Aula 8. Equações Diofantinas

8.1 Definição

Definição

Equação Diofântina é qualquer equação com 1 on mais incógnitas que assumirem apenas valores inteiros.

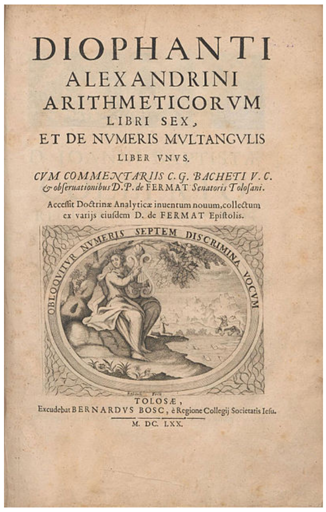
A palavra Diofantina se refere ao matemático helenístico do século III, Diofanto de Alexandria, o qual estudou tais equações e foi um dos primeiros matemáticos a introduzir o uso de símbolos na álgebra. O estudo matemático de problemas Diofantinos propostos por Diofanto agora é chamado de análise Diofantina.

"Aqui jaz Diofanto. Maravilhosa habilidade. Pela arte da álgebra a lápide nos diz sua idade: Deus deu um sexto da vida como infante, um duodécimo mais como jovem, de barba abundante; e ainda uma sétima parte antes do casamento; em cinco anos nasce-lhe o rebento. Lastima! O filho do mestre e sábio do mundo se vai. Morreu quando atingiu metade da idade final do pai. Quatro anos a mais de estudos consolam-no do pesar; Para então, deixando a terra, também ele alívio encontrar."

Daí podemos representar como uma equação algébrica e descobrirmos sua idade:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$$

Como x representa sua idade, resolvendo a equação temos 84 anos.



Traduçao latina (1670) de uma obra de Diofanto

8.2 Alguns equações notáveis

a) Considere equação
$$ax + by = 1,$$
onde a, b são inteiros dados e x, y inteiros incógnitas. Tal equação chama-se *equação diofantina linear*.

b) Considere a equação diofantina da forma
$$x^n + y^n = z^n$$
onde x, y e z são inteiros incógnitas e n é inteiro positivo dado. A estrutura das soluções de tal equação depende muito do n.

Por exemplo, se $n = 2$, assim as soluções são chamadas **terno pitagórico** e formado por três números naturais a, b e c tais que $a^2 + b^2 = c^2$. O nome vem do teorema de Pitágoras que afirma que se as medidas dos lados de um triângulo retângulo são números inteiros, então são um terno pitagórico. Neste caso tem numero infinito das soluções, por exemplo

$$(3, 4, 5), (6, 8, 10), (5, 12, 13), \ldots$$

L. Euler provou o seguinte lema

Lemma 8.1

Para todos inteiros n, m

$$x = m^2 - n^2, y = 2mn, z = m^2 + n^2$$

satisfazem equação

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Prova

Temos

$$\begin{aligned} x^2 &= \left(m^2 - n^2\right)^2 = m^4 - 2m^2u^2 + n^4 \\ y^2 &= 4m^2n^2 \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 \\ &= n^4 + 2n^2m^2 + m^4 \\ &= \left(n^2 + m^2\right)^2 = z^2. \end{aligned}$$

Por outro lado se $n > 3$ e a gente encontra-se apenas soluções positivas da equação

$$x^n + y^n = z^n,$$

assim ultima Teorema de Fermat affirma que não há soluções. O Teorema foi anunciada pelo matemático francês Pierre de Fermat em 1637. O Fermat relatou ter desenvolvido a prova do teorema mas nunca o publicou. Assim, esta conjectura ficou por demonstrar e constituiu um verdadeiro desafio para os matemáticos ao longo dos tempos, apesar de parecer simples e o enunciado ser fácil de entender. Desta forma, ele passou a ser conhecido como o mais famoso e duradouro teorema matemático de seu tempo, sendo solucionado apenas em 1995 (pelo britânico Andrew Wiles), após 358 anos de sua formulação!

