O funtor Tor

Priscila Almeida

8 de julho de 2020

1 Uma Motivação da Topologia Algébrica

A Topologia Algébrica é a disciplina matemática que estuda as correspondências da forma

Objetos Geométicos $\longrightarrow$ Estruturas Algébricas.

O principal exemplo são as teorias de homologia. *Grosso modo*, uma teoria de homologia nada mais é do que uma coleção de funtores:

$$H_n : Top \longrightarrow Ab, \quad n \in \mathbb{Z},$$

onde Top indica a categoria usual dos espaços topológicos e Ab indica a categoria usual dos grupos abelianos. Os funtores H_n devem satisfazer certas propriedades que capturam "informações geométricas". De um modo geral, uma teoria de homologia interpreta algebricamente construções e operações que são capitais na geometria.

Exemplo 1.1. Suponha que X é um espaço topológico e $U, V \subset X$ são dois abertos tais que $X = U \cup V$. Nas teorias de homologia, o recobrimento aberto acima resulta numa sequência exata longa da forma:

$$... \to H_{i+1}(X) \to H_i(U \cap V) \to H_i(U) \oplus H_i(V) