Aula 28.04.20

Revisão 3

4. Equações Diofantinas

Lembrete: Equação diofantina

$$a \cdot x + b \cdot y = c \qquad (*)$$

tem soluções $\Longleftrightarrow$ $\underbrace{mdc(a,b)}_{=d} \mid c$.

Neste caso todas soluções tem forma

$$x = x_0 + (b/d) \cdot t, \quad y = y_0 - (a/d) \cdot t. \qquad (**)$$

onde x_0, y_0 é solução particular de $(*)$.

Exercício 1 Provar que é impossível fazer um postal de R\$ 5.00 utilizando apenas os selos postais que custam 14 e 35 centavos.

Solução. Se for possível, assim existem $x, y \in \mathbb{Z}$, tais que

$14x + 35y = 500$, mas $mdc(14,35) = 7 \nmid 500$.

Contradição.

Scanned with CamScanner

Exercício 2 Determine todos os multiplos de 38 e 34 cuja diferença é 10.

Solução. Precisamos resolver:

$$a = 38 \cdot x + \underbrace{34}_{=b} y = \underbrace{10}_{=c}$$

$\text{mdc}(38, 34) = \underbrace{2}_{=d}$ divide 10 $\Rightarrow$ há soluções

Para encontrar solução particular, vamos inventer algoritmo de Euclides

$$38 = 34 + 4 \qquad 4 = 38 - 34$$

$$34 = 8 \cdot 4 + 2 \quad \Rightarrow \quad 2 = 34 - 8 \cdot 4$$

$$34 = 2 \cdot 2 + 0 \qquad = 34 - 8 \cdot (38 - 34)$$

$$= -8 \cdot 38 + 19 \cdot 34$$

Ou seja $38 \cdot (-8) + 34 \cdot 9 = 2$,

Multiplicando por 5, vamos receber

$$38 \cdot \underbrace{(-40)}_{=x_0} + 34 \cdot \underbrace{45}_{=y_0} = 10,$$

Aplicando (**) temos

$$\underbrace{\begin{aligned} x &= -40 + \frac{34}{2} \cdot t = -40 + 17t \\ y &= 45 - \frac{38}{2} \cdot t = 45 - 19t \end{aligned}}_{\text{todas soluções.}}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

Scanned with CamScanner

Exercício 3 (Lista 3, Ex. 4).

Determine todos multiplos positivos de 11 e 9 cuja soma seja 270.

Solução Encontramos $x>0$, $y>0$, com

$$\overset{a}{11}\cdot x + \overset{b}{9}\cdot y = \overset{c}{270}$$

$\text{mdc}(11,9) = \overset{d}{1}$, 1 divide 270 $\Rightarrow$ há soluções

Vamos encontrar solução particular

$$11 = 9 + 2 \Rightarrow 2 = 11 - 9$$

$$9 = 4\cdot 2 + 1 \Rightarrow 1 = 9 - 4\cdot 2$$

$$= 9 - 4\cdot(11-9)$$

$$= 11\cdot(-4) + 9\cdot 5$$

Assim $11\cdot(-4) + 9\cdot 5 = 1$, multiplicando p/ 270

$\Rightarrow$ $11\cdot(-4)\cdot 270 + 9\cdot 5\cdot 270 = 270$, ou

$$11\cdot(\underset{x_0}{-1080}) + 9\cdot \underset{y_0}{1350} = 270$$

Aplicando (**), temos

$x = -1080 + 9\cdot t$, como $x>0 \Rightarrow$ $-1080+9t>0$ ou $t>120$

$y = 1350 - 11t$, Como $y>0 \Rightarrow$ $1350-11t>0$ ou $t<123$

Assim $\boxed{t=121} \Rightarrow x=9,\ y=19$

ou $\boxed{t=122} \Rightarrow x=18,\ y=8$ //

Scanned with CamScanner

5. Congruências

Lembrete:

$a \equiv b \pmod{n} \iff$ a, b tem mesmo resto da divisão por n.

Exercício 4 (Lista 3, Ex. 33).

Mostre que $5^n + 6^n \equiv 0 \pmod{11}$, se n é impar positivo.

Solução $5 + 6 = 11$, ou seja

$$5 \equiv -6 \pmod{11}$$

Se $n = 2m+1$ um inteiro positivo impar, assim

$$5^{2m+1} \equiv (-6)^{2m+1} = -6^{2m+1} \pmod{11}, \text{ ou}$$

$$5^n + 6^n \equiv 0 \pmod{11}.$$

Exercício 5 (L3, 37b) Mostre que $23 \mid 2^{11} - 1$

Solução

$$2^5 = 32 \equiv 9 \pmod{23}$$

$$\Rightarrow 2^{10} \equiv 81 \pmod{23}$$

$$81 \equiv 12 \pmod{23}$$

$$\Rightarrow 2^{10} \cdot 2 \equiv 12 \cdot 2 = 24 \equiv 1 \pmod{23}$$

$\Rightarrow 2^{11} - 1$ é multiplo de 23.

