outro lado, se o  $(k + 1)$ -ésimo corte encontra todos os  $k$  cortes anteriores, ele produz  $k + 1$  novos pedaços: o corte começa em um determinado pedaço e, ao encontrar o primeiro corte, ele separa em dois o pedaço em que está, entrando em outro pedaço. Ao encontrar o segundo corte, ele separa em dois o pedaço em que está, entrando em outro pedaço, e assim sucessivamente, até encontrar o  $k$ -ésimo corte separando o último pedaço em que entrar em dois. Assim, são obtidos  $k + 1$  pedaços a mais dos que já existiam; logo,

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= p_k + k + 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + 1 + n + 1 \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1, \end{aligned}$$

o que mostra que a fórmula está correta para  $n + 1$  cortes.

**(20)** Suponha um campeonato de futebol com  $n$  times onde todos jogam contra todos uma única vez. Prove por indução que o número total de jogos é  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

### Solução

Seja  $\mathcal{J}(n)$  o total de jogos do campeonato de futebol com  $n$  times onde todos jogam contra todos uma única vez. Vamos provar o resultado por indução em  $n$  :

**Caso base:** Para  $n = 2$ , suponha que as equipes que disputem o torneio sejam A e B. Só haverá então 1 jogo, justamente o confronto A x B, e portanto

$$\mathcal{J}(2) = 1 = \frac{2(2-1)}{2}$$

**Hipótese:** Suponha que para  $n = k$ , o total de jogos de futebol do campeonato seja

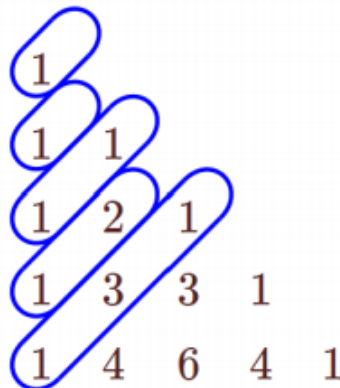
$$\mathcal{J}(k) = \frac{k(k-1)}{2}.$$

**Passo indutivo:** Provemos que  $\mathcal{J}(k+1) = \frac{(k+1)k}{2}$ . Para isso, considere que as equipes  $A_1, A_2, \dots, A_k$  e  $A_{k+1}$  disputaram o torneio. Pela hipótese de indução, um torneio com as  $k$  equipes  $A_1, A_2, \dots, A_k$  terá exatamente  $\mathcal{J}(k) = \frac{k(k-1)}{2}$  partidas disputadas. Para um torneio com a adição de  $A_{k+1}$ , este deverá disputar todos os confrontos  $A_{k+1} \times A_1, A_{k+1} \times A_2, \dots, A_{k+1} \times A_{k-1}$  e  $A_{k+1} \times A_k$ , fazendo

um total de  $k$  jogos. Logo, o total de partidas disputadas será

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}(k+1) &= \mathcal{J}(k) + k \\
 &= \frac{k(k-1)}{2} + k \\
 &= \frac{k(k-1)}{2} + \frac{2k}{2} \\
 &= \frac{k(k-1) + 2k}{2} \\
 &= \frac{k^2 - k + 2k}{2} \\
 &= \frac{k^2 + k}{2} \\
 &= \frac{k(k+1)}{2}.
 \end{aligned}$$

**(21)** \* Faça uma conjectura sobre as somas das diagonais ascendentes no Triângulo de Pascal conforme indicado. Prove que sua conjectura é verdadeira.



### Solução

Temos então que provar que

$$\sum_{p=0}^n \binom{n-p}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots + \binom{0}{n} = F_{n+1}$$

**Caso base:** Para  $n = 0$ , temos

$$\binom{0}{0} = 1 = F_{0+1}$$

**Hipótese:** Suponha que o resultado é válido para  $n = k$ , ou seja,

$$\sum_{p=0}^k \binom{k-p}{p} = F_{k+1}$$

**Passo indutivo:** Vejamos a validade da identidade para  $n = k + 1$ . Para isso, vamos utilizar a relação de Stifel:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Agora, temos que

$$\begin{aligned}
 \sum_{p=0}^{k+1} \binom{(k+1)-p}{p} &= \binom{k+1}{0} + \sum_{p=1}^k \binom{(k+1)-p}{p} \\
 &= \binom{k}{0} + \sum_{p=1}^k \left[ \binom{k-p}{p} + \binom{k-p}{p-1} \right] \\
 &= \binom{k}{0} + \sum_{p=1}^k \binom{k-p}{p} + \sum_{p=1}^k \binom{k-p}{p-1} \\
 &= \sum_{p=0}^k \binom{k-p}{p} + \sum_{p=1}^k \binom{k-p}{p-1} \\
 &= \sum_{p=0}^k \binom{k-p}{p} + \sum_{p=0}^{k-1} \binom{(k-1)-p}{p} \\
 &= F_{k+1} + F_k \\
 &= F_{k+2}
 \end{aligned}$$

(22) Sabe-se que  $x + \frac{1}{x} = d$  é um inteiro.

(a) Prove que  $x^n + \frac{1}{x^n}$  também é um inteiro, qualquer que seja o número natural  $n$ .

