Lista 1 com respostas

MAT0120 — 1° SEMESTRE DE 2020

Axiomática de $\mathbb{Z}$.

Exercício 1.
Dado um inteiro a, chamamos de *valor absoluto* de a o numero inteiro designado por $|a|$ e definido por

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a \geqslant 0 \\ -a, & \text{se } a < 0 \end{cases} .$$

Sejam a e b. Provar que

a) $|a| \geqslant 0$;

b) $|a| = 0$ se, e somente se, $a = 0$;

c) $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$;

d) $|ab| = |a||b|$;

e) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$;

f) $||a| - |b|| \leqslant |a - b|$.

Solução 1.

a) Se $a \geqslant 0$, então $|a| = a \geqslant 0$. Se $a < 0$, então $-a > 0$ e $|a| = -a > 0$. Logo $|a| \geqslant 0, \quad \forall a$.

b) $(|a| = 0 \Rightarrow a = 0)$: Se $a < 0$, então $-a > 0$ e $|a| = -a > 0$ o que é absurdo pela hipótese. Se $a > 0$ então $|a| = a > 0$, o que é absurdo pela hipótese. Logo, $a = 0$.
$(|a| = 0 \Leftarrow a = 0)$: Por definição, $|0| = 0$.

c) Se $a < 0$, então $-a > 0$ e $|a| = -a > 0 > a$ e $-|a| = a$. Logo:

$$-|a| = a < |a|.$$

Se $a \geqslant 0$, então $|a| = a > 0$ e $-|a| < 0 < a$. Logo:

$$-|a| < a = |a|.$$

Juntando as duas informações, temos:

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|.$$

d) $|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2b^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2} = |a||b|$.

e) Do item **c)**, temos:

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|$$
$$-|b| \leqslant b \leqslant |b|$$

Somando:

$$-\left(|a|+|b|\right) \leqslant a+b \leqslant |a|+|b|$$
$$|a+b| \leqslant |a|+|b|$$

f)

$$|a| = |a-b+b| \leqslant |a-b|+|b|$$
$$|a|-|b| \leqslant |a-b|$$
$$|a-b| = |b-a| \geqslant |b|-|a| = -\left(|a|-|b|\right)$$
$$-|a-b| \leqslant |a|-|b|$$

Juntando as duas informações, temos:

$$-|a-b| \leqslant |a|-|b| \leqslant |a-b|$$
$$||a|-|b|| < |a-b|$$

Exercício 2.
Prove que o conjunto $S = \{m \in \mathbb{Z} \mid 7 < m < 8\}$ é vazio.

Solução 2.
Primeiro vamos provar que o conjunto $S = \{s \in \mathbb{Z} | 0 < s < 1\}$ é vazio.

Suponha por absurdo que $S \neq \varnothing$. Logo, pelo Princípio da Boa Ordem, existe um elemento s que é mínimo de S. Assim:

$$0 < s < 1$$

Multiplicando a dupla desigualdade por s, temos: $0 < s^2 < s < 1$

Ou seja, existe um outro elemento $s^2 \in S$ que é menor que s, o que é absurdo, pois s é minimal. Logo, $S = \varnothing$.

Agora suponha que haja um elemento m em $M = \{m \in Z | 7 < m < 8\}$. Logo, há um elemento em $\{m \in Z | 0 < m-7 < 1\} = S$, o que é absurdo. Logo $M = \varnothing$.

Exercício 3.
Um elemento $a \in \mathbb{Z}$ é dito *inversível* se existir em elemento $a' \in \mathbb{Z}$ tal que $aa' = 1$. Mostrar que os únicos elementos inversíveis de $\mathbb{Z}$ são 1 e -1.

Solução 3.
Sabemos que $a \neq 0$ pois $0 \cdot a' = 0$. Assim:

$$a \cdot a' = 1 \Rightarrow |a \cdot a'| = |1| \Rightarrow |a||a'| = 1.$$

Mas

$$|a| \geqslant 1$$

e

$$|a'| \geqslant 1,$$

logo, a única forma do produto dar 1 é se $|a| = 1$, o que implica que $a = 1$ ou $a = -1$.

Indução Finita.

Exercício 4.
Prove que se vale o Princípio da Indução Finita, então vale o Princípio da Boa Ordem.