Scanned with CamScanner

Exercício 6 (L3, Ex. 36 b)

Determine o resto da divisão de 41^{65} por 7.

Solução $41 \equiv -1 \pmod 7$

$\Rightarrow 41^{65} \equiv (-1)^{65} = -1 \pmod 7$

$\Rightarrow$ o resto é 6 //

Exercício 7 Mostre que $9^{2n+1} + 8^{n+2}$ é múltiplo de 73 para todo n positivo.

Solução

$$9^{2n+1} = 9 \cdot 9^{2n} = 9 \cdot 81^n \equiv 9 \cdot 8^n \pmod{73}$$

$$8^{n+2} = 8^2 \cdot 8^n = 64 \cdot 8^n \equiv -9 \cdot 8^n \pmod{73}$$

$$\Rightarrow 9^{2n+1} + 8^{n+2} \equiv 9 \cdot 8^n - 9 \cdot 8^n = 0 \pmod{73} \quad //$$

Exercício 8 Encontre o resto da divisão de 3^{5555} por 80.

Solução $3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{80}$.

$5555 = 4 \cdot 1388 + 3$

$\Rightarrow 3^{4 \cdot 1388} \cdot 3^3 \equiv \underset{27}{\underset{\parallel}{3^3}} \pmod{80}$

$\boxed{\text{Resto é } 27}$ //.

Scanned with CamScanner

6. Congruências lineares

Lembrete:

$a \cdot x \equiv b \pmod{n}$ tem soluções $\iff \mathrm{mdc}(a,n) \mid b$,

neste caso tem exatamente $d = \mathrm{mdc}(a,n)$ soluções não congruentes entre si, dadas por:

$$x_0 = \frac{r \cdot b}{d},$$

$$x_1 = \frac{r \cdot b}{d} + \frac{n}{d},$$

$$\vdots$$

$$x_{d-1} = \frac{r \cdot b}{d} + \frac{(d-1) \cdot n}{d},$$

onde $d = a \cdot r + n \cdot s$.

Exercício 9 Resolve $\overset{a}{14}\, x \equiv \overset{b}{4} \pmod{\overset{n}{46}}$.

Solução. $\mathrm{mdc}(14,46) = \overset{d}{2} \mid 4 \Rightarrow$ há soluções.

Vamos encontrar r, s, tais que

$\underset{a}{14}\, r + \underset{n}{46} \cdot s = \underset{d}{2}$, invertendo algoritmo de Euclides.

Scanned with CamScanner

$46 = 14 \cdot 3 + 4$

$14 = 4 \cdot 3 + \underset{d}{2}$ $\Rightarrow$ $4 = 46 - 14 \cdot 3$

$2 = 14 - 4 \cdot 3$

$= 14 - (46 - 14 \cdot 3) \cdot 3$

$= \underset{r}{10} \cdot 14 - \underset{s}{3} \cdot 46$

Ou seja $r = 10$, assim:

$$x_0 = \frac{r \cdot b}{d} = \frac{10 \cdot 4}{2} = 20$$

$$x_1 = \frac{r \cdot b}{d} + \frac{n}{d} = \frac{10 \cdot 4}{2} + \frac{46}{2} = 20 + 23 = 43$$

Exercício 10 Resolve: $\underset{a}{25}\, x \equiv \underset{b}{15} \pmod{\underset{n}{29}}$

Solução $\text{mdc}(25, 29) = 1 \Rightarrow$ há 1 solução

$29 = 25 + 4$

$25 = 6 \cdot 4 + 1$ $\Rightarrow$ $4 = 29 - 25$

$1 = 25 - 6 \cdot 4$

$= 25 - 6 \cdot (29 - 25)$

$= 25 \cdot \underset{r}{7} - 29 \cdot 6$

$\Rightarrow x = \frac{r \cdot b}{d} = \frac{7 \cdot 15}{1} = 105$, ou $x \equiv 18 \pmod{29}$.

Exercício 11 Resolve $\underset{a}{6}\, x \equiv \underset{b}{9} \pmod{\underset{n}{21}}$

$\text{mdc}(6, 21) = \underset{d}{3} \mid 9 \Rightarrow$ há 3 soluções.

$3 = 6 \cdot \underset{r}{(-3)} + 21$ $\Rightarrow$ $x_0 = \frac{r \cdot b}{d} = \frac{-3 \cdot 9}{3} = -9 \equiv 12 \pmod{21}$

$x_1 = -9 + \frac{21}{3} = -2 \equiv 19 \pmod{21}$

Scanned with CamScanner

Exercício 12 (p/ casa).

Mostre que $3^{1000} + 3$ é multiplo de 28.

Ex. 13 (p/ casa)

Encontre o resto da divisão de 5^{1000} por 126.

Ex. 14 (p/ casa)

Mostre que $2^{5n+1} + 5^{n+2}$ é multiplo de 27 para todo n positivo.

Ex. 15 (p/ casa) Resolve

a) $21x + 49y = 7$

b) Determine todos multiplos positivos de 9 e 13 cuja soma seja 101 //.

Scanned with CamScanner