Aula 3. *Números binomiais e fatoriais*

O objetivo dessa aula é receber o formula binomial de Newton para desenvolver as expressões do tipo $(a+b)^n$. Os numero fatoriais e binomiais vão desenvolver o papel fundamental para esse teorema. Assim, vamos definir estes números provando as interpretações combinatorial deles.

3.1 *Fatorial e sua interpretação*

Definição

Seja $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$. Definamos

i) $0! = 1$

ii) $n! = n \cdot (n-1)!$, para $n \geq 1$.

Logo
$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$
Esse numero é chamado o *fatorial de* n.

Por exemplo,

$$\begin{aligned}
1! &= 1 \cdot 0! = 1,\\
2! &= 2 \cdot 1! = 2,\\
3! &= 3 \cdot 2! = 6,\\
4! &= 4 \cdot 3! = 24,\\
5! &= 5 \cdot 4! = 120,\\
6! &= 6 \cdot 5! = 720.
\end{aligned}$$

Proposição 3.1: (Interpretação combinatorial de $n!$)

Seja A um conjunto não-vazio com n elementos. Assim existem $n!$ maneiras de ordenar os elementos de A.

Prova

Usando Principio da Indução Finita, temos.
Base: $\boxed{n=1}$
Se o tamanho do conjunto A é um, ou seja A contem um único elemento, assim há apenas uma ordenação possível. Logo afirmação vale pois $1! = 1$.

Hipotese: $\boxed{n=k}$
Suponha que há $k!$ ordenações possíveis para todo conjunto A com k elementos.

Passo: $\boxed{n=k+1}$
Suponha que conjunto A tem $k+1$-elementos

$$A = \{\underbrace{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}}_{(k+1)\text{-elementos}}\}$$

Seja

$$\underbrace{\_\_ \quad \_\_ \quad \cdots \quad \_\_ \quad \_\_}_{(k+1)\text{-lugares}}$$

os lugares possíveis de colocar os elementos do conjunto A, Assim há $(k+1)$-lugares de colocar elemento a_1 nessa ordenação:

$$\begin{array}{ccccc}
\underline{a_1} & __ & \cdots & __ & ___ \\
__ & \underline{a_2} & \cdots & __ & ___ \\
 & & \ddots & & \\
__ & __ & \cdots & __ & \underline{a_{k+1}}
\end{array}$$

Alem disso ha $k!$ opções de ordenar o resto $\{a_2, a_3, \ldots, a_{k+1}\}$ (pelo hipotese). Portanto no total tem:

$$(k+1) \cdot k! = (k+1)!$$

ordenações. Logo pelo (PIF) atirmação segue.

3.2 *Números binomiais*

Introduziremos nessa seção os números binomiais, já que eles irão desempenhar um papel fundamental no Teorema do Binômio na proxima seção.

Definição

Seja A um conjunto com n elementos e seja k um inteiro tal que com $0 \leq k \leq n$. O numero dos subconjuntos de A com k-elementos será denotado por $\binom{n}{k}$.

Exemplo 3.1

Vamos considerar vários casos.
Seja $\boxed{\text{n=2}}$, ou seja $A = \{a_1, a_2\}$. Vamos listar os subconjuntos de tamanho k para todos $0 \leq k \leq 2$. Temos:

$$k = 0, \quad \text{tem apenas subconjunto vazio, assim:} \qquad \Rightarrow \binom{2}{0} = 1.$$

$$k = 1, \quad \text{tem 2 subconjuntos com 1 elemento} \quad \{a_1\}, \{a_2\} \qquad \Rightarrow \binom{2}{1} = 2.$$

$$k = 2, \quad \text{tem 1 subconjuntos com 2 elementos} \quad \{a_1, a_2\} \qquad \Rightarrow \binom{2}{2} = 1.$$

Agora se $\boxed{\text{n=3}}$, ou seja $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, temos:

$$k = 0, \quad \text{tem apenas subconjunto vazio, assim:} \qquad \Rightarrow \binom{3}{0} = 1.$$

$$k = 1, \quad \text{tem 3 subconjuntos com 1 elemento} \quad \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\} \qquad \Rightarrow \binom{3}{1} = 3.$$

$$k = 2, \quad \text{tem 3 subconjuntos com 2 elementos} \quad \{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}, \{a_1, a_3\} \qquad \Rightarrow \binom{3}{2} = 3.$$

$$k = 3, \quad \text{tem 1 subconjunto com 3 elementos} \quad \{a_1, a_2, a_3\} \qquad \Rightarrow \binom{3}{3} = 1.$$

Teorema 3.1

Vale o seguinte formula

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{3.1}$$

para todos $n \geq 0$ e $0 \leq k \leq n$.

Prova

Vamos prosseguir por indução.

Base: $\boxed{\text{n=0}}$ O conjunto vazio, tem um unico subconjunto (ele mesmo!), assim $\binom{0}{0} = 1$. Por outro lado

$$1 = \frac{0!}{0! \cdot 0!}$$

$\boxed{\text{n=1}}$. Se $k = 0$, assim $\binom{1}{0} = 1$, por outro lado

$$1 = \frac{1!}{0! \cdot 1!}.$$

Se $k = 1$, assim $\binom{1}{0} = 1$, e, de novo,

$$1 = \frac{1!}{1! \cdot 0!}.$$

Hipotese: Suponha que o formula vale para caso $\boxed{\text{n-1}}$ e para todos $0 \leq k \leq n-1$, ou seja

$$\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-1-k)!}, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Passo:
Se $k = n$, assim existe unico subconjunto com n elemento (proprio A!), ou seja $\binom{n}{n} = 1$. Por outro lado $1 = \frac{n!}{n!(n-n)!}$. Agora considere $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Seja $0 \leq k \leq n-1$, e considere

$$\begin{aligned} t &= \text{numero dos subconjuntos de } k\text{-elementos que contem } a_1, \\ s &= \text{numero dos subconjuntos de } k\text{-elementos que não contem } a_1. \end{aligned}$$

Assim $t = \binom{n-1}{k-1}$ e $s = \binom{n-1}{k}$, por outro lado

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = t + s = \text{numero de todos subconjuntos de } k\text{-elementos em } A = \binom{n}{k}.$$

Usando hipotese, temos

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\ &= \frac{(n-1)!k + (n-k)(n-1)!}{k(n-k)!} \\ &= \frac{(n-1)!(k+n-k)}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \end{aligned}$$

Assim usando o (PIF) podemos concluir que o formula vale para todos n e k.