(b) \* Encontre todos os valores de  $d \geq 2$  tais que 194 é um termo da sequência

$$\left\{ x + \frac{1}{x}, x^2 + \frac{1}{x^2}, x^3 + \frac{1}{x^3}, \dots \right\}.$$

### Solução

(a) Vamos provar por indução em  $n$ . Para o **caso base**, temos:

$n = 1$  :

$$x - \frac{1}{x} = d \in \mathbb{Z}$$

$n = 2$  :

$$\left( x + \frac{1}{x} \right)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = d^2 - 2 \in \mathbb{Z}$$

Suponha por **hipótese** que, para todo  $n$  entre 1 e  $k$ ,  $x^k + \frac{1}{x^k}$  é inteiro. Vamos provar que  $x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}$  é inteiro para o **passo indutivo**.

Observe que

$$\left( x^k + \frac{1}{x^k} \right) \left( x + \frac{1}{x} \right) = x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}} + x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}$$

e portanto

$$x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right). \quad (2)$$

Por hipótese  $x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}} \in \mathbb{Z}$ , bem como  $x^k + \frac{1}{x^k} \in \mathbb{Z}$ . Assim, concluímos que  $x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} \in \mathbb{Z}$ , e a indução está completa.

(b) Vamos nos aproveitar do raciocínio empregado no item (a). Seja  $a_n = x_n + \frac{1}{x^n}$ . Observe que  $a_1 = d$ , e podemos também obter  $a_0 = 2$ . Pela Equação 2, temos que

$$a_{k+1} = a_k d - a_{k-1}$$

Logo, a sequência  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uma relação de recorrência linear de segunda ordem. Calculemos alguns de seus termos:

$$a_0 = 2$$

$$a_1 = d$$

$$a_2 = a_1 d - a_0 = d \cdot d - 2 = d^2 - 2$$

$$a_3 = a_2 d - a_1 = (d^2 - 2)d - d = d^3 - 3d$$

$$a_4 = a_3 d - a_2 = (d^3 - 3d)d - (d^2 - 2) = d^4 - 4d^2 + 2$$

$$a_5 = a_4 d - a_3 = (d^4 - 4d^2 + 2)d - (d^3 - 3d) = d^5 - 5d^3 + 5d$$

$$a_6 = a_5 d - a_4 = (d^5 - 5d^3 + 5d)d - (d^4 - 4d^2 + 2) = d^6 - 6d^4 + 9d^2 - 2$$

Observe que, se  $d = 2$ , então  $a_n = 2$  para todo  $n$ . Assim, procuramos por  $d \geq 3$ . Veja agora que, se  $d = 3$ , então

$$a_6 = d^6 - 6d^4 + 9d^2 - 2 = 3^6 - 6 \cdot 3^4 + 9 \cdot 3^2 - 2 = 729 - 6 \cdot 81 + 9 \cdot 9 - 2 = 322 > 194.$$

Assim, concluímos que se  $k \geq 6$ , então  $a_k > 194$ . Logo, basta nos atermos aos primeiros 5 termos da sequência.

Vamos analisar o que acontece em cada situação:

- Se  $a_1 = 194$ , isso significa que  $d = 194$ .

- Se  $a_2 = 194$ , então

$$a_2 = d^2 - 2 = 194 \Rightarrow d^2 = 196 \Rightarrow d = 14.$$

- Se  $a_3 = 194$ , então

$$a_3 = d^3 - 3d = 194 \Rightarrow d(d^2 - 3) = 194$$

Como procuramos por  $d \geq 3$  inteiro positivo e  $194 = 2 \cdot 97$ , a única opção é  $d = 97$ , mas nesse caso  $97(97^2 - 3) > 97 \cdot 2 = 194$ . Logo, não temos solução nesse caso;

- Se  $a_4 = 194$ , então

$$a_4 = d^4 - 4d^2 + 2 = 194 \Rightarrow d^4 - 4d^2 = 192 \Rightarrow d^2(d^2 - 4) = 192.$$

Como  $192 = 2^6 \cdot 3$ , e  $d \geq 3$ ,  $d^2$  pode ser  $(2^2)^2 = 2^4 = 16$  ou  $(2^3)^2 = 64$ . Analisemos cada situação:

☹ Se  $d = 4$ , então  $4^2(4^2 - 4) = 192$ .

☺ Se  $d = 8$ , então  $8^2(8^2 - 4) = 3840 \neq 192$ .

Logo, concluímos que  $d = 4$  é uma solução.

- Se  $a_5 = 194$ , então

$$a_5 = d^5 - 5d^3 + 5d = 194 \Rightarrow d^5 - 5d^3 + 5d = 194 \Rightarrow d(d^4 - 5d^2 + 5) = 194.$$

Novamente, como  $194 = 2 \cdot 97$  e  $d \geq 3$ , se  $d = 97$ ,  $d^4 - 5d^2 + 5 > 194$ , e portanto não temos soluções nesse caso.

Concluímos que os possíveis valores de  $d$  que fazem com que a sequência  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  contenha 194 são 4, 14 e 194.

Observação: Exercícios marcados com \* são extras.