Cálculo II — Lista 4.

1) Esboce a curva de nível de $f(x, y)$ que passa pelo ponto P e desenhe o vetor gradiente de f em P:

   (a) $f(x, y) = \dfrac{x}{y^2}$; $P = (-2, 2)$;

   (b) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$; $P = (-2, 0)$;

   (c) $f(x, y) = x^2 - y^2$; $P = (2, -1)$.

2) Em cada caso, esboce a superfície de nível c da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

   a) $F(x, y, z) = x + 2y + 3z$ e $c = 1$;

   b) $F(x, y, z) = x^2 - e^y + z^2$ e $c = 0$;

   c) $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ e $c = 0$;

   d) $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ e $c = -1$;

   e) $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ e $c = 1$;

   f) $F(x, y, z) = x^2 - y^2$ e $c = 1$.

3) Determine a derivada direcional de f no ponto P na direção do vetor $\vec{u}$:

   (a) $f(x, y) = \operatorname{sen} x \cos y$; $P = (\pi/3; -2\pi/3)$; $u = (2, 3)$;

   (b) $f(x; y) = \sqrt{xyz}$; $P = (2, -1; -2)$; $u = (1, 2, -2)$.

4) Determine a derivada direcional máxima de f no ponto P e a direção em que isto ocorre:

   (a) $f(x, y) = 3x^2 + y^2 + 4z^2$; $P = (1, 5, -2)$.

   (b) $f(x, y) = \sqrt{xy^2z^3}$; $P = (2, 2, 2)$.

5) Suponha que f é diferenciável em $(1, 2)$, com $\dfrac{\partial f}{\partial u}(1, 2) = -5$ e $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1, 2) = 10$, onde $\vec{u} = (\frac{3}{4}, -\frac{4}{5})$ e $\vec{v} = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$ Determine:

   (a) $f_x(1, 2)$;

   (b) $f_y(1, 2)$;

   (c) a derivada direcional de f em $(1, 2)$ na direção e sentido da origem.

6) Encontre a derivada direcional de $f(x, y) = x^2y^2 - xy^3 - 3y - 1$ no ponto $(2, 1)$ em direção ao ponto $(1, 1)$.

7) Mostre que a derivada direcional da função $f(x, y) = \dfrac{y^2}{x}$ em qualquer ponto da elipse $2x^2 + y^2 = 1$ na direção do vetor normal da elipse é 0.

8) Dados $z = 3xy - 4y^2$; $x = 2se^r$; $y = re^{-s}$, determine $\dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial s \partial r}$ de duas maneiras expressando z em termos de r e s;

9) Seja $f(x, y) = \begin{cases} xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2), & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

   (a) Se $f(x, y) \neq (0, 0)$, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

(b) Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c) Mostre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$

(d) O que aconteceu? Porque as derivadas mistas não são iguais?

10) Uma função $w = f(x,y,z)$ com segundas derivadas parciais contínuas que satisfaz a Equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

é chamada *harmônica*. Qual das funções abaixo são harmônicas?

(a) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$;

(b) $f(x,y) = e^x \operatorname{sen}(y) + e^y \cos(y)$;

(c) $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$.

11) Determine o maior conjunto aberto no qual $f_{xy} = f_{yx}$

(a) $f(x,y) = 4x^3y + 3x^2y$;

(b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$;

(c) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$.

12) Seja $y = \phi(x - at) + \psi(x + at)$. Mostre que $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, para todo x, onde ϕ, ψ são funções duas vezes diferenciáveis.

13) Seja $r = x\phi(x + y) + y\psi(x + y)$. Mostre que

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = 0,$$

para todo (x,y), onde ϕ, ψ são funções duas vezes diferenciáveis.