Aula 7. Mínimo múltiplo comum

7.1 Definições e caracterização

Nas aulas passadas a gente definiu e estudou o conceito de máximo divisor comum entre dois inteiros a e b.

Definição

Sejam a b dois inteiros nao-nulos. Um inteiro c é chamado *múltiplo comum* de a e b se:

$$a \mid c, \qquad b \mid c.$$

Dados a, b inteiros não-nulos, definamos o conjunto dos "múltiplos comuns positivos" de a e b como

$$M(a,b) = \{c \mid c > 0, \quad a \mid c, b \mid c\}.$$

Por exemplo, se $a = 4$ e $b = 6$, assim

$$M(4,6) = \{12, 24, 36, 48, \ldots\}.$$

Observem que o conjunto $M(a,b)$ não é vazio, por exemplo $|a| \cdot |b|$ está em $M(a,b)$ já que

$$a \text{ divide } |a| \cdot |b|, \qquad b \text{ divide } |a| \cdot |b|.$$

Assim, aplicando (PBO) (vejam Aula 1) existe elemento minimal em $M(a,b)$. Vamos chamas esse elemento mínimo múltiplo comum e denotar for $\operatorname{mmc}(a,b)$

$$\operatorname{mmc}(a,b) = \min M(a,b).$$

Exemplo 7.1

Sejam $a = -6, b = 15$, assim

$$M(-6,15) = \{30, 60, 90, 120, \ldots\}.$$

Logo $\operatorname{mmc}(-6,15) = \min M(-6,15) = 30.$

Observação 7.1

Claro que $\text{mmc}(a,b)$ existe para inteiros a, b não-nulos o que

$$\text{mmc}(a,b) \leq |a| \cdot |b|.$$

Teorema 7.1

Um inteiro m positivo é $\text{mmc}(a,b)$ se e somente se:

1) $a \mid m$ e $b \mid m$.

2) Se $a \mid m'$ e $b \mid m'$, assim $m \mid m'$.

Prova

[$\Rightarrow$]. Se $m = \text{mmc}(a,b)$ vamos provar que m cumpre as condições 1) e 2). Temos que

$$m = \text{mmc}(a,b) = \min M(a,b),$$

logo $m \in M(a,b)$, assim $a \mid m$ e $b \mid m$, logo 1) vale.
Seja m' tal que $a \mid m' \quad b \mid m'$, mostraremos que $m \mid m'$. Aplicando o algoritmo da divisão de m' por m temos

$$m' = m \cdot q + r, \text{ com } 0 \leq r < m$$

Suponha que $r > 0$, assim temos $r = m' - mq$. Agora

$$a \mid m, \; a \mid m' \quad \Rightarrow \quad a \mid m' - mq = r,$$

na mesma maneira

$$b \mid m, \; b \mid m' \quad \Rightarrow \quad b \mid m' - mq = r.$$

Ou seja, r é multiplo comum de a e b, por tanto $r \in M(a,b)$. Mas

$$r < m = \min M(a,b).$$

Contradição!! Assim $r = 0$, ou seja $m' = q \cdot m$, e m cumpre 2).
[$\Leftarrow$]. Seja $m \in \mathbb{Z}$ positivo que cumpre 1) e 2). Vamos mostrar que

$$m = \text{mmc}(a,b) = \min M(a,b).$$

Pelo 1), temos que $m \in M(a,b)$. Logo

$$m \geq \min M(a,b) = \text{mmc}(a,b).$$

Alem disso como $\left[\begin{array}{l} a \mid \text{mmc}(a,b) \\ b \mid \text{mmc}(a,b) \end{array} \right.$, assim aplicando 2) seque que $m \mid \text{mmc}(a,b)$, portanto $m \leq \text{mmc}(a,b)$. Resumindo

$$\text{mmc}(a,b) \leq m \leq \text{mmc}(a,b),$$

ou seja

$$m = \text{mmc}(a,b).$$

Observação 7.2

O Teorema acima characteriza mmc ha maneira “dual” da caracterização de mdc trocando a ordem nas divições.

Exercício 7.1

Mostre que
$$\mathrm{mdc}(a,b) \mid \mathrm{mmc}(a,b).$$

Solução 7.1

Temos que $\mathrm{mdc}(a,b) \mid a$ por outro lado $a \mid \mathrm{mmc}(a,b)$. Assim
$$\mathrm{mdc}(a,b) \mid \mathrm{mmc}(a,b).$$

7.2 *Como encontrar MMC?*

Na pratica para encontra o MMC ajuda o seguinte resultado que relaciona o MMC com MDC.