Solução 4.
Seja $A_n = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ um conjunto finito não vazio. Para $n = 1$, temos que $A_1 = \{a_1\}$ e a_1 é claramente elemento minimal de A_1. Agora suponha que para $n = k > 1$, o conjunto $A_k = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ tenha elemento minimal a_k^*.

O conjunto $A_{k+1} = A_k \cup \{a_{k+1}\}$ possui duas opções: ou $a_{k+1} \leqslant a_k^*$, o que implica que a_{k+1} é elemento minimal de A_{k+1}, ou $a_{k+1} > a_k^*$, o que implica que a_k^* é elemento minimal de A_{k+1}. Portanto, por indução, A_n sempre tem elemento minimal.

Exercício 5.
Prove que se vale o Princípio da Indução Finita (2-da forma), então vale o Princípio da Boa Ordem.

Solução 5.

Exercício 6.
Prove por indução que

a) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(2n+1)(n+1)}{6}, \quad \forall n \geqslant 1;$

b) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2, \quad \forall n \geqslant 1;$

c) $(1+h)^n \geqslant 1 + nh$ onde $h > 0$ está fixado e $n \geqslant 0$.

Solução 6.
a) *Base*: $n = 1$

$$1^2 = \frac{1 \cdot (2 \cdot 1 + 1)\,(1+1)}{6} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 2}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Hipótese: $n = k > 1$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k\left(2k+1\right)\left(k+1\right)}{6}$$

Passo: $n = k + 1$

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + \left(k+1\right)^2 &= \frac{k\left(2k+1\right)\left(k+1\right)}{6} + \left(k+1\right)^2 \\
&= \frac{\left(k+1\right)}{6}\left(k\left(2k+1\right) + 6\left(k+1\right)\right) \\
&= \frac{\left(k+1\right)}{6}\left(2k^2 + 7k + 6\right) \\
&= \frac{\left(k+1\right)\left(2k+3\right)\left(k+2\right)}{6}.
\end{aligned}$$

b) *Base*: $n = 1$

$$1^3 = \left(\frac{1\left(1+1\right)}{2}\right)^2 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right)^2 = 1^2 = 1$$

Hipótese: $n = k > 1$

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = \left(\frac{k\left(k+1\right)}{2}\right)^2$$

Passo: $n = k + 1$

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + \left(k+1\right)^3 &= \left(\frac{k\left(k+1\right)}{2}\right)^2 + \left(k+1\right)^3 \\
&= \frac{\left(k+1\right)^2}{4}\left(k^2 + 4\left(k+1\right)\right) \\
&= \frac{\left(k+1\right)^2}{4}\left(k^2 + 4k + 4\right) \\
&= \frac{\left(k+1\right)^2}{4}\left(k+2\right)^2 \\
&= \left(\frac{\left(k+1\right)\left(k+2\right)}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

c) *Base*: $n = 0$

$$\left(1+h\right)^0 = 1 \geqslant 1 + 0 \cdot h = 1$$

Hipótese: $n = k > 1$

$$\left(1+h\right)^k \geqslant 1 + kh$$

Passo: $n = k + 1$

$$\begin{aligned}
\left(1+h\right)^{k+1} &= \left(1+h\right)^k\left(1+h\right) \\
&\geqslant \left(1+kh\right)\left(1+h\right) \\
&= 1 + h + kh + kh^2 \\
&= 1 + \left(k+1\right)h + \underbrace{kh^2}_{>0} > 1 + \left(k+1\right)h.
\end{aligned}$$

Exercício 7.
Prove por indução que

(a) $n^3 + 2n$ é sempre divisível por 3;

(b) $5^n - 4n + 15$ é sempre divisível por 16 para todo $n \geqslant 0$.

(c) $2n^3 + 3n^2 + 7n$ é sempre divisível por 6 para todo $n \geqslant 0$.

(d) $4^{2n-1} + 1$ sempre divisível por 5 para todo $n \geqslant 1$.

(e) $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ sempre divisível por 11 para todo $n \geqslant 1$.

