Segre Embedding

Adrian Alexander Delgado

24 de agosto de 2020

Resumo

A operação de produto entre objetos permite reunir informação sobre eles. Sua definição em geral se baseia em uma propriedade universal. Neste trabalho, faremos no caso de variedades afins e variedades projetivas. Neste último, o chamado Segre Embedding será fundamental.

1 Variedades Algébricas Afins

Seja k um corpo algebricamente fechado. Denotamos o conjunto k^n por $\mathbb{A}^n$. Ele é chamado **espaço afim n-dimensional** sobre k. Um subconjunto X de $\mathbb{A}^n_k$ é uma **variedade algébrica afim** se existem $f_1, \ldots, f_k \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tais que

$$X = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n \mid f_i(a_1, \ldots, a_n) = 0,\, 1 \leq i \leq k\}$$

Dado um subconjunto S de $k[x_1, \ldots, x_n]$, definimos $Z(S)$ como sendo o subconjunto de $\mathbb{A}^n$ consistindo dos pontos a que anulam todos os polinômios de S. Se I é o ideal gerado por S, então temos $Z(S) = Z(I)$. Como $k[x_1, \ldots, x_n]$ é um anel noetheriano, segue que $Z(I)$ é uma variedade algébrica afim. Portanto, X é uma variedade algébrica afim se e somente se $X = Z(I)$ para algum ideal I de $k[x_1, \ldots, x_n]$.

Assim como em outras áreas da Matemática, além de estarmos interessados em estudar os objetos, queremos entender como eles se relacionam. Assim, precisamos definir mapas (morfismos) entre estes objetos.

Como as variedades algébricas afins estão diretamente ligadas a polinômios, a seguinte definição é razoável.

Definição 1. Sejam $V \subseteq \mathbb{A}^n$ e $W \subseteq \mathbb{A}^m$ duas variedades algébricas afins. Uma função $\varphi : V \to W$ é um **morfismo** se existem $p_1, \ldots, p_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tais que

$$\varphi(a_1, \ldots, a_n) = (p_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, p_m(a_1, \ldots, a_n))$$

para todo $(a_1, \ldots, a_n) \in V$.

Ou seja, um morfismo entre variedades algébricas afins é simplesmente a restrição de um mapa polinomial entre os espaços ambientes.

Nós sabemos que a coleção das variedades algébricas afins satisfazem as propriedades dos fechados de uma topologia. Esta topologia é chamada **topologia de Zariski**. Devido ao caráter polinomial dos morfismos, temos o seguinte resultado

Proposição 1. Sejam $V \subseteq \mathbb{A}^n$ e $W \subseteq \mathbb{A}^m$ variedades algébricas afins. Então, um morfismo $\varphi : V \to W$ é um mapa contínuo, considerando V e W com as topologias induzidas pelas topologias de Zariski de $\mathbb{A}^n$ e $\mathbb{A}^m$, respectivamente.

Demonstração. É suficiente mostrar que $\varphi^{-1}(X)$ é fechado em V se X é fechado em W. Como W é fechado em $\mathbb{A}^n$, X também é fechado em $\mathbb{A}^n$. Seja $\Phi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ o mapa polinomial "induzido"pelo morfismo φ. Então, se $X = Z(f_1, \ldots, f_k)$ com $f_i \in k[x_1, \ldots, x_m]$, segue que

$$\Phi^{-1}(X) = Z \coloneqq Z(f_1(p_1, \ldots, p_m), \ldots, f_k(p_1, \ldots, p_m)).$$

De fato, se $a \in \Phi^{-1}(X)$, então $\Phi(a) = (p_1(a), \ldots, p_m(a)) \in X$. Daí, temos

$$f_i(p_1(a), \ldots, p_m(a)) = 0 \quad 1 \leq i \leq k$$

Ou seja, $a \in Z$. Por outro lado, se $a \in Z$, então $\Phi(a) = (p_1(a), \ldots, p_m(a))$ anula os polinômios $f_1, \ldots, f_k$. Logo, $\Phi(a) \in X$ e segue que $a \in \Phi^{-1}(X)$.

Assim, $\Phi^{-1}(X)$ é fechado e concluímos que $\varphi^{-1}(X) = V \cap \Phi^{-1}(X)$ é fechado em V. □

Um morfismo de uma variedade algébrica afim V para $k = \mathbb{A}^1$ é chamado **função regular**. Um propriedade que os morfismos satisfazem é que eles preservam funções regulares "por composição":

Proposição 2. Sejam $V \subseteq \mathbb{A}^n$ e $W \subseteq \mathbb{A}^m$ variedades algébricas afins. Seja $\varphi : V \to W$ um morfismo. Se $\alpha : W \to k$ é uma função regular, então $\alpha \circ \varphi : V \to k$ é uma função regular.

Demonstração. Seja q um polinômio tal que $\alpha(x_1, \ldots, x_m) = q(x_1, \ldots, x_m)$. Então, se o morfismo φ é composto pelos polinômios $p_1, \ldots, p_m$, i.e., se

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = (p_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, p_m(x_1, \ldots, x_n)),$$

então

$$(\alpha \circ \varphi)(x_1, \ldots, x_n) = q(p_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, p_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Como $q(p_1, \ldots, p_m)$ é um polinômio, segue que $\alpha \circ \varphi$ é uma função regular. □

De fato, as Proposições 1 e 2 nos dão uma caracterização dos morfismos.

Teorema 1. Uma função $\varphi : V \to W$ entre duas variedades algébricas afins $V \subseteq \mathbb{A}^n$ e $W \subseteq \mathbb{A}^m$ é um morfismo se e somente se ele satisfaz as seguintes propriedades:

(1) φ é um mapa contínuo (considerando V e W com as topologias de Zariski)

(2) $\alpha \circ F$ é uma função regular para toda $\alpha : W \to k$ regular.

Demonstração. Se $\varphi : V \to W$ é morfismo, segue das Proposições 1 e 2 que φ satisfaz as propriedades (1) e (2).

Reciprocamente, suponha que φ satisfaz (1) e (2). Para cada $1 \leq i \leq m$, a projeção na i-ésima coordenada $\pi_i : W \to k$ é uma função regular. Logo, $\pi_i \circ \varphi : V \to k$ é uma função regular e existe um polinômio $p_i \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tal que

$$(\pi_i \circ \varphi)(a_1, \ldots, a_n) = p_i(a_1, \ldots, a_n).$$

Portanto

$$\varphi(a_1, \ldots, a_n) = (p_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, p_m(a_1, \ldots, a_n))$$

e concluímos que φ é morfismo. □

2 Variedades Algébricas Projetivas

Novamente fixamos um corpo k algebricamente fechado. Seja $\mathbb{P}^n$ o **espaço projetivo n-dimensional** sobre k. Ele é construído da seguinte forma. Defina em $k^{n+1}\backslash\{0\}$, a seguinte relação de equivalência

$$(a_0, \ldots, a_n) \sim (b_0, \ldots, b_n) \iff \exists \lambda \in k^* \text{ tal que } a_i = \lambda b_i \quad 0 \leq i \leq n.$$

Então, $\mathbb{P}^n$ é o conjunto das classes de equivalência de $k^{n+1}\backslash\{0\}$. Ele também pode ser identificado como o conjunto das retas (i.e. subespaços de dimensão 1) que passam pela origem em k^{n+1}.

A classe de equivalência do ponto $(a_0, \ldots, a_n)$ será denotada por $(a_0 : \cdots : a_n)$.

