Aula [20.03.2020] ①

Equações Diofantinas

Def. "Equação Diofantina" é qualquer equação com 1 ou mais incognitas que assumirem apenas valores inteiros.

Exemplos:

a) $a \cdot x + b \cdot y = 1$, x, y - incognitas em $\mathbb{Z}$
a, b - inteiros dados

equação diofantina linear.

b) $x^n + y^n = z^n$ ⊛

Se $\boxed{n=2}$, assim ⊛ tem numero infinito das soluções; por exemplo:

$(3,4,5), (5,12,13), (6,8,10)\ldots$

Lema (Euler) Para quaisquer inteiros $n, m \in \mathbb{Z}$
$x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$, $z = m^2 + n^2$ satisfazem ⊛.

Prova $x^2 = (m^2-n^2)^2 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4$
$y^2 = 4m^2n^2$,

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 = n^4 + 2n^2m^2 + m^4 = \underset{\overset{\parallel}{z^2}}{(n^2+m^2)^2}$$

□

Obs Ultima Teorema de Ferma (annunciada em 1637 e provado em 1995) afirme que (*) não possui as soluções positivas para $n > 2$.

Equação $a \cdot x + b \cdot y = c$

Obs. Equação acima pode ter varios soluções, por exemplo se $a=3$, $b=6$, $c=18$

$$3 \cdot 4 + 6 \cdot 1 = 18$$

$$3 \cdot (-6) + 6 \cdot 6 = 18$$

$$3 \cdot 10 + 6 \cdot (-2) = 18$$

Em contrasto não há soluções da equação

$$2 \cdot x + 10 \cdot y = 17$$

Pois $2 \cdot x + 10 \cdot y$ é par e 17 é impar.

Teorema [Criterio da existencia das soluções]

Equação $a \cdot x + b \cdot y = c$ tem solução $\Longleftrightarrow$ $mdc(a, b) \mid c$

Prova

[$\Rightarrow$] Sejam $a \cdot x + b \cdot y = c$ para algums $x, y \in \mathbb{Z}$
e Seja $mdc(a,b) = d$.

$d | a$ e $d | b$ $\Rightarrow$ $d | \underbrace{a \cdot x + b \cdot y}_{= c}$ $\Rightarrow$ $d | c$.

[$\Leftarrow$] Seja $d = mdc(a,b)$. Pelo T. de Bezout
existem x_0, y_0 tais que:

$$a \cdot x_0 + b \cdot y_0 = d$$

Como $mdc(a,b) | c$, assim $c = d \cdot q$

Ou seja

$$c = d \cdot q = (a \cdot x_0 + b \cdot y_0) q = a \cdot (x_0 q) + b \cdot (y_0 q)$$

Assim $a \cdot x + b \cdot y = c$ tem solução $x = x_0 q$, $y = y_0 q$ $\blacksquare$

Teorema 1 Equação diofantina $a \cdot x + b \cdot y = c$
tem solução se e só se $mdc(a,b) | c$
Se x_0, y_0 é qualquer solução da
equação, assim todos outros soluções
são dados pelo:

$$x = x_0 + (b/d) \cdot t, \quad y = y_0 - (a/d) \cdot t$$

variando inteiro t, com $d = mdc(a,b)$.

<u>Prova.</u> Primeira parte já foi provado em Teorema 0.

Seja x_0, y_0 é qualquer solução da equação particular. Se x' e y' é uma outra solução, assim

$$a \cdot x_0 + b \cdot y_0 = c = a \cdot x' + b \cdot y'$$

$$\Rightarrow \quad a \cdot (x_0 - x') = b \cdot (y' - y_0)$$

Como $d = \text{mdc}(a, b)$, assim existem $r, s \in \mathbb{Z}$ primos entre si, tal que

$$a = d \cdot r, \quad e \quad b = d \cdot s, \quad \text{portanto}$$

$$\cancel{d} \cdot r \cdot (x_0 - x') = \cancel{d} \cdot s \, (y' - y_0)$$

$\Rightarrow \quad r \mid s \cdot (y' - y_0)$, mas $\text{mdc}(r, s) = 1$, assim $r \mid (y' - y_0)$, ou seja $y_0 - y' = r \cdot t$, para algum t

