Aula 14. Revisão II

14.1 Equações diofantinas

LEMBRETE:

A equação diofantina

$$a \cdot x + b \cdot y = c,$$

tem as soluções se e somente se

$$\mathrm{mdc}(a, b) \mid c.$$

Neste caso se x_0, y_0 é uma solução particular da $a \cdot x + b \cdot y = c$, assim todos outros soluções tem a forma

$$x = x_0 + (b/d) \cdot t$$
$$y = y_0 - (a/d) \cdot t.$$

onde t é inteiro e $d = \mathrm{mdc}(a, b)$.

Exercício 14.1

Provar que é impossível fazer um postal de R$5.00 utilizando apenas os selos postais que custam 14 e 35 centavos.

Solução 14.1

Se for possível, assim existem x, y inteiros tais que $14x + 35y = 500$, mas

$$\mathrm{mdc}(14, 35) = 7 \nmid 500.$$

Contradição.

Exercício 14.2

Determine todos os múltiplos de 38 e 34 cuja diferença seja 10.

Solução 14.2

Precisamos resolver:

$$38 \cdot x + 34 \cdot y = 10,$$

Temos que $a = 38$, $b = 34$, $c = 10$. Assim

$$d = \text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(38, 34) = 2 \nmid 10 = c$$

assim há soluções. Para encontrar uma solução particular, vamos reverter o algoritmo de Euclides.

$$\begin{aligned} 38 &= 34 + 4 \quad 4 = 38 - 34 \\ 34 &= 8 \cdot 4 + 2 \\ 34 &= 2 \cdot 2 + 0. \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$2 = 34 - 8 \cdot 4 = 34 - 9 \cdot (38 - 34) = -8 \cdot 38 + 19 \cdot 34.$$

Ou seja $38 \cdot (-8) + 34 \cdot 9 = 2$, multiplicando por 5, vamos receber $38 \cdot (-40) + 34 \cdot (45) = 10$. Aplicando a formula para todos soluções, temos

$$\begin{array}{l} x = -40 + \frac{34}{2} \cdot t = -40 + 17t \\ y = 45 - \frac{38}{2} \cdot t = 45 - 19t \end{array}, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

Exercício 14.3

Determine todos wultiplos positivos de 11 e 9 cuja soma seja 270.

Solução 14.3

Encontramos, $x > 0$, $y > 0$, com

$$11x + 9y = 270.$$

Como $d = \text{mdc}(11, 9) = 1$ e d divide 270 assim há soluções. Vamos encontrar solução particular

$$\begin{aligned} 11 = 9 + 2 \quad &\Rightarrow \quad (2) = 11 - 9 \\ 9 = 4.2 + 1 \quad &\Rightarrow \quad 1 = 9 - 4 \cdot 2 \\ &= 9 - 4 \cdot (11 - 9) \\ &= 11 \cdot (-4) + 9 \cdot 5 \end{aligned}$$

Assim

$$11 \cdot (-4) + 9 \cdot 5 = 1$$

Multiplicando por 270, temos

$$11 \cdot (-4) \cdot 270 + 9 \cdot 5 \cdot 270 = 270$$

ou,

$$11 \cdot (-1080) + 9 \cdot 1350 = 270.$$

Aplicando o formula temos

$$x = -1080 + 9 \cdot t y \qquad = 1350 - 11 \cdot t$$

Como $x > 0, y > 0$ assim $-1080 + 9t > 0$ ou $t > 120$ e $1350 - 11t > 0$ ou $t < 123$. Assim tem duas posibilidades

$$t = 121 \Rightarrow x = 9, y = 19$$
$$t = 122 \Rightarrow x = 18, y = 8$$

14.2 *Congruências*

LEMBRETE

$$a \equiv b \pmod{n} \iff \begin{array}{l} a, b \text{ tem o mesmo} \\ \text{resto quando duvide} \\ \text{por } n. \end{array}$$

Exercício 14.4

Mostre que

$$5^n + 6^n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 11),$$

se n é impar positivo.

Solução 14.4

Temos que $5 + 6 = 11$, ou seja $5 \equiv -6 (\mathrm{mod}\, 11)$. Agora quando n é impar, assim $(-6)^n = -6^n$, portanto, temos

$$5^n \equiv -6^n (\mathrm{mod}\, 11)$$

que implique o desejável.

Exercício 14.5

Mostre que $23 \mid (2^{11} - 1)$.

Solução 14.5

Temos que $2^5 = 32 \equiv 9 (\mathrm{mod} 23)$, levando ambos os lados ao quadrado, temos

$$2^{10} \equiv 81 \pmod{23}$$

. Por outro lado

$$81 \equiv 12 \pmod{23}.$$

Assim

$$2^{10} \cdot 2 \equiv 12 \cdot 2 = 24 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 23)$$

Resumindo $2^11 - 1$ é um multiplo de 23.