Aqui, também temos o conceito de variedade algébrica. Porém, os polinômios utilizados para definir eles não podem ser escolhidos arbitrariamente. Seja $f(x_0, \ldots, x_n) \in k[x_0, \ldots, x_n]$. Se queremos que $(a_0 : \cdots : a_n)$ seja um "zero"de f, então devemos ter

$$f(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) = 0 \quad \forall \lambda \in k^*.$$

Agora, escreva f como

$$f = f_0 + f_1 + \cdots + f_d$$

onde f_k é um polinômio homogêneo de grau k. Eles são unicamente determinados por f e são chamados partes homogêneas. Então, temos

$$f_0(a_0, \ldots, a_n) + \lambda f_1(a_0, \ldots, a_n) + \cdots + \lambda^d f_d(a_0, \ldots, a_n) = 0 \quad \forall \lambda \in k^*.$$

Fazendo $u_k = f_k(a_0, \ldots, a_n)$, segue que o polinômio

$$u_0 + u_1 t + \cdots + u_d t^d \in k[t]$$

possui infinitas raízes, pois k é infinito. Portanto, $u_k = 0$, ou seja, $f_k(a_0, \ldots, a_n) = 0$ para cada k.

Então, reduzimos o problema a polinômios homogêneos. Neste caso, não temos ambiguidade, pois se f é homogêneo de grau d e $f(a_0, \ldots, a_n) = 0$, então

$$f(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) = \lambda^d f(a_0, \ldots, a_n) = 0 \quad \forall \lambda \in k^*$$

e podemos dizer que $(a_0 : \cdots : a_n)$ é um zero de f.

Portanto, se $(a_0 : \cdots : a_n)$ anula f, então ele anula suas partes homogêneas. Assim, fazemos a seguinte definição:

Definição 2. Um subconjunto Z de $\mathbb{P}^n$ é uma **variedade algébrica projetiva** se existem $f_1, \ldots, f_k \in k[x_0, \ldots, x_n]$ homogêneos tais que

$$Z = \{(a_0 : \cdots : a_n) \in \mathbb{P}^n \mid f_i(a_1, \ldots, a_k) = 0,\ 1 \leq i \leq k\}$$

Em geral, se $S \subseteq k[x_0, \ldots, x_n]$ é um conjunto de polinômios homogêneos, definimos $Z(S)$ como sendo o conjunto de pontos de $\mathbb{P}^n$ que anulam cada polinômio de S. Então, podemos estender a definição de $Z(S)$ para ideais gerados por polinômios homogêneos. Tais ideais são chamados **homogêneos**.

Se I é um ideal homogêneo, então ele é gerado por um conjunto S de polinômios homogêneos. Sabemos que I é finitamente gerado, logo existem $f_1, \ldots, f_k$ que geram I. Porém, não sabemos se os f_k são homogêneos. A seguinte proposição resolve o problema:

Proposição 3. Seja I um ideal homogêneo de $k[x_0, \ldots, x_n]$. Se $f \in I$, então suas partes homogêneas também estão em I.

Demonstração. Seja I um ideal homogêneo e $S \subseteq k[x_0, \dots, x_n]$ um conjunto de polinômios homogêneos geram I. Se $f \in I$, então

$$f = g_1 h_1 + \cdots + g_k h_k$$

para certos $g_1, \dots, g_k \in k[x_0, \dots, x_n]$ e $h_1, \dots, h_k \in S$. Se $d \geq 0$, então a componente de grau d de f será igual a

$$f_d = \sum_{0 \leq i \leq k, \deg h_i \leq d} b_i h_i$$

onde cada h_i tem grau d_i menor ou igual que d e b_i é a componente de grau $d - d_i$ de g_i.

Portanto, $f_d \in I$ e segue que todas as partes homogêneas de f estão em I. □

Portanto, as partes homogêneas de cada f_k geram I e concluímos que $Z \subseteq \mathbb{P}^n$ é uma variedade algébrica projetiva se e somente se $Z = Z(I)$ para I ideal homogêneo.