Solução 7.

a) *Base*: $n = 0$

$$0^3 + 2 \cdot 0 = 0 = 0 \cdot 3$$

Hipótese: $n = k > 1$

$$k^3 + 2k = 3t; t \in \mathbb{Z}$$

Passo: $n = k + 1$

$$\begin{aligned} (k+1)^3 + 2(k+1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2 \\ &= k^3 + 2k + 3\left(k^2 + k + 1\right) \\ &= 3t + 3\left(k^2 + k + 1\right) = 3q; \quad q \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

b) *Base*: $n = 0$

$$5^0 - 4 \cdot 0 + 15 = 1 + 15 = 16 = 1 \cdot 16$$

Hipótese: $n = k > 1$

$$5^k - 4k + 15 = 16t; t \in \mathbb{Z}$$

Passo: $n = k + 1$

$$\begin{aligned} 5^{k+1} - 4(k+1) + 15 &= 5 \cdot 5^k - 4(k+1) + 15 \\ &= 5 \cdot (5^k - 4k + 15) - 4(k+1) + 15 + 5 \cdot 4k - 5 \cdot 15 \\ &= 5 \cdot 16t + 16k - 64 = 16(t + k - 4). \end{aligned}$$

c) *Base*: $n = 0$

$$2 \cdot 0^3 + 3 \cdot 0^2 + 7 \cdot 0 = 0 = 0 \cdot 6$$

Hipótese: $n = k > 0$

$$2k^3 + 3k^2 + 7k = 6t; t \in \mathbb{Z}$$

Passo: $n = k + 1$

$$\begin{aligned} 2(k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 7(k+1) &= 2k^3 + 6k^2 + 6k + 2 + 3k^2 + 6k + 3 + 7k + 7 \\ &= 6t + 6\left(k^2 + 2k + 2\right) \\ &= \left(t + k^2 + 2k + 2\right) = 6q; \quad q \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

d) *Base*: $n = 1$

$$4^{2\cdot 1-1} + 1 = 4^1 + 1 = 5 = 1 \cdot 5$$

Hipótese: $n = k > 1$

$$4^{2\cdot k-1} + 1 = 5t; \quad t \in \mathbb{Z}$$

Passo: $n = k + 1$

$$\begin{aligned} 4^{2\cdot(k+1)-1} + 1 = 4^{2k-1+2} - 1 &= 16 \cdot 4^{2k} - 1 \\ &= 4^{2k} - 1 + 15 \cdot 4^{2k} \\ &= 5t + 15 \cdot 4^{2k} = \left(t + 3 \cdot 4^{2k}\right) = 5q; \quad q \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

e) *Base*: $n = 1$

$$6^{2\cdot 1-2} + 3^{1+1} + 3^{1-1} = 1 + 9 + 1 = 11 = 1 \cdot 11$$

Hipótese: $n = k > 1$

$$6^{2\cdot k-2} + 3^{k+1} + 3^{k-1} = 11t; \quad t \in \mathbb{Z}$$

Passo: $n = k + 1$

$$\begin{aligned} 6^{2\cdot k-2+2} + 3^{k+1+1} + 3^{k-1+1} &= 36 \cdot 6^{2k-2} + 3 \cdot 3^{k+1} + 3 \cdot 3^{k-1} \\ &= 6^{2k-2} + 3^{k+1} + 3^{k-1} + 35 \cdot 6^{2k-2} + 2 \cdot 3^{k+1} + 2 \cdot 3^{k-1} \\ &= 11t + 35 \cdot 36^{k-1} + 20 \cdot 3^{k-1} \\ &= 11t + 5 \cdot 3^{k-1}\left(7 \cdot 12^{k-1} + 4\right)(*)\,. \end{aligned}$$

$$11 \mid \left(7 \cdot 12^{k-1} + 4\right)?$$

Base: $k = 2$

$$7 \cdot 12^{2-1} + 4 = 7 \cdot 12 + 4 = 88 = 8 \cdot 11$$

Hipótese: $k = p > 2$

$$7 \cdot 12^{p-1} + 4 = 11q; \quad q \in \mathbb{Z}$$

Passo: $k = p + 1$

$$\begin{aligned} 7 \cdot 12^{p-1+1} + 4 = 7 \cdot 12 \cdot 12^{p-1} + 4 &= 7 \cdot 12^{p-1} + 4 + 77 \cdot 12^{p-1} \\ &= 11q + 77 \cdot 12^{p-1} \\ &= 11\left(q + 7 \cdot 12^{p-1}\right) = 11r; \quad r \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Voltando a $(*)$:

$$\begin{aligned} 6^{2\cdot k-2+2} + 3^{k+1+1} + 3^{k-1+1} &= 11t + 35 \cdot 36^{k-1} + 20 \cdot 3^{k-1} \\ &= 11t + 5 \cdot 3^{k-1} \cdot 11r \\ &= 11\left(t + 5 \cdot 3^{k-1} + r\right) = 11s; \quad s \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Exercício 8.
Sejam a e r dois números inteiros $a_1 = a, a_2 = a + r, a_3 = a + 2r, \ldots, a_n = a + (n-1)r, \ldots$ é dita uma progressão aritmética de razão r. Prove, utilizando o princípio de indução finita, que a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é dada por:

$$a + (a + r) + \cdots + (a + (n-1)r) = \frac{n(2a + (n-1)r)}{2}.$$

Solução 8.
Base: $n = 1$

$$\frac{1 \cdot (2a + (1-1)\,r)}{2} = \frac{2a + 0}{2} = a$$

Hipótese: $n = k > 1$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = \frac{k\,(2a + (k-1)\,r)}{2}$$

Passo: $n = k + 1$

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} &= \frac{k\,(2a + (k-1)\,r)}{2} + a + (k + 1 - 1)\,r \\
&= \frac{k\,(2a + (k-1)\,r) + 2a + 2kr}{2} \\
&= \frac{2a\,(k+1) + r\,((k-1) + 2k)}{2} \\
&= \frac{2a\,(k+1) + rk\,(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)\,(2a + (k+1-1)\,r)}{2}.
\end{aligned}$$

Exercício 9.
Considere a seguinte sequência de somas

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2!} &= \frac{1}{2} \\
\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} &= \frac{5}{6} \\
\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} &= \frac{23}{24} \\
\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} &= \frac{119}{120} \\
&\cdots
\end{aligned}$$

e seja $P(n)$ a soma

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n-1}{n!}.$$

Determine uma expressão para $P(n)$ e, em seguida, utilizando o Princípio da Indução Finita, prove a sua validade para $n \geqslant 2$.

Solução 9.

$$\mathsf{P}(n) : \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n-1}{n!} = \frac{n!-1}{n!}$$

Base: $n = 2$

$$\frac{1}{2!} = \frac{1}{2} = \frac{2!-1}{2} = \frac{2-1}{2}$$

Hipótese: $n = k > 2$

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{k-1}{k!} = \frac{k!-1}{k!}$$

Passo: $n = k+1$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{k-1}{k!} + \frac{k}{(k+1)!} &= \frac{k!-1}{k!} + \frac{k}{(k+1)!} \\
&= \frac{1}{(k+1)!} \cdot ((k!-1)(k+1)+k) \\
&= \frac{1}{(k+1)!} \cdot (k! \cdot k + k! - k - 1 + k) \\
&= \frac{1}{(k+1)!} \cdot (k!(k+1) - 1) \\
&= \frac{(k+1)!-1}{(k+1)!}
\end{aligned}$$

Exercício 10.
Prove que se $n \geqslant 3$, então a soma dos ângulos internos de um polígono regular de n-lados é

$$(n-2)180^0.$$

Solução 10.
Base: para $n = 3$, o polígono convexo é o triângulo que sabemos da geometria euclidiana elementar que a soma dos seus ângulos internos é $180°$, ou seja, $S_3 = (3-2) \cdot 180° = 180°$.

Hipótese: Suponha que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo com $n = k$ lados seja $S_k = (k-2) \cdot 180°$.

Passo: Considere o polígono convexo $A_0A_1 \cdots A_k$ com $n = k+1$ lados. O polígono $A_0A_2 \cdots A_k$ que se obtém traçando o segmento $\overline{A_0A_2}$ tem k lados, consequentemente a soma dos seus ângulos internos é $S_k = (k-2) \cdot 180°$. Agora a soma dos ângulos internos do polígono original será S_k mais a soma dos ângulos do triângulo $A_0A_1A_2$, isto é, $S_{k+1} = S_k + 180° = (k-2) \cdot 180° + 180° = (k+1-2) \cdot 180°$.