Exercício 14.6

Determine o resto da divisão de 41^{65} por 7.

Solução 14.6

Notamos que

$$41 \equiv -1 (\mod 7).$$

Assim

$$41^{65} \equiv (-1)^{65} = -1 (\mod 7)$$

Portanto o resto é 6 (pois $-1 \equiv 6 (\mod 7)$).

Exercício 14.7

Mostre que $9^{2n+1} + 8^{n+2}$ é um múltiplo de 73 para todo n positivo.

Solução 14.7

Temos que

$$\begin{aligned} 9^{2n} + 1 &= 9 \cdot 9^{2n} = 9 \cdot 81^n \equiv 9 \cdot 8^n (\mod 73) \\ 8^{n+2} &= 8^2 \cdot 8^n = 64 \cdot 8^n \equiv -9 \cdot 8^n (\mod 73). \end{aligned}$$

Assim, somando, temos que

$$9^{2n+1} + 8^{n+2} \equiv 0 (\mod 73).$$

Exercício 14.8

Encontre o resto da divisão do 3^{5555} por 80.

Solução 14.8

Temos que

$$3^4 = 81 \equiv 1 (\mod 80).$$

Alem disso

$$5555 = 4 \cdot 1388 + 3$$

Assim

$$3^{4 \cdot 1388} \cdot 3^3 \equiv 3^3 = 27 (\mod 80)$$

Ou seja o resto é 27.

14.3 *Congruências lineares*

LEMBRETE

Suponha que dada a congruência $ax \equiv b \pmod n$ com $d = \mathrm{mdc}(a,n) \mid b$. Assim essa congruência tem exatamente d soluções não-congruente dois a dois dados por seguintes formulas:

$$\begin{aligned} x_0 &= r \cdot b/d, \\ x_1 &= r \cdot b/d + n/d, \\ x_2 &= r \cdot b/d + 2n/d, \\ &\vdots \\ x_{d-1} &= r \cdot b/d + (d-1)n/d, \end{aligned}$$

onde

$$d = ar + ns,$$

usando o Teorema de Bezout (veja Aula 6).

Exercício 14.9

Resolve

$$14x \equiv 4(\mathrm{mod}\, 46).$$

Solução 14.9

No caso, temos $a = 14$, $b = 4$ e $n = 46$. Como

$$\mathrm{mdc}(14, 46) = 2 \mid 4$$

assim há soluções. Vamos encontrar r, s tais que

$$ar + ns = 14r + 46s = 2 = \mathrm{mdc}(a,n)$$

revertendo algoritmo de Euclides. Temos:

$$\begin{aligned} 46 &= 14 \cdot 3 + 4 \\ 14 &= 4 \cdot 3 + 2 \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} &4 = 46 - 14 \cdot 3 \\ &2 = 14 - 20 \cdot 3 = 14 - (46 - 14 \cdot 3) \cdot 3 = 10 \cdot 14 - 3.46. \end{aligned}$$

Portanto $r = 10$ e $s = -3$. Aplicando as formulas, temos

$$\begin{aligned} x_0 &= \tfrac{r \cdot b}{d} = \tfrac{10 \cdot 4}{2} = 20 \\ x_1 &= \tfrac{r \cdot b}{d} + \tfrac{n}{d} = \tfrac{10 \cdot 4}{2} + \tfrac{46}{2} = 20 + 23 = 43 \end{aligned}$$

Exercício 14.10

Resolve
$$25x \equiv 15 \pmod{29}.$$

Solução 14.10

Temos que $\mathrm{mdc}(25, 29) = 1$, assim há uma única solução.

$$\begin{aligned} 29 &= 25 + 4 \\ 25 &= 6 \cdot 4 + 1 \end{aligned}$$

Revertendo algoritmo de Euclides, temos

$$\begin{aligned} 4 &= 23 - 25 \\ 1 &= 25 - 6.4 \\ &= 25 - 6 \cdot (29 - 25) \\ &= 25 \cdot (7) - 29 \cdot 6 \end{aligned}$$

Assim $r = 7$. Agora pelo formula temos que

$$x = \frac{r \cdot b}{d} = \frac{7 \cdot 15}{1} = 105$$

Ou seja
$$x \equiv 18 \pmod{29}.$$

Exercício 14.11: Trabalho p/ casa

Mostre que $3^{1000} + 3$ é um múltiplo de 28.

Exercício 14.12: Trabalho p/ casa

Encontre o resto da divisão de 5^{1000} por 126.

Exercício 14.13: Trabalho p/ casa

Mostre que $2^{5n+1} + 5^{n+2}$ é um múltiplo de 27 para todo n positivo.

Exercício 14.14: Trabalho p/ casa

Resolve $21x + 49y = 7$

Exercício 14.15: Trabalho p/ casa

De termine todos múltiplos positivos de 9 e 13 cuja soma seja 101.