Assim, como no caso de variedades algébricas afins, queremos definir morfismos entre variedades algébricas projetivas. Uma primeira tentativa seria imitar a definição no caso afim, ou seja, definir um morfismo $\varphi : V \to W$ entre as variedades projetivas $V \subseteq \mathbb{P}^n$ e $W \subseteq \mathbb{P}^m$, fornecendo uma lista de polinômios $p_1, \dots, p_m$. Para isso, eles precisam ser homogêneos e também de mesmo grau, pois neste caso

$$(p_1(\lambda a) : \cdots : p_m(\lambda a)) = (\lambda^d p_1(a) : \cdots : \lambda^d p_m(a)) = (p_1(a) : \cdots : p_m(\lambda a)) \quad \forall a \in V, \lambda \in k^*$$

Porém, temos um problema. Há a possibilidade de existir um ponto $p \in V$ que anule todos os p_i, o que não nos dá um ponto válido, pois não existe $(0 : \cdots : 0)$ em $\mathbb{P}^m$. De fato, o conjuntos dos pontos que não anulam todos os polinômios p_i formam um aberto de $\mathbb{P}^n$. Logo, a função

$$\varphi : (a_0 : \cdots : a_n) \mapsto (p_1(a_0, \dots, a_n) : \cdots : p_m(a_0, \dots, a_n))$$

está definida em um aberto de V. Então, para podermos cobrir todo o V precisamos de mais funções como acima. Assim, temos a seguinte definição:

Definição 3. Sejam $V \subseteq \mathbb{P}^n$ e $W \subseteq \mathbb{P}^m$ variedades algébricas projetivas. Uma função $\varphi : V \to W$ é um **morfismo** se existe uma cobertura aberta $\{U_i\}_{i \in I}$ e uma função $f_i : U_i \to W$ para cada $i \in I$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) Para cada $i \in I$, existem polinômios homogêneos de mesmo grau $p_1, \dots, p_m$ tais que

$$f_i(a_0 : \cdots : a_n) = (p_1(a_0, \dots, a_n) : \cdots : p_m(a_0, \dots, a_n)) \quad \forall (a_0 : \cdots : a_n) \in V$$

(ii) Se $i, j \in I$ são tais que $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, então $f_i(a) = f_j(a)$ para todo $a \in U_i \cap U_j$.

Definimos uma função regular $\alpha : V \to k$ de maneira análoga à acima.

3 Uma breve passagem pelas categorias

Como dissemos na primeira seção, é importante entender os objetos e como eles se relacionam. A definição seguinte nos dá uma maneira precisa de enunciar essa ideia:

Definição 4. Uma **categoria** $\mathcal{C}$ consiste em:

- Uma coleção $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ cujos elementos são chamados **objetos** de $\mathcal{C}$.

- Para cada para (A, B) de objetos de $\mathcal{C}$, um conjunto de **morfismos** denotado por $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$. Um elemento f será denotado frequentemente por $f : A \to B$.

Para cada tripla de objetos X, Y, Z de $\mathcal{C}$, existe uma lei de composição

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) &\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ (f, g) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) Para cada $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, existe um elemento $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ chamado **morfismo identidade** tal que pra quaisquer $Y, Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, temos

$$f \circ \mathrm{id}_X = f \quad \text{e} \quad \mathrm{id}_X \circ g = g$$

para quaisquer $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ e $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$.

(ii) Para toda quádrupla de objetos X, Y, Z, W vale a associatividade

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

para quaisquer $f \in h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ e $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W)$.

Alguns exemplos de categorias são:

- Grp - os objetos são os grupos e os morfismos são os homomorfismos.
- Top - os objetos são os espaços topológicos e os morfismos são os mapas contínuos.
- $R-$Mod - os objetos são os R-módulos, com R anel, e os morfismos são os mapas R-lineares.

Os exemplos mais importantes aqui serão: a categoria das variedades algébricas afins onde os morfismos são aqueles descritos na Definição 1 e a categoria das variedades algébricas projetivas como morfismos como na Definição 3.