Exercício 11.
Sabe-se que a forma trigonométrica do número complexo $z = a + bi$ é dada por

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta),$$

onde $\theta = \arg z$, $\rho = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$. Prove, utilizando o Princípio de Indução Finita, a fórmula de De Moivre, isto é, se $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ então

$$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

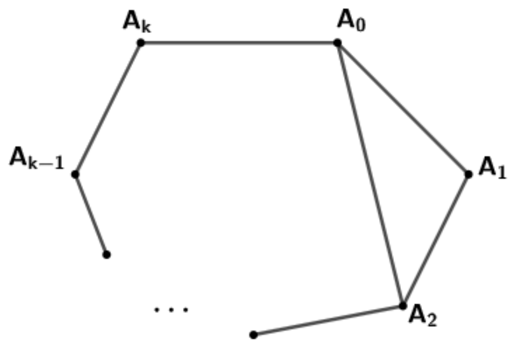

Figura 1: Polígono de $k+1$ lados

Solução 11.
Base: $n = 1$

$$z^1 = \rho^1 (\cos(1\theta) + i \cdot \sin(1\theta)) = \rho (\cos\theta + i \cdot \sin(\theta)) = z$$

Hipótese: $n = k > 1$

$$z^k = \rho^k (\cos(k\theta) + i \cdot \sin(k\theta))$$

Passo: $n = k + 1$

$$z^{k+1} = z^k \cdot z^1 = \left(\rho^k (\cos(k\theta) + i \cdot \sin(k\theta))\right) \cdot (\rho (\cos\theta + i \cdot \sin\theta)) =$$

$$\rho^{k+1} \left(\underbrace{\cos(k\theta)\cos\theta - \sin\theta\sin(k\theta)} + i \cdot \left(\underbrace{\cos k\theta \sin\theta + \sin k\theta \cos\theta}\right)\right) =$$

$$\rho^{k+1} (\cos((k+1)\theta) + i \cdot \sin((k+1)\theta))$$

Exercício 12.
Prove que

a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \qquad \forall m, n \in \mathbb{N};$

b) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}, \qquad \forall m, n \in \mathbb{N}.$

Solução 12.
Base: $n = 0$

$$a^m \cdot a^0 \stackrel{def}{=} a^m \cdot 1 = a^{m+0} = a^m$$

Hipótese: $n = k > 0$

$$a^m \cdot a^k = a^{m+k}; k \in \mathbb{Z}$$

Passo: $n = k + 1$

$$a^m \cdot a^{k+1} = a^m \cdot \left(a^k \cdot a^1\right) = \left(a^m \cdot a^k\right) \cdot a^1 = a^{m+k} \cdot a^1 \stackrel{def}{=} a^{m+k+1}$$

Base: $n = 0$

$$(a^m)^0 \overset{\text{def}}{=} 1 = a^{m \cdot 0} = a^0$$

Hipótese: $n = k > 0$

$$(a^m)^k = a^{m \cdot k}; k \in \mathbb{Z}$$

Passo: $n = k + 1$

$$(a^m)^{k+1} = (a^m)^k \cdot (a^m)^1 = a^{m \cdot k} \cdot a^m = a^{m \cdot k + m} = a^{m(k+1)}$$

Exercício 13.
Prove que $x - y$ divide $x^n - y^n$, para quaisquer inteiros x, y distintos e todo $n \geqslant 1$.

Solução 13.
Base: $n = 1$

$$x^1 - y^1 = x - y = 1 \cdot (x - y)$$

Hipótese: $n = k > 1$

$$x^k - y^k = t\,(x - y)\,; t \in \mathbb{Z}$$

Passo: $n = k + 1$

$$\begin{aligned}
x^{k+1} - y^{k+1} &= x \cdot x^k - y \cdot y^k \\
&= x \cdot x^k - x \cdot y^k + x \cdot y^k - y \cdot y^k \\
&= x\left(x^k - y^k\right) + y^k\,(x - y) \\
&= x \cdot t\,(x - y) + y^k\,(x - y) \\
&= (x - y)\left(xt + y^k\right) \\
&= (x - y)\,q; \quad q \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Exercício 14.
Para todo inteiro $n \geqslant 1$, prove que

a) $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \dfrac{x^n}{1-x}$;

b) $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ (*Dica:* use o item anterior).