Teorema 7.2

Sejam a, b dois inteiros positivos. Assim
$$\mathrm{mdc}(a,b) \cdot \mathrm{mmc}(a,b) = a \cdot b.$$

Prova

Seja $d = \mathrm{mdc}(a, b)$, assim
$$a = d \cdot r, b = d \cdot s,$$
com r, s dois inteiros. Considere o numero
$$m = \frac{a \cdot b}{\mathrm{mdc}(a, b)} = \frac{a \cdot b}{d}.$$
A gente vai mostra que de fato $m = \mathrm{mmc}(a, b)$. Temos:
$$m = \frac{a \cdot b}{d} = \frac{d \cdot r \cdot b}{\alpha} = r \cdot b,$$
$$m = \frac{a \cdot b}{d} = \frac{a \cdot d \cdot s}{d} = a \cdot s$$
Ou seja $a \mid m$ e $b \mid m$, assim m cupre a condição 1) da Teorema 7.1. Por outro lado seja c um multiplo comum entre a e b, assim
$$a \cdot u = c = b \cdot v,$$
para algums inteiros u, v. Pelo Teorema de Bezout existem x, y tais que
$$a \cdot x + b \cdot y = d.$$
Agora
$$\frac{c}{m} = \frac{c \cdot d}{a \cdot b} = \frac{c \cdot (ax + by)}{ab} = \frac{cax}{ab} + \frac{cby}{ab} =$$
$$= \frac{cx}{b} + \frac{cy}{a} = v \cdot x + u \cdot y$$
Ou seja $\frac{c}{m}$ é um inteiro e assim m divide c. Portanto m cumpre condição 2) do Teorema 7.1 e
$$\mathrm{mmc}(a, b) = m = \frac{ab}{\mathrm{mdc}(a, b)}.$$
Resumindo
$$\mathrm{mdc}(a, b) \cdot \mathrm{mmc}(a, b) = a \cdot b.$$

Observação 7.3

O Teorema acima pode ser formulada para todos inteiros (incluindo negativos) como
$$\mathrm{mdc}(a, b) \cdot \mathrm{mmc}(a, b) = |a| \cdot |b|.$$

Observação 7.4

O teorema acima dá então um método de cálculo para o $\text{mmc}(a, b)$. Dados $a, b \in Z$, podemos calcular o $\text{mdc}(a, b)$ pelo Algoritmo de Euclides e depois obter

$$\text{mmc}(a, b) = \frac{|ab|}{\text{mdc}(a, b)}$$

Exemplo 7.2

Vamos encontre $\text{mmc}(30, 36)$. Pelo Algoritmo de Euclides temos que

$$\text{mdc}(30, 36) = 6.$$

Assim

$$\text{mmc}(30, 36) = \frac{30 \cdot 36}{\text{mdc}(30, 36)} = \frac{30 \cdot 36}{6} = 180.$$

Exercício 7.2

Sejam a, b dois inteiros positivos. Mostre que

$$\text{mdc}(a, b) = \text{mmc}(a, b)$$

se e somente se $a = b$

Solução 7.2

[$\Leftarrow$] Se $a = b$, assim

$$\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(a, a) = a.$$

Aplicando Teorema 7.2 temos

$$\text{mmc}(a, b) = \frac{a \cdot a}{\text{mdc}(a, b)} = a.$$

Logo $\text{mdc}(a, b) = \text{mmc}(a, b)$ neste caso.

[$\Rightarrow$] Temos que

$$\text{mdc}(a, b) \leq a \leq \text{mmc}(a, b),$$
$$\text{mdc}(a, b) \leq b \leq \text{mmc}(a, b).$$

Assim se $\text{mdc}(a, b) = \text{mmc}(a, b)$ temos que

$$a = b.$$

Exercício 7.3: (Trabalho p/ casa)

Calcule

$$\mathrm{mmc}(23, 18).$$

Resposta: 414

Exercício 7.4: (Trabalho p/ casa)

Calcule

$$\mathrm{mmc}(51, 68).$$

Resposta: 204

Exercício 7.5: (Trabalho p/ casa)

Calcule

$$\mathrm{mmc}(143, 227).$$

Resposta: 32461

Exercício 7.6: (Trabalho p/ casa)

Seja $n > 1$ um inteiro. Calcule

(i) $\mathrm{mmc}(n, n+1)$.

(ii) $\mathrm{mmc}(2n-1, 2n+1)$.

(iii) $\mathrm{mmc}(2n, 2n+2)$.

(iv) $\mathrm{mmc}(nc, (n+1)c)$ com c um inteiro não-nulo.