Uma construção que terá destaque neste trabalho é o produto de dois objetos. Vamos usar como exemplo, a categoria Sets dos conjuntos. Se A e B são dois conjuntos, o produto de A e B é simplesmente o produto cartesiano

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}$$

Porém, poderíamos chamar de produto o conjunto

$$A|B = \{a|b : a \in A,\ b \in B\}$$

De fato, existe uma correspondência evidente entre $A \times B$ e $A|B$. Assim, queremos uma definição intrínseca de produto. Ele de certa forma reúne os conjuntos A e B, no seguinte sentido: Se temos duas funções $f : C \to A$ e $g : C \to B$, então podemos juntá-las em uma única função $f \times g : C \to A \times B$. Reciprocamente, se temos uma função $h : C \to A \times B$, obtemos naturalmente duas funções $h_A : C \to A$ e $h_B : C \to B$, "projetando" $A \times B$ em A e B respectivamente.

Segue abaixo a definição de produto:

Definição 5. Sejam A e B dois objetos de uma categoria $\mathcal{C}$. Uma tripla (P, π_A, π_B), onde P é um objeto e $\pi_A : P \to A$, $\pi_B : P \to B$ são morfismos, é chamada **produto** de A e B se satisfaz a seguinte propriedade universal:

Dado um objeto X e morfismos $\alpha : X \to A$ e $\beta : Y \to B$, existe um único morfismo $\theta : X \to P$ tal que $\alpha = \pi_A \circ \theta$ e $\beta = \pi_B \circ \theta$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, dashed, "\theta"] \arrow[drr, bend left, "\beta"] \arrow[ddr, bend right, "\alpha"'] & & \\ & P \arrow[r, "\pi_B"'] \arrow[d, "\pi_A"] & B \\ & A & \end{tikzcd}$$

É claro que podem existir vários produtos de A e B (isto quando existir algum). Porém, eles são essencialmente os mesmos:

Proposição 4. Sejam A, B objetos de uma categoria $\mathcal{C}$. Se (P, π_A, π_B) e (Q, ρ_A, ρ_B) são produtos de A e B, então existe um único isomorfismo (morfismo que possui inverso) $\theta : P \to Q$ tal que $\rho_A = \pi_A \circ \theta$ e $\rho_B = \pi_B \circ \theta$.

Assim, todos os produtos são (unicamente) isomorfos e podemos nos referir a um deles como sendo "o" produto de A e B.

4 Produto de Variedades Algébricas

Com a definição de produto em mãos, vamos aplicá-la às nossas categorias. No caso de variedades algébricas afins, a definição é bem simples

Proposição 5. Sejam $V \subseteq \mathbb{A}^n$ e $W \subseteq \mathbb{A}^m$ variedades algébricas afins. Então, $V \times W \subseteq \mathbb{A}^{n+m}$ é uma variedade algébrica afim. Além disso, se $\pi_V : V \times W \to V$ é a projeção nas primeiras n coordenadas e $\pi_W : V \times W \to W$ é a projeção nas últimas m coordenadas, então $(V \times W, \pi_V, \pi_W)$ é o produto de V e W dentro da categoria das variedades algébricas afins.

Demonstração. Sejam $f_1, \ldots, f_r \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tais que $V = Z(f_1, \ldots, f_r)$ e $g_1, \ldots, g_s \in k[y_1, \ldots, y_m]$ tais que $W = Z(g_1, \ldots, g_s)$. Então, o subconjunto $V \times W \subseteq \mathbb{A}^{n+m}$ é exatamente o conjunto de zeros do conjunto $\{f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s\}$ identificado em $k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$. Logo, $V \times W$ é uma variedade algébrica afim.

É evidente que os mapas π_V e π_W são morfismos. Resta mostrar que a tripla $(V \times W, \pi_V, \pi_W)$ é de fato o produto de V e W.