Solução 14.

a) *Base*: $n = 1$

$$1 + \frac{x}{1-x} = \frac{1 - x + x}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

Hipótese: $n = k > 1$

$$1 + x + \cdots + x^{k-1} + \frac{x^k}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$1 + x + \cdots + x^{k-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^k}{1-x}$$

Passo: $n = k + 1$

$$\begin{aligned} 1 + x + \cdots + x^{k-1} + x^k + \frac{x^{k+1}}{1-x} &= \frac{1}{1-x} - \frac{x^k}{1-x} + x^k + \frac{x^{k+1}}{1-x} \\ &= \frac{1 - x^k + x^k(1-x) + x^{k+1}}{1-x} \\ &= \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

b) Para $x = 2$, temos:

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = \frac{1}{1-2} - \frac{2^n}{1-2} = -1 - \frac{2^n}{-1} = 2^n - 1$$

Exercício 15.
Seja n um inteiro positivo. Mostre que

$$\text{a)} \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0; \qquad \text{b)} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Solução 15.

a)

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \cdots + \binom{n}{n-1} x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 y^n$$

Trocando $x = 1$ e $y = -1$, temos:

$$\begin{aligned} (1-1)^n &= \binom{n}{0} 1^n (-1)^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} (-1)^1 + \cdots + \binom{n}{n-1} 1^1 (-1)^{n-1} + \binom{n}{n} 1^0 (-1)^n \\ 0^n &= \binom{n}{0} (-1)^0 + \binom{n}{1} (-1)^1 + \cdots + \binom{n}{n-1} (-1)^{n-1} + \binom{n}{n} (-1)^n \\ 0 &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \end{aligned}$$

b)

$$(x+1)^{2n} = (x+1)^n (1+x)^n$$

Desenvolvendo cada binômio separadamente, temos:

$$\begin{aligned} (1+x)^{2n} &= \binom{2n}{0} x^{2n} + \binom{2n}{1} x^{2n-1} + \cdots + \binom{2n}{n} x^n + \cdots + \binom{2n}{2n-1} x^1 + \binom{2n}{2n} x^0 \\ (x+1)^n &= \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} x^1 + \binom{n}{n} x^0 \\ (1+x)^n &= \binom{n}{0} x^0 + \binom{n}{1} x^1 + \cdots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} + \binom{n}{n} x^n \end{aligned}$$

Ao multiplicarmos os dois últimos, obtemos um polinômio equivalente ao primeiro:

$$\binom{2n}{0}x^{2n} + \binom{2n}{1}x^{2n-1} + \cdots + \binom{2n}{n}x^{n} + \cdots + \binom{2n}{2n-1}x^{1} + \binom{2n}{2n}x^{0} \equiv$$

$$\left[\binom{n}{n}\cdot\binom{n}{0}\right]x^0 + \cdots + \left[\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2\right]x^n + \cdots + \left[\binom{n}{0}\cdot\binom{n}{n}\right]x^{2n}$$

Note que o coeficiente de x^n nos dois polinômios devem ser iguais. Assim:

$$\left[\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2\right] = \binom{2n}{n}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Exercício 16.
Prove por indução finita que

(a)
$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24} \qquad (n > 1),$$

(b)
$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{9}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n} \qquad (n > 1),$$

(c)
$$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \cdots + n\cdot n! = (n+1)! - 1,$$

(d)
$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1},$$

para todo inteiro positivo n.

Solução 16.
a) *Base*: $n = 2$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{14}{24} > \frac{13}{24}$$

Hipótese: $n = k > 2$

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}$$

Passo: $n = k + 1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} &> \frac{13}{24} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{13}{24} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \\ &> \frac{13}{24} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{2k+2} = \frac{13}{24}.\end{aligned}$$

b) *Base*: $n = 2$

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2 \cdot 2}$$

Hipótese: $n = k > 2$

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{k+1}{2k}$$

Passo: $n = k + 1$

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) &= \frac{k+1}{2k} \cdot \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \\
&= \frac{k+1}{2k} \cdot \left(\frac{(k+1)^2 - 1}{(k+1)^2}\right) \\
&= \frac{k+1}{2k} \cdot \left(\frac{k^2 + 2k}{(k+1)^2}\right) \\
&= \frac{(k+2)}{2\,(k+1)}.
\end{aligned}$$

c) *Base*: $n = 1$

$$1 \cdot 1! = 1$$

$$(1+1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1$$

Hipótese: $n = k > 1$

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + k \cdot k! = (k+1)! - 1$$

Passo: $n = k + 1$

$$\begin{aligned}
1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + k \cdot k! + (k+1)\,(k+1)! &= (k+1)! - 1 + (k+1)\,(k+1)! \\
&= (k+1)!\,(1 + k + 1) - 1 \\
&= (k+2)\,(k+1)! - 1 = (k+2)! - 1.
\end{aligned}$$

d) *Base*: $n = 1$

$$\frac{1}{1 \cdot (1+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$$

Hipótese: $n = k > 1$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

Passo: $n = k + 1$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k\,(k+1)} + \frac{1}{(k+1)\,(k+2)} &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)\,(k+2)} \\
&= \frac{k\,(k+2) + 1}{(k+1)\,(k+2)} \\
&= \frac{\left(k^2 + 2k + 1\right)}{(k+1)\,(k+2)} \\
&= \frac{(k+1)^2}{(k+1)\,(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.
\end{aligned}$$

Exercício 17.

(a) Sejam
$$a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1},$$
para todo $n > 1$ com $a_0 = 2$ e $a_1 = 3$. Mostre que
$$a_n = 2^n + 1,$$
para todo $n \geqslant 0$.

(b) Sejam
$$b_{n+1} = 3b_n - 2b_{n-1},$$
para todo $n > 1$ com $b_0 = 0$ e $b_1 = 1$. Mostre que
$$b_n = 2^n - 1,$$
para todo $n \geqslant 0$.

(c) Sejam
$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1},$$
para todo $n > 1$ com $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$. Mostre que
$$1) \qquad F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n+1},$$
$$2) \qquad F_{n+1}F_{n+2} - F_nF_{n+3} = (-1)^n,$$
para todo n.

Solução 17.

a) *Base*:
$n = 0$:
$$2^0 + 1 = 2 = a_0$$
$n = 1$:
$$2^1 + 1 = 3 = a_1$$
Hipótese:$n \geqslant k \geqslant 1$
$$a_k = 2^k + 1$$
Passo: $n = k + 1$
$$\begin{aligned} a_{k+2} = 3a_{k+1} - 2a_k &= 3\left(2^{k+1} + 1\right) - 2\left(2^k + 1\right) \\ &= 3 \cdot 2^{k+1} + 3 - 2^{k+1} - 2 \\ &= 2 \cdot 2^{k+1} + 1 \\ &= 2^{k+2} + 1. \end{aligned}$$

b) *Base*:
$n = 0$:
$$2^0 - 1 = 0 = b_0$$
$n = 1$:
$$2^1 - 1 = 1 = b_1$$

Hipótese: $n \geqslant k \geqslant 1$

$$b_k = 2^k - 1$$

Passo: $n = k + 1$

$$\begin{aligned} b_{k+2} = 3b_{k+1} - 2b_k &= 3\left(2^{k+1} - 1\right) - 2\left(2^k - 1\right) \\ &= 3 \cdot 2^{k+1} - 3 - 2^{k+1} + 2 \\ &= 2 \cdot 2^{k+1} - 1 = 2^{k+2} - 1. \end{aligned}$$

c)

$$F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$$
$$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$$
$$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$$
$$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$$

Base: $n = 2$:

$$F_2^2 - F_3F_1 = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1 = (-1)^{2+1}$$

Hipótese: $n \geqslant k \geqslant 1$

$$F_k^2 - F_{k+1}F_{k-1} = (-1)^{k+1}$$

Passo: $n = k + 1$

$$\begin{aligned} F_{k+1}^2 - F_{k+2}F_k &= F_{k+1}^2 - (F_{k+1} + F_k)\,F_k \\ &= F_{k+1}^2 - F_k \cdot F_{k+1} - F_k^2 \\ &= F_{k+1}\,(F_{k+1} - F_k) - F_k^2 \\ &= F_{k+1}F_{k-1} - F_k^2 \\ &= -\left(F_k^2 - F_{k+1}F_{k-1}\right) \\ &= -\,(-1)^{k+1} = (-1)^{k+2}\,. \end{aligned}$$

Base: $n = 2$:

$$F_3F_4 - F_2F_5 = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = 1 = (-1)^2$$

Hipótese: $n = k$

$$F_{k+1}F_{k+2} - F_kF_{k+3} = (-1)^k$$

Passo: $n = k + 1$

$$\begin{aligned} F_{k+2}F_{k+3} - F_{k+1}F_{k+4} &= (F_k + F_{k+1})\,F_{k+3} - F_{k+1}\,(F_{k+2} + F_{k+3}) \\ &= F_kF_{k+3} + F_{k+1}F_{k+3} - F_{k+1}F_{k+2} - F_{k+1}F_{k+3} \\ &= F_kF_{k+3} - F_{k+1}F_{k+2} \\ &= -(F_{k+1}F_{k+2} - F_kF_{k+3}) \\ &= -(-1)^k = (-1)^{k+1}. \end{aligned}$$