Aula 2. O Principio de Indução Finita

2.1 Principio e sua prova

A indução é uma técnica para provar uma afirmação — um teorema ou uma fórmula — que é afirmada sobre cada número natural. Por exemplo,

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

Isso afirma que a soma dos números consecutivos de 1 a n é dada pela fórmula à direita. Queremos provar que isso será verdade para $n = 1, n = 2, n = 3$ e assim por diante. Agora podemos testar a fórmula para qualquer número, digamos $n = 3$:

$$1+2+3 = \frac{3\cdot 4}{2} = 6$$

– que é verdade. Isso também é verdadeiro para $n = 4$:

$$1+2+3+4 = \frac{4\cdot 5}{2} = 10.$$

Mas como provar essa regra para cada valor de n?

O método de prova é o seguinte. Mostramos que se a afirmação for verdadeira para qualquer número específico k (por exemplo, 104), ela também será verdadeira para seu sucessor, $k+1$ (por exemplo, 105). Em seguida, mostramos que a afirmação será verdadeira para 1. Segue-se então que o afirmação será verdadeira para 2. Portanto, será verdade para 3. Assim por diante é verdadeiro para qualquer número natural. Isso é chamado de *princípio de indução finita*.

Theorem 2.1: (Principio de Indução Finita, PIF)

Seja a um inteiro positivo dado. Suponhamos que para cada inteiro $n \geq a$ está dada uma afirmação $A(n)$ de forma que:

(i) $A(a)$ é verdadeira.

(ii) Se para um inteiro $k \geq a$, $A(k)$ é verdadeira, então $A(k+1)$ é verdadeira.

Então a afirmação $A(n)$ é verdadeira para todo inteiro $n \geq a$.

Prova

Seja S o conjunto dos inteiros m tais que $A(m)$ seja falsa. Suponhamos que a afirmação $A(n)$ seja falsa para algum inteiro. Então, o conjunto S é não-vazio.
Conforme o Principio da Boa Ordem (veja Aula 1) existe elemento minimal $m_0 = \min S$. Como $m_0 - 1 \notin S$ (pois m_0 é minimal) assim $A(m_0 - 1)$ é verdadeira. Conforme (ii), para $k = m_0 - 1$ teremos então que

$$A(k+1) = A(m_0 - 1 + 1) = A(m_0)$$

é verdadeira. Mas isso é uma contradição, pois m_0 é elemento em S ou seja $A(m_0)$ deve ser falso. Assim S é conjunto vazio e $A(n)$ é verdadeira para todo inteiro $n \geq a$.

2.2 *Exemplos*

Para aplicar o principio da indução finita nos exemplos precisamos fazer 3 coisas:

Base: Verificar a afirmação no menor caso possível.

Hipótese: Assumir que a afirmação seja verdadeira no caso $n = k$.

Passo: Usando hipótese mostrar que a afirmação é verdadeira no caso $n = k + 1$.

Exemplo 2.1

Provaremos agora que a formula

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

é verdadeira para todo $n \geq 1$.
Base $\boxed{\text{n=1}}$. A fórmula acima dá

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}, \text{ ou seja } , 1 = 1$$

Assim, a afirmação é verdadeira para $n = 1$. Deveremos mostrar agora que, se a afirmação é verdadeira para $n = k$, então também é verdadeira para $n = k + 1$.
Hipótese $\boxed{\text{n=k}}$. Suponha que

$$1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}, \tag{2.1}$$

e mostremos que

$$1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Passo $\boxed{\text{n=k+1}}$. Somando $k + 1$ a ambos os lados da (2.1) temos

$$1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

isto é

$$1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

que é exatamente o que queríamos demonstrar.

Exemplo 2.2

Provaremos agora que a formula

$$1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

é verdadeira para todo $n \geq 1$.
Base $\boxed{\text{n=1}}$. Para $n = 1$, a fórmula acima dá

$$1 = 1^2, \text{ ou seja }, 1 = 1$$

Assim, a afirmação é verdadeira para $n = 1$. Deveremos mostrar agora que, se a afirmação é verdadeira para $n = k$, então também é verdadeira para $n = k + 1$.
Hipótese $\boxed{\text{n=k}}$. suponha que

$$1 + 3 + \ldots + (2k - 1) = k^2 \tag{2.2}$$

e mostremos que

$$1 + 3 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

Passo $\boxed{\text{n=k+1}}$. Somando $2k + 1$ a ambos os lados da (2.2) temos

$$1 + 3 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1$$

isto é

$$1 + 3 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

que é exatamente o que queríamos demonstrar.