Pierre de Fermat (1601–1661)

8.3 *Equações diofantinas lineares*

Nessa aula a gente vai considerar apenas equações diofantinas da forma

$$ax + by = c,$$

onde a, b, c – inteiros dados, x, y – inteiros incógnitas. Tais equações chamam-se *equações diofantinas lineares*.

Observem primeiramente que equação acima pode ter vários soluções, por exemplo se $a = 3, b = 6, c = 18$, assim

$$\begin{aligned} 3 \cdot 4 + 6 \cdot 1 &= 18, \\ 3 \cdot (-6) + 6 \cdot 6 &= 18, \\ 3 \cdot 10 + 6 \cdot (-2) &= 18. \end{aligned}$$

Por outro lado hão há soluções da equação

$$2 \cdot x + 10 \cdot y = 17$$

Pois $2 \cdot x + 10 \cdot y$ é sempre um numero par e 17 é impar.

Assim nosso primeiro questão é como decidir se ou não equação linear dada tem as soluções

Theorem 8.1: (Critério da existência das soluções)

Equação

$$a \cdot x + b \cdot y = c$$

tem solução se e somente se

$$\operatorname{mdc}(a, b) \mid c.$$

Prova

[⇒] Seja $a \cdot x + b \cdot y = c$ para algums $x, y \in \mathbb{Z}$ e seja $\operatorname{mdc}(a, b) = d$. Temos

$$d \mid a \qquad d \mid b$$

assim $d \mid a \cdot x + b \cdot y = c$ ou seja $d \mid c$.

[⇐] Seja $d = \operatorname{mdc}(a, b)$. Pelo Teorema de Bezout existem x_0, y_0 tais que:

$$a \cdot x_0 + b \cdot y_0 = d$$

Como $\operatorname{mdc}(a, b) \mid c$, assim $c = d \cdot q$ para algum inteiro q. Assim

$$c = d \cdot q = (a \cdot x_0 + b \cdot y_0)\, q = a \cdot (x_0 q) + b \cdot (y_0 q)$$

Logo $a \cdot x + b \cdot y = c$ tem solução $x = x_0 q, y = y_0 q$.

Exemplo 8.1

amos decidir se ou não as seguintes equações tem soluções

$$1)\ 2x + 14y = 17, \qquad 2)\ 37x + 23y = 101.$$

Temos que $\mathrm{mdc}(2, 14) = 2$ não divide 17, assim equação 1) não tem as soluções. Calculando $\mathrm{mdc}(37, 23)$ temos

$$\begin{aligned} 37 &= 1 \cdot 23 + 14, \\ 23 &= 1 \cdot 14 + 9, \\ 14 &= 1 \cdot 9 + 5, \\ 9 &= 1 \cdot 5 + 4, \\ 5 &= 1 \cdot 4 + 1, \\ 4 &= 4 \cdot 1 + 0. \end{aligned}$$

Assim $\mathrm{mdc}(37, 23) = 1$, logo 2) tem soluções.

8.4 *Como encontrar as soluções?*

Agora, quando a gente sabe o critério de existência das soluções, naturalmente podemos perguntar como encontrar as soluções (se existem)? A resposta é dada no seguinte Teorema

Teorema 8.2

Suponha que x_0, y_0 uma solução particular da equação diofantina

$$a \cdot x + b \cdot y = c.$$

Assim todos outros soluções tem a forma

$$\begin{aligned} x &= x_0 + (b/d) \cdot t \\ y &= y_0 - (a/d) \cdot t. \end{aligned}$$

onde t é inteiro e $d = \mathrm{mdc}(a, b)$.

