Aula 21. *Construção dos números racionais a partir dos inteiros*

Nosso objetivo é construir os numeros racionais a partir dos numeros inteiros. Vamos fazer isso como classes da equivalências da certa relação. Vamos começar com definições.

21.1 *Relação de equivalência*

Seja X um conjunto e $\sim$ uma relação em X (ou seja um subconjunto em $X \times X$). Se x estiver relacionado com y, escrevemos

$$x \sim y.$$

Dizemos que $\sim$ uma *relação de equivalência*

(i) $a \sim a$, para todo $a \in X$ **(reflexiva)**.

(ii) $a \sim b$, implique que $b \sim a$ **(simetria)**.

(iii) $a \sim b$ e $b \sim c$ implique que $a \sim c$ **(transitiva)**

Denotamos for

$$C(a) = \{b \in X : b \sim a\},$$

a *classe de equivalência* de elemento $a \in X$.

Exemplo 21.1

Suponha que $X = \mathbb{Z}$ – os inteiros. Define

$$a \sim b \qquad \Leftrightarrow \qquad a \equiv b(\text{mod} 2)$$

Assim, $C(a) = \{b \in \mathbb{Z} : b \equiv a(\text{mod} 2)\}$. Em particular,

$$C(0) \text{ – todos pares.}$$
$$C(1) \text{ – todos impares.}$$
$$C(2) \text{ – todos pares}$$
$$\ldots$$

È fácil verificar que

$$C(2k) \text{ – todos pares.}$$
$$C(2k+1) \text{ – todos impares.}$$

Proposição 21.1

Seja X um coninuto com relação de equivalência $\sim$ Entao:

(1) $a \in C(a)$, para fodo $a \in X$.

(2) $a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad C(a) = c(b)$

(3) $C(a) \cap C(b) = \varnothing$, se a não é equivalente b.

(4) $X = \bigcup_{a \in X} C(a)$.

Prova

1) Como $a \sim a$, assim $a \in C(a)$.
2) [$\Rightarrow$] Se $c \in C(a)$, assim $c \sim a$. Por hipotese $a \sim b$, assim $c \sim b$ e $c \in C(b)$. Analogamente $C(a) \subseteq C(a)$. Assim,

$$C(a) = C(b).$$

[$\Leftarrow$] Suponha que $C(a) = C(b)$ assim $a \in C(b)$, logo $a \sim b$.
3) Suponha que a não é equivalente b, mas interseção $C(a) \cap C(b)$ não vazio. Assim existe elemento $c \in C(a)$ e $c \in C(b)$, ou seja $c \sim a$ e $c \sim b$, logo $a \sim b$. Contradição.
4) Como $a \in C(a)$, assim

$$X = \bigcup_{a \in X} \{a\} \subset \bigcup_{a \in X} C(a).$$

Por outro lado C (a) $\subset$ assim

$$\bigcup_{a \in \mathbb{X}} C(a) \subset X \Rightarrow X = \bigcup_{a \in X} C(a)$$

Logo, $X = \bigcup_{a \in X} C(a)$.

Agora se X é um conjunto com relação de equivalência $\sim$, denotamos for $X/\sim$ o *conjunto quociente* de X dado por.

$$X/\sim := \{C(a) \mid a \in X\}.$$

Exemplo 21.2

Suponha que $X = \mathbb{Z}$,

$$a \sim b \Leftrightarrow a \equiv b (\operatorname{mod} m).$$

Assim $C(a) = \bar{a}$ e conjunto quociente neste caso é

$$\mathbb{Z}/\sim = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{m-1}\} = \mathbb{Z}_m.$$

Ou seja o conjunto quociente é conjunto dos inteiros modulo m neste caso.

21.2 *Construção de racionais*

Considere o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, com $Z^* = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ - inteiros não-nulos, ou seja

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}.$$

Define a relação $\sim$ em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ como

$$(a,b) \sim (c,d) \quad \Leftrightarrow ad = bc$$

Observação 21.1

Pensando (a,b) como uma fração $\frac{a}{b}$, temos que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad ad = cb \quad \Leftrightarrow \quad (a,b) \sim (c,d).$$

Proposição 21.2

A relação $\sim$ é uma relação de equivalencia em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

Prova

(i) Temos que $(a,b) \sim (a,b)$ pois $a \cdot b = b \cdot a$.

(ii) Se $(a,b) \sim (c,d)$ assim $a \cdot d = b \cdot c$, ou seja $c \cdot b = d \cdot a$, portanto

$$(c,d) \sim (a,b).$$

(iii) Suponha que $(a,b) \sim (c,d)$ e $(c,d) \sim (e,f)$ assim temos que

$$ad = bc, \qquad cf = de.$$

A primeira equação implique que $adf = bcf$, e segunda que $bcf = bde$, assim

$$adf = bde,$$

cancelando d temos que $af = be$, assim $(a,b) \sim (e,f)$.

Denotamos a classe de equivalência $C(a,b)$ como fração $\frac{a}{6}$, isto é

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \{(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid (c,d) \sim (a,b)\} \\ &= \{(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid a \cdot d = b \cdot c\} \end{aligned}.$$

E denota por $\mathbb{Q}$ o conjuto guociente $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/ \sim$ chamado o *conjunto dos racionais*.

21.3 *Operaçoes em $\mathbb{Q}$*

Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{Q} \quad (\alpha = \frac{a}{b}, \beta = \frac{c}{d})$, definamos

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}, \\ \alpha\beta &= \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{a \cdot c}{b \cdot d}. \end{aligned}$$

Como as operações é definida nas representantes das classes de equivalência precisamos ver ainda se eles são bem-definidas.

Lemma 21.1

Se $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ e $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$ então:

$$\frac{a'd' + b'c'}{b'd'} = \frac{ad + bc}{bd}$$
$$\frac{a'c'}{b'd'} = \frac{ac}{bb}$$

Prova

Como $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} e \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$, assim

$$ab' = b \cdot a', \qquad cd' = dc',$$

De $ab' = a'b$ temos $ab'dd' = ba'dd'$, e $cd' = c'd$ implique que $dd'bb' = c'dbb'$. Assim

$$acb'd' = bda'c'$$

que equivalente o fato que $\frac{a'c'}{b'd'} = \frac{ac}{bb}$ e

$$\left(a'd' + b'c'\right) bd = b'd'(ad + bc)$$

o que equivalente que $\frac{a'd'+b'c'}{b'd'} = \frac{ad+bc}{bd}$.

Como consequencia temos que:

$$\begin{aligned} + :& \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \\ & \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) \longmapsto \frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad + bc}{bd} \\ \cdot :& \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \\ & \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) \longrightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{a \cdot c}{b \cdot d}. \end{aligned}$$

são operações de soma e produto bem-definidas em $\mathbb{Q}$.

Proposição 21.3

Para todos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ temos que as operações cumprem as seguintes propriedades:

(1) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.

(2) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

(3) Existe $0 \in \mathbb{Q}$ tal que $\alpha + 0 = \alpha$.

(4) Existe $-\alpha \in \mathbb{Q}$ tal que $\alpha + (-\alpha) = 0$.

(5) $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$.

(6) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.

(7) Existe 1 em $\mathbb{Q}$ tal que $\alpha \cdot 1 = \alpha$.

(8) Para todo $\alpha \neq 0$, existe $\alpha^{-1} \in \mathbb{Q}$, tal que $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$.

(9) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

Prova

Vamos ver apenas ideia da prova.
(3) Define
$$0 = \frac{0}{1} = \{(0, m) \in \mathbb{Z} \mid m \neq 0\}.$$
È facil ver que $\alpha + 0 = \alpha$ para todo α.
(4) Se $\alpha = \frac{a}{b}$, define $-\alpha = \frac{-a}{b}$, temos
$$\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{a \cdot b + (-ba)}{b^2} = \frac{0}{b^2} = 0.$$
(7) Definimos
$$1 = \frac{m}{m} = \{(m, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid m \neq 0\}.$$
(8) Para $\alpha = \frac{a}{b} \neq 0$ definimos $\alpha^{-1} = \frac{b}{a}$.

21.4 *Ordem em $\mathbb{Q}$*

Definição

Dados dois racionais $\alpha = \dfrac{a}{b}$ e $\beta = \dfrac{c}{d}$, dizemos que α é menor igual β ($\alpha \leqslant \beta$) se
$$a \cdot d \leq b \cdot c.$$

Proposição 21.4

Para todos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$, temos

(i) $\alpha \leqslant \alpha$ (**Reflexiva**).

(ii) Se $\alpha \leqslant \beta$ e $\beta \leq \alpha$, assim $\alpha = \beta$ (**Anti simetria**).

(iii) Se $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ e $\alpha \leqslant \beta$, $\beta \leqslant \gamma$, assim $\alpha \leqslant \gamma$ (**Transitiva**).

Observação 21.2

Temos $a/1 \leqslant b/1$ en $\mathbb{Q} \Leftrightarrow a \leqslant b$ em $\mathbb{Z}$.

Vamos lembrar que em $\mathbb{Z}$ vale o **Princípio da Boa Ordem (PBO)** que fale:

Todo conjunto não-vazio de inteiros não-negativos contém um elemento mínimo.

Observação 21.3

Notamos que o principio de Boa ordem não vale em $\mathbb{Q}$ (!!). **Contra-exemplo**. Seja

$$A = \{1/a \mid a \in \mathbb{Z}, a > 0\}.$$

Claro que A possui somente elementos positivos, mas A não tem elemento minimal, pois se $m = 1/a$ é elemento minimal, assim

$$m' = 1/(a+1) < 1/a = m.$$

e $m' \in A$. Uma contradição.

Além disso vamos lembrar que em $\mathbb{Z}$ não existem inteiros entre 0 e 1. Por outro lado a seguinte proposição fala que em conjunto $\mathbb{Q}$ entre dois racionais sempre tem mais um elemento.

Proposição 21.5

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ com $\alpha < \beta$. Então existe um racional γ tal que

$$\alpha < \gamma < \beta.$$

Prova

Seja $\alpha = \frac{a}{b}, \beta = \frac{c}{d}$, com $b > 0$. Define $\gamma = \frac{ad+bc}{2bd}$. Como $\alpha < \beta$ assim $ad < bc$. Logo $2ad < ad + bc$,

$$2adb < (ad + bc) \cdot b,$$

portanto $\frac{a}{b} < \frac{ad+bc}{2bd}$. Analogamente $\gamma < \beta$.

Proposição 21.6: Propriedade Arquimediana

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ positivos. Existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \cdot \alpha \geqslant \beta$.

Prova

Exercício p/ casa.

Exercício 21.1: (Trabalho p/ casa)

Seja α um número racional. Provar que existe um único inteiro n tal que $n \leq \alpha < n + 1$.

Exercício 21.2: (Trabalho p/ casa)

Determinar todos os inteiros n tais que $\frac{n+17}{n-4}$ seja o quadrado de um racional.