Observação 3.1

Observem a seguinte importante relação

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.}$$

Exemplo 3.2

$$\binom{3}{1} = \frac{3!}{1! \cdot (3-1)!} = \frac{3!}{2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 3,$$
$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4! \cdot (7-4)!} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$$

Exercício 3.1

Um comitê de 3 pessoas deve ser formado a partir de 20 candidatos. Quantas comitês diferentes são possíveis?

Solução 3.1

Há

$$\binom{20}{3} = \frac{20!}{3!17!} \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140$$

comitês diferente.

3.3 *Formula de Newton*

Nesta seção utilizarmos o Princípio de Indução Completa para demonstrar a fórmula que dá a expressa de $(a+b)^n$, para qualquer inteiro positivo n. Esse teorema é frequentemente atribuído a Newton, mas era conhecido há muito tempo pela ciência Europeia c mesmo antes por autores orientais, ao menos de forma empírica. A razão pela qual se associa o nome Newton a esse resultado é que ele conseguiu estendê-lo para coeficientes fracionários.

Considere o seguinte triangulo infinito formado pelos números binomiais.

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$
$$\ldots \qquad\qquad \ldots$$

Aplicando o formula (3.1) (ou Observação 3.1) temos

$$1$$
$$1 \quad 1$$
$$1 \quad 2 \quad 1$$
$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$
$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$
$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$
$$\ldots \qquad\qquad \ldots$$

Blaise Pascal (1623–1662)

O triangulo acima chama-se *o triângulo de Pascal* (em nome de um matemático francês) mas os matemáticos da Índia, Pérsia, China e Itália conheciam este triângulo alguns séculos antes de Pascal.

Por outro lado, considere

$$
\begin{gathered}
(x+y)^0 = 1 \\
(x+y)^1 = x+y \\
(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \\
(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\
(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \\
(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 \\
\ldots
\end{gathered}
$$

Assim, temos certa evidencia que os coeficientes em decomposição $(x+y)^n$ são dados pelos números binomiais $\binom{n}{k}$.

Theorem 3.2: Formula Binomial de Newton

Sejam x, y dois números reais e n um inteiro não-negativo, assim

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i \cdot y^{n-i}$$

Prova

Base: $\boxed{\text{n=0}}$, neste caso

$$(x+y)^0 = \binom{0}{0} \cdot x^0 \cdot y^0 = 1$$

$\boxed{\text{n=1}}$, neste caso

$$(x+y)^1 = \binom{1}{0} \cdot x + \binom{1}{1} \cdot y = x + y$$

Hipotese: $\boxed{\text{n=k}}$. Suponha que

$$(x+y)^k = \sum \binom{k}{i} \cdot x^k \cdot y^{k-i}$$

Passo: Provaremos para $\boxed{\text{n=k+1}}$, ou seja provaremos que

$$(x+y)^{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \cdot x^i \cdot y^{k+1-i}.$$

Temos

$$\begin{aligned}
(x+y)^{k+1} &= (x+y)^k \cdot (x+y) = x(x+y)^k + y(x+y)^k \\
&\overset{\text{Hipotese}}{=\!=} \binom{k}{0} xy^k + \binom{k}{1} x^2 y^{k-1} + \cdots + \binom{k}{k-1} x^k y \\
&\quad + \binom{k}{k} y^{k+1} + \binom{k}{0} y^{k+1} + \binom{k}{1} xy^k + \binom{k}{2} x^2 y^{k-1} + \cdots + \binom{k}{k} x^k y \\
&= x^{k+1} + \left[\binom{k}{0} + \binom{k}{1}\right] xy^k + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{2}\right] x^2 y^{k-1} + \cdots + \left[\binom{k}{k-1} + \binom{k}{k}\right] x^k y + y^{k+1} \\
&\overset{Obs.3.1}{=\!=} \binom{k+1}{0} x^{k+1} + \binom{k+1}{1} xy^k + \binom{k+1}{2} x^2 y^{k-1} + \cdots + \binom{k+1}{k} x^k y + \binom{k+1}{k+1} y^{k+1} \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} x^i y^{k+1-i}.
\end{aligned}$$

Assim pelo (PIF) o formula vale para todos n.

Exercício 3.2

Mostrar que para todo $n \geq 0$ vale

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Solução 3.2

Sejam $x = 1$ e $y = 1$ na formula de Newton, assim

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

Exercício 3.3: (Trabalho p/ casa)

Mostrar que

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Exercício 3.4: (Trabalho p/ casa)

Mostrar que para todo $n \geq 0$ vale

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \ldots$$

Exercício 3.5: (Trabalho p/ casa)

Verifique que para todo n

$$\binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} = n^2$$

Exercício 3.6: (Trabalho p/ casa)

Faça uma conjectura sobre as somas das diagonais ascendentes no Triângulo de Pascal conforme indicado. Prove que sua conjectura é verdadeira.