Seja $Z \subseteq \mathbb{A}^l$ uma variedade algébrica afim com morfismos $\rho_V : Z \to V$ e $\rho_W : Z \to W$. Então, existem polinômios $p_1, \ldots, p_n$ e $q_1, \ldots, q_m$ tais que

$$\rho_V(x_1, \ldots, x_l) = (p_1(x_1, \ldots, x_l), \ldots, p_n(x_1, \ldots, x_l))$$

e

$$\rho_W(x_1, \ldots, x_l) = (q_1(x_1, \ldots, x_l), \ldots, q_m(x_1, \ldots, x_l))$$

Se $\theta : Z \to V \times W$ é tal que $\pi_V \circ \theta = \rho_V$ e $\pi_W \circ \theta = \rho_W$ então devemos ter

$$\theta(x_1, \ldots, x_l) = (p_1(x_1, \ldots, x_l), \ldots, p_n(x_1, \ldots, x_l), q_1(x_1, \ldots, x_l), \ldots, q_m(x_1, \ldots, x_l))$$

E isto é de fato um morfismo. □

No caso de variedades algébricas projetivas, o procedimento acima não é possível. De fato, não há uma identificação imediata de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ em algum espaço projetivo. A seguinte e última seção apresenta uma maneira de resolver esta situação.

5 Segre Embedding

O chamado Segre Embedding é uma maneira de identificar o produto de dois espaços projetivos dentro de um espaço projetivo. A definição é dada a seguir:

Definição 6. Sejam $n, m \geq 1$ inteiros. O mergulho de Segre ou Segre Embedding é definido por

$$\begin{aligned} \sigma_{n,m} : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m &\to \mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1} \\ ((x_0 : \cdots : x_n), (y_0 : \cdots : y_m)) &\mapsto (z_{ij})_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m} \end{aligned}$$

onde $z_{ij} = x_i y_j$.

Uma das propriedades de $\sigma_{m,n}$ é dada pela seguinte

Proposição 6. A imagem $\sigma_{n,m}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \subseteq \mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}$ é uma variedade algébrica projetiva definida pelas equações

$$z_{ij} z_{kl} - z_{il} z_{kj} = 0 \quad 0 \leq i, k \leq n, 0 \leq j, l \leq m.$$

Demonstração. Seja $\Sigma \subseteq \mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}$ a variedade algébrica projetiva definida pelos polinômios acima. Então, é claro que $\sigma_{n,m}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \subseteq \Sigma$. Vamos mostrar a outra inclusão e isto finaliza a demonstração.

Seja $(a_{ij}) \in \Sigma$. Então, existem $0 \leq i_0 \leq n$ e $0 \leq j_0 \leq m$ tais que $a_{i_0 j_0} \neq 0$. Assim, podemos supor que $a_{i_0 j_0} = 1$ e temos que

$$a_{il} = a_{il} a_{i_0 j_0} = a_{i j_0} a_{i_0 l} \quad 0 \leq i \leq n,\ 0 \leq l \leq m.$$

Daí, concluímos que

$$(a_{ij}) = \sigma_{n,m}((a_{0 j_0} : \cdots : a_{n j_0}), (a_{i_0 0} : \cdots : a_{i_0 m})).$$

□

Denotamos $\sigma_{n,m}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$ por $\Sigma_{n,m}$ e chamamos de uma **variedade de Segre**.

Para cada $0 \leq k \leq n$, temos o seguinte aberto de $\Sigma_{n,m}$:

$$U_k = \{(z_{ij}) \in \Sigma_{n,m} \mid (z_{0k}, \ldots, z_{nk}) \neq (0, \ldots, 0)\}$$

e uma função $\varphi_k : U_k \to \mathbb{P}^n$ dada por $\varphi_k((z_{ij})) = (z_{0k} : \cdots : z_{nk})$. É fácil verificar que os φ_k constituem um morfismo $\pi_n : \Sigma_{n,m} \to \mathbb{P}^n$ chamado projeção em $\mathbb{P}^n$.

De maneira análoga, para $0 \leq k \leq m$, temos o aberto

$$V_k = \{(z_{ij}) \in \Sigma_{n,m} \mid (z_{k0}, \ldots, z_{km}) \neq (0, \ldots, 0)\}$$

e uma função $\psi_k : V_k \to \mathbb{P}^m$ dada por $\psi_k((z_{ij})) = (z_{k0} : \cdots : z_{km})$. Os morfismos ψ_k constituem um morfismo $\pi_m : \Sigma_{n,m} \to \mathbb{P}^m$ chamado projeção em $\mathbb{P}^m$.