Exemplo 2.3

Vamos mostrar que

$$n^3 < 2^n$$

é verdadeira para todo $n \geq 10$.
Base $\boxed{\text{n=10}}$. Para $n = 10$, temos

$$10^3 = 1000, 2^{10} = 1028, \text{ ou seja }, 10^3 < 2^{10}.$$

Assim, a afirmação é verdadeira para $n = 10$. Deveremos mostrar agora que, se a afirmação é verdadeira para $n = k$, então também é verdadeira para $n = k + 1$.
Hipótese $\boxed{\text{n=k}}$. Assim, suponha que

$$k^3 < 2^k. \tag{2.3}$$

Passo $\boxed{\text{n=k+1}}$. Temos

$$(k + 1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$$

Pelo hipótese (2.5) $k^3 < 2^k$, além disso obviamente $3k < 3k^2$ e $1 < k^2$. Assim

$$(k + 1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 < 2^k + 3k^2 + 3k^2 + k^2 = 2^k + 7k^2. \tag{2.4}$$

Como $k \geq 10$, assim $7k^2 < k^3 < 2^k$, portanto (2.4) escreva-se como

$$(k + 1)^3 < 2^k + 7k^2 < 2^k + 2^k = 2^{k+1}$$

que é exatamente o que queríamos demonstrar.

Exemplo 2.4

Vamos mostrar que

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$$

é verdadeira para todo $n \geq 2$.

Base $\boxed{\text{n=2}}$. Para $n=2$, temos

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}, \quad \frac{2+1}{2\cdot 2}=\frac{3}{4}, \text{ ou seja }, \frac{3}{4}=\frac{3}{4}.$$

Hipótese $\boxed{\text{n=k}}$. Suponha que

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{k+1}{2k} \tag{2.5}$$

Passo $\boxed{\text{n=k+1}}$. Devemos mostrar que

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{k+2}{2(k+1)}$$

Pelo hipótese o lado esquerdo pode ser escrito como

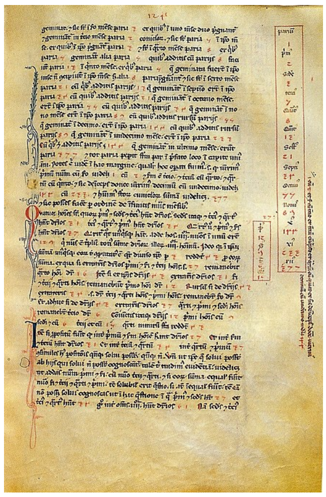
$$\frac{k+1}{2k}\cdot\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{k+1}{2k}\cdot\frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2}=\frac{k^2+2k+1-1}{2k(k+1)}=\frac{k+2}{2(k+1)},$$

que é exatamente o que queríamos demonstrar.

2.3 *Numeros de Fibonacci e Segunda forma da PIF*

Você pode ter ouvido falar dos números de Fibonacci. Eles ocorrem com frequência em matemática e ciências da vida. Pela primeira vez eles ocorreram no livro **Liber Abaci** (1202) de Fibonacci, onde foi usada para calcular o crescimento das populações de coelhos. Os números de Fibonacci formam uma sequência em que cada termo, exceto os dois primeiros, é a soma dos dois números anteriores. Matematicamente, se denotarmos o n-th número de Fibonacci F_n, então

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$



Livro **Liber Abaci** (1202)

Isso é chamado de relação de recorrência para F_n.

A relação de recorrência implica que precisamos começar com dois valores iniciais. Frequentemente, começamos com $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$. Combinamos a relação de recorrência para F_n e seus valores iniciais juntos em uma definição:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \text{para} \quad n \geq 2$$

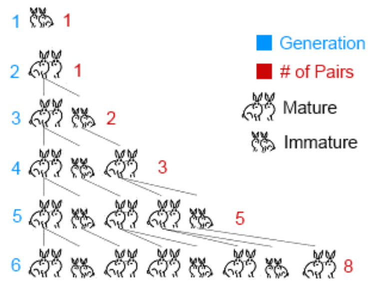
Temos que especificar que a relação de recorrência é válida apenas quando $n \geq 2$, porque este é o menor valor de n para o qual podemos usar a relação de recorrência.