Substituindo, temos

$$r \cdot (x_0 - x') = s \, (y' - y_0) = s \cdot (-r \cdot t)$$

$\Rightarrow \quad x' - x_0 = s \cdot t$, assim

$$\begin{bmatrix} x' = x_0 + s \cdot t = x_0 + (b/d) \cdot t \\ y' = y_0 - r \cdot t = y_0 - (a/d) \cdot t \end{bmatrix}$$

Facil ver que tais x', y' satisfazem equação para todos $t \in \mathbb{Z}$, pois

$$a \cdot x' + b \cdot y' = a \cdot \left[x_0 + \frac{b}{d} \cdot t\right] + b \left[y_0 - \frac{a}{d} \cdot t\right] =$$

$$= a \cdot x_0 + \cancel{\frac{a \cdot b}{d} \cdot t} + b \cdot y_0 - \cancel{\frac{ab}{d} \cdot t} = c \qquad \square$$

Exemplo Considere equação

$$\underset{a}{2}x + \underset{b}{3}y = \underset{c}{7} \quad (**) \qquad mdc(a,b)=1$$

Para aplicar o Teorema acima basta encontrar uma solução particular da (**)

Obviamente

$$2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7, \text{ ou seja}$$

$x_0 = 2$ e $y_0 = 1$ é solução particular

Assim todos os outros soluções tem forma:

$$x = x_0 + (b/d) \cdot t = 2 + 3/1 \cdot t = 2 + 3 \cdot t, \quad t \in \mathbb{Z}$$
$$y = y_0 - (a/d) \cdot t = 1 + (-2/1) \cdot t = 1 - 2t$$

Assim $x = 2 + 3t$, $y = 1 - 2t$ todas as soluções de (**).

Exemplo Considere $\underset{a}{5} \cdot x + \underset{b}{22} \cdot y = \underset{c}{18}$

$mdc(5, 22) = 1 \mid 18 \Rightarrow$ há soluções.

Obviamente $x_0 = \boxed{8}$ e $y_0 = \boxed{-1}$ é solução particular, pois $5 \cdot \boxed{8} + 22 \cdot \boxed{-1} = 18$.

Para encontrar a solução é possível tmb aplicar o Algoritmo de Euclides. Vamos ver isso neste caso particular:

$22 = 5 \cdot 4 + 2 \longrightarrow 2 = 22 \cdot 1 - 5 \cdot 4$

$5 = 2 \cdot 2 + 1 \longleftarrow \mathrm{mdc}(22,5)$

$2 = 1 \cdot 2 + 0$

Invertendo, temos:

$$1 = 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2$$
$$= 5 \cdot 1 - (22 \cdot 1 - 5 \cdot 4) \cdot 2$$
$$= 5 \cdot 9 - 22 \cdot 2$$

Portanto $5 \cdot 9 + 22 \cdot (-2) = 1$

Multiplicando por 18 temos

$5 \cdot (9 \cdot 18) + 22 \cdot (-2 \cdot 18) = 18$, ou seja

$x_0 = 9 \cdot 18$, $y_0 = -2 \cdot 18$ é solução particular

Aplicando a formula em Teorema temos:

$$x = x_0 + \frac{b}{d} \cdot t = 9 \cdot 18 + \frac{22}{1} \cdot t = 162 + 22t$$

$$y = y_0 - \frac{a}{d} \cdot t = -2 \cdot 18 - \frac{5}{1} \cdot t = -36 - 5t$$

todas as soluções:

Exercicio (p/ casa). Encontre as ~~eq~~ soluções

da equação:

$$172x + 20y = 1000$$

Exercício 2 (p/ casa)

Um menino comprou 12 frutas (maças + laranjas). Suponha que uma maça custa 3 R$ a mais do que 1 laranja.
Quantas maças e laranjas foram compradas?

Gabarito:

12 maças, ou
8 maças + 4 laranjas, ou
4 maças + 8 laranjas, au
12 laranjas