Proposição 7. $\sigma_{n,m} : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \Sigma_{n,m}$ é uma bijeção com inversa dada por

$$\tau((z_{ij})) = (\pi_n((z_{ij})), \pi_m((z_{ij})))$$

Demonstração. Já sabemos pela proposição anterior que $\sigma_{n,m} : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \Sigma_{n,m}$ é sobrejetor. Assim, é suficiente mostrar que $\tau \circ \sigma_{n,m}$ é a identidade de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$.

Sejam $x = (x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n$ e $y = (y_0 : \cdots : y_m) \in \mathbb{P}^m$. Então

$$\sigma_{n,m}(x, y) = (a_{ij})_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m}$$

onde $a_{ij} = x_i y_j$. Sabemos que existem $0 \leq i_0 \leq n$ e $0 \leq j_0 \leq m$ tais que x_{i_0} e y_{j_0} são diferentes de zero. Assim, segue que

$$\pi_n((a_{ij})) = (a_{0j_0} : \cdots : a_{nj_0}) = (x_0 y_{j_0} : \cdots : x_n y_{j_0}) = x$$

e

$$\pi_m((a_{ij})) = (a_{i_0 0} : \cdots : a_{i_0 m}) = (x_{i_0} y_0 : \cdots : x_{i_0} y_m) = y.$$

Portanto, $\tau(\sigma(x, y)) = (x, y)$. □

E finalmente:

Proposição 8. Sejam $V \subseteq \mathbb{P}^n$ e $W \subseteq \mathbb{P}^m$ variedades algébricas projetivas. Então, $\sigma_{n,m}(V \times W) \subseteq \mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}$ é uma variedade algébrica projetiva. Além disso, se π_V e π_W são as restrições de π_n e π_m, respectivamente, à $\sigma_{n,m}(V \times W)$, a tripla $(\sigma_{m,n}(V \times W), \pi_V, \pi_W)$ é o produto de V e W na categoria das variedades algébricas projetivas.

Demonstração. Primeiro, vamos provar que $\sigma_{n,m}(V \times W) \subseteq \mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}$ é uma variedade algébrica projetiva. Para isto é suficiente mostrar que $\sigma_{n,m} : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \Sigma_{n,m}$ é um mapa "aberto", i.e., que se $A \subseteq \mathbb{P}^n$ e $B \subseteq \mathbb{P}^m$ são abertos, então $\sigma_{n,m}(A \times B)$ é aberto em $\Sigma_{n,m}$.

De fato, isto implica que se $V \subseteq \mathbb{P}^n$ e $W \subseteq \mathbb{P}^m$ são variedades algébricas projetivas, então pela Proposição 7, temos a seguinte união disjunta:

$$\Sigma_{n,m} = \sigma_{n,m}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) = \sigma_{n,m}(V \times W) \cup U$$

onde $U = \sigma_{n,m}((\mathbb{P}^n \backslash V) \times \mathbb{P}^m) \cup \sigma_{n,m}(\mathbb{P}^n \times (\mathbb{P}^m \backslash W))$. Daí, teríamos que U é aberto em $\Sigma_{n,m}$ e concluímos que $\sigma_{n,m}(V \times W)$ é fechado em $\Sigma_{n,m}$, e o resultado segue.

Seja $(x, y) \in A \times B$. Então, existem $F \in k[X_0, \ldots, X_n], G \in k[Y_0, \ldots, Y_m]$ polinômios homogêneos tais que

$$x \in D(F) \subseteq A \quad \text{e} \quad y \in D(G) \subseteq B,$$

onde $D(F), D(G)$ são os complementares de $Z(F)$ e $Z(G)$, respectivamente. Suponha sem perda de generalidade que $x = (x_0 : \cdots : x_n)$ e $y = (y_0 : \cdots : y_m)$ com $x_0, y_0 \neq 0$. Então, podemos diminuir os abertos e tomar $D(X_0 F)$ e $D(Y_0 G)$ em vez de $D(F)$ e $D(G)$.