A soma do zero e dos primeiros números de Fibonacci nos dá o segundo número de Fibonacci:

$$F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$$

Continuando desta forma, encontramos

$$F_3 = 2,\ F_4 = 3,\ F_5 = 5,\ F_6 = 8,\ F_7 = 13,\ F_8 = 21,\ F_9 = 34, \ldots$$



Os números de Fibonacci têm muitas propriedades interessantes, e existem vários resultados relativos aos números de Fibonacci. Para começar, considere a propriedade

$$F_n < 2^n, \quad n \geq 1$$

Como o provaríamos por indução? Visto que queremos provar que a desigualdade é válida para todos os $n \geq 1$, devemos verificar o caso de $n = 1$ no passo base. Quando $n = 1$, temos $F_1 = 1$ que é, obviamente, menor que $2^1 = 2$. Na hipótese indutiva, assumimos que a desigualdade se mantém quando $n = k$ para algum inteiro $k \geq 1$; isto é, nós assumimos

$$F_k < 2^k$$

para algum inteiro $k \geq 1$. Em seguida, queremos provar que a desigualdade ainda é válida quando $n = k + 1$. Então, precisamos provar que

$$F_{k+1} < 2^{k+1}$$

Para fazer uso da hipótese indutiva, precisamos aplicar a relação de recorrência dos números de Fibonacci. Ele nos diz que F_{k+1} é a soma dos dois números de Fibonacci anteriores; isso é,

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$$

A única coisa que sabemos da hipótese indutiva é $F_k < 2^k$. Portanto, do jeito que está, não nos diz muito sobre F_{k+1}. Um remédio é assumir na hipótese indutiva que a desigualdade também é válida quando $n = k - 1$; ou seja, também assumimos que

$$F_{k-1} < 2^{k-1}$$

Portanto, ao contrário de todos os problemas que vimos até agora, a etapa indutiva neste problema depende dos dois últimos valores de n em vez de apenas um. Em termos de dominó, imagine que eles são tão pesados que precisamos do peso combinado de dois dominós para derrubar o próximo. Então

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1} < 2^k + 2^{k-1} = 2^{k-1}(2+1) < 2^{k-1} \cdot 2^2 = 2^{k+1}$$

que irá completar a indução. Essa indução modificada é conhecida como a segunda forma forte de indução matemática.

Theorem 2.2: (Principio da Indução Finita 2)

Suponhamos que para cada inteiro $n \geq a$ está dada uma afirmação $A(n)$ de forma que

(i) $A(a)$ é verdadeira;

(i) Se $A(m)$ é verdadeira para todo inteiro m tal que $a \leq m \leq k$ então $A(k+1)$ é verdadeira.

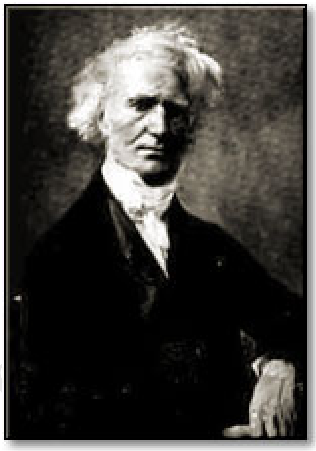
Então $A(n)$ e verdadeira para todo inteiro $n \geq a$.

O termo geral F_n da sequencia de Fibonacci cumpre a fórmula recebida de Binet (em 1843). A fórmula vincula diretamente os números de Fibonacci e a Numero de Ouro (Razão áurea), veja aqui aqui, onde *razão áurea* $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é a raiz positiva da equação quadrática

$$x^2 - x - 1 = 0$$

A segunda raiz da equação é negativa: $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. e denotado por τ
Com essas preliminares, a fórmula de Binet é:

$$\boxed{F_n = \frac{\phi^n - \tau^n}{\sqrt{5}}}$$



Jacques Philippe Marie Binet (1786–1856)

Para provar o formula vamos precisar o seguinte lema:

Lemma 3.1

Para qualquer solução x de $x^2 - x - 1 = 0$, temos

$$x^n = xF_n + F_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Prova

A prova é por indução. Por definição, $F_1 = 1$ e $F_0 = 0$ de modo que, de fato, $x^1 = x \cdot 1 + 0 = x$. Para $n = 2$, $F_2 = F_1 = 1$, e

$$x \cdot xF_2 + F_1 = x \cdot 1 + 1 = x + 1 = x^2$$

Suponha agora que, para algum n, $x^n = xF_n + F_{n-1}$ e vamos provar que $x^{n+1} = xF_{n+1} + F_n$. Para isso, multiplique o hipotese identidade por x:

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= x^2 F_n + xF_{n-1} \\ &= (x+1)F_n + xF_{n-1} \\ &= x\left(F_n + F_{n-1}\right) + F_n \\ &= xF_{n+1} + F_n. \end{aligned}$$

Assim recebemos exatamente o que gostariamos de provar.

Agora, por Lemma,

$$\begin{aligned} \phi^n &= \phi F_n + F_{n-1} \\ \tau^n &= \tau F_n + F_{n-1}. \end{aligned}$$

Subtraindo um do outro resulta $\phi^n - \tau^n = (\phi - \tau)F_n$. Segue que

$$F_n = \frac{\phi^n - \tau^n}{\phi - \tau}$$

Para obter a fórmula de Binet, observe que $\phi - \tau = \sqrt{5}$.

2.4 *Dominó e Indução*

Tem a certa analogia entre o princípio da indução é o efeito dominó. O *efeito dominó* é o reação em cadeia que consiste em uma fileira de dominós caindo.

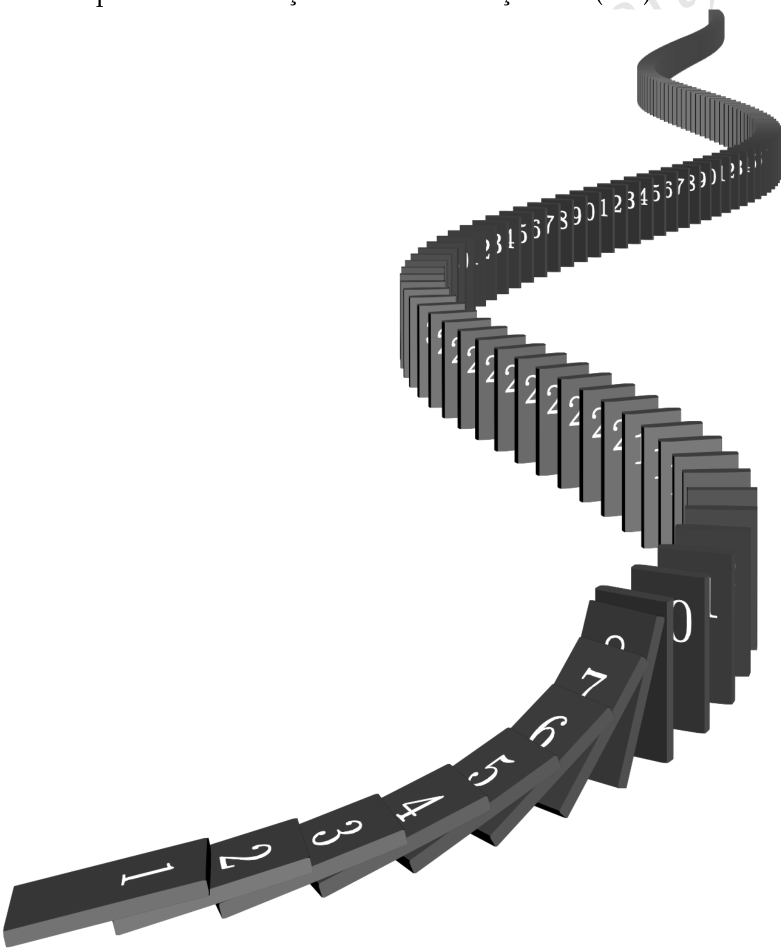
Se você colocasse dez mil dominós na fila em uma mesa muito longa e quisesse deixá-los cair apenas deixando o primeiro dominó cair, como o faria?

A melhor ideia provavelmente é colocá-los em uma fila de forma que:

(i) Quando o primeiro dominó cair, ele atingirá o segundo dominó.

(ii) Certifique-se de que cada dominó atingirá o dominó próximo a ele e que cada dominó atingido cairá.

Se as condições (i) e (ii) forem satisfeitas, todos os dominós cairão. Compare estes condições com as condições na (PIF).



Na verdade, não importa quantos dominós colocamos na mesa, desde que as condições (1) e (2) sejam satisfeitas, temos certeza de que todos os dominós cairão.

Exercício 2.1: (Trabalho p/ casa)

Mostre que

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1},$$

para todos $n \geq 1$.

Exercício 2.2: (Trabalho p/ casa)

Mostre que $2n^3 > 3n^2 + 3n + 1$ para todos $n \geq 3$.

Exercício 2.3: (Trabalho p/ casa)

Mostre que na sequencia de Fibonacci F_{5n} sempre é um multiplo de 5.

Exercício 2.4: (Trabalho p/ casa)

Mostre que $(PIF) \Rightarrow (PBO)$, ou seja por indução, mostre que todo conjunto não-vazio dos inteiros positivos contém elemento minimal.