Prova

Seja x_0, y_0 é qualquer solução particular da equação. Se x' e y' uma outra solução, assim

$$a \cdot x_0 + b \cdot y_0 = c = a \cdot x' + b \cdot y',$$

ou seja

$$a \cdot \left(x_0 - x'\right) = b \cdot \left(y' - y_0\right).$$

Como $d = \mathrm{mdc}(a, b)$ assim existem r, s tais que

$$a = rd, \quad b = sd$$

e $\mathrm{mdc}(r, s) = 1$. Portanto temos que

$$dr \cdot \left(x_0 - x'\right) = ds \cdot \left(y' - y_0\right).$$

Assim $r \mid s \cdot (y' - y_0)$, mas $\mathrm{mdc}(r, s) = 1$, assim de fato

$$r \mid \left(y' - y_0\right),$$

ou seja $y_0 - y' = r \cdot t$, para algum inteiro t. Substituindo, temos

$$r\left(x_0 - x'\right) = s\left(y' - y_0\right) = s \cdot (-r \cdot t),$$

assim $x' - x_0 = st$, e

$$\begin{aligned} x &= x_0 + (b/d) \cdot t \\ y &= y_0 - (a/d) \cdot t. \end{aligned}$$

Por outro lado, facil ver que se x', y' satisfazem equações acima, assim

$$\begin{aligned} a \cdot x' + b \cdot y' &= a \cdot \left[x_0 + \frac{b}{d} \cdot t\right] + b\left[y_0 - \frac{a}{d} \cdot t\right] = \\ &= a \cdot x_0 + \frac{a \cdot b}{d} \cdot t + b \cdot y_0 - \frac{ab}{d} \cdot t = c \end{aligned}$$

Ou seja x', y' é solução.

Exemplo 8.2

Considere equação

$$2x + 3y = 7.$$

Neste caso $a = 2$, $b = 3$ e $c = 7$. Assim $d = \mathrm{mdc}(2, 3) = 1 \mid 7$, ou seja tem soluções. È fácil encontrar uma solução particular, temos

$$2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7,$$

assim $x_0 = 2$, $y_0 = 1$ é solução. Agora usando os formulas do Teorema 8.2, temos que todas soluções tem forma

$$\begin{aligned} x &= x_0 + (b/d) \cdot t = 2 + 3t \\ y &= y_0 - (a/d) \cdot t = 1 - 2t, \end{aligned}$$

para algum inteiro t. Por exemplo se $t = 100$, assim

$$x = 2 + 3 \cdot 100 = 302, \quad y = 1 - 2 \cdot 100 = -199$$

é solução.

Exemplo 8.3

Considere equação

$$5x + 22y = 18.$$

Neste caso $a = 5$, $b = 22$ e $c = 18$. Assim $d = \mathrm{mdc}(5, 22) = 1 \mid 18$, ou seja tem soluções. È fácil encontrar uma solução particular, temos

$$5 \cdot 8 + 22 \cdot (-1) = 18,$$

assim $x_0 = 8$, $y_0 = -1$ é solução. Para encontrar a solução é possível também usar o algoritmo de Euclides junto com a Teorema de Bezout. Calculando $\mathrm{mdc}(5, 22)$ temos

$$\begin{aligned} 22 &= 4 \cdot 5 + 2, \\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1, \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0. \end{aligned}$$

Invertendo o algoritmo temos

$$1 = 5 \cdot 9 + 22 \cdot (-2)$$

Multiplicando por 18, temos $x_0 = 9 \cdot 18 = 162$ e $y_0 = -2 \cdot 18 = 36$ é solução particular. Agora usando os formulas do Teorema 8.2, temos que todas soluções tem forma

$$\begin{aligned} x &= x_0 + (b/d) \cdot t = 162 + 22t \\ y &= y_0 - (a/d) \cdot t = -36 - 5t, \end{aligned}$$

para algum inteiro t.

Exercício 8.1: (Trabalho p/ casa)

Encontre as soluções da equação

$$172x + 20y = 1000$$

Resposta: $x = 500 + 5t$, $y = -4250 - 43t$.

Exercício 8.2: (Trabalho p/ casa)

Um menino comprou 12 frutas (masas e laranjas). Suponha que uma masa custa 3R$ a mais do que uma laranja. Quantas masas e laranjas foram compradas se menino gastou 132R$ reais.

Resposta: 12 masas, ou
8 masas e 4 laranjas.