Afirmamos que o aberto

$$D = D(T_{00} F(T_{00}, \ldots, T_{n0}) G(T_{00}, \ldots, T_{0m})) \cap \Sigma_{n,m}.$$

está contido em $\sigma_{n,m} = (D(X_0 F) \times D(Y_0 G))$. Se $(z_{ij}) \in D$, então temos

$$z_{00}, F(z_{00}, \ldots, z_{n0}), G(z_{00}, \ldots, z_{0m}) \neq 0$$

Daí, segue que

$$\sigma_{n,m}^{-1}((z_{ij})) = (\pi_n((z_{ij})), \pi_m((z_{ij}))) = ((z_{00} : \cdots : z_{0m}), (z_{00}, \ldots, z_{0m}))$$

e isto implica que $(z_{ij}) = \sigma_{n,m}(x, y)$ com $x \in D(X_0F)$ e $y \in D(Y_0G)$. Portanto, $\sigma_{n,m}(A \times B)$ é aberto em $\Sigma_{n,m}$.

Como π_n, π_m são morfismos, suas restrições à $\sigma_{n,m}(V \times W)$ também serão morfismos. E finalmente, vamos provar que a tripla $(\sigma_{n,m}(V \times W), \pi_V, \pi_W)$ satisfaz a propriedade universal de produto.

Seja $Z \subseteq \mathbb{P}^l$ uma variedade algébrica com morfismos $\alpha : Z \to V$ e $\beta : Z \to W$. Então, existem coberturas abertas $\{A_i\}_{i\in I}, \{B_j\}_{j\in J}$ de Z tais que:

- Existem polinômios homogêneos de mesmo grau $p_{i,0}, \ldots, p_{i,n}$ tais que

$$\alpha(a_0 : \cdots : a_l) = (p_{i,0}(a_0, \ldots, a_l) : \cdots : p_{i,n}(a_0, \ldots, a_l)) \quad \forall (a_0 : \cdots : a_l) \in A_i.$$

- Existem polinômios homogêneos de mesmo grau $q_{j,0}, \ldots, q_{j,m}$ tais que

$$\alpha(a_0 : \cdots : a_l) = (q_{j,0}(a_0, \ldots, a_l) : \cdots : q_{j,m}(a_0, \ldots, a_l)) \quad \forall (a_0 : \cdots : a_l) \in B_j.$$

Assim, se $\theta : W \to \sigma_{n,m}(V \times W)$ é tal que $\pi_V \circ \theta = \alpha$ e $\pi_W \circ \theta = \beta$, devemos ter:

$$\begin{aligned} \theta(a_0 : \cdots : a_l) &= \tau^{-1}(\pi_V(\alpha(a_0 : \cdots : a_l)), \pi_W(\beta(a_0 : \cdots : a_l))) \\ &= \sigma_{n,m}(\alpha(a_0 : \cdots : a_l), \beta(a_0 : \cdots : a_l)) \\ &= (p_{i,r}(a_0 : \cdots : a_l) q_{j,s}(a_0 : \cdots : a_l))_{0\leq r\leq n, 0\leq s\leq m} \end{aligned}$$

para $(a_0 : \cdots : a_l) \in U_i \cap V_j$. Isto nos dá uma coleção de mapas compatíveis que nos dá um morfismo.

□

Referências

[1] Joe Harris. *Algebraic Geometry: A First Course*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York, 1992.

[2] Mathematics and Such. *Commutative Algebra 53 - Graded Modules*. URL: `https://mathstrek.blog/2020/05/11/commutative-algebra-53/`. (Acesso em 07-08-2020).

[3] Mathematics and Such. *Commutative Algebra 64 - Segre Embedding*. URL: `https://mathstrek.blog/2020/05/30/commutative-algebra-64/`. (Acesso em 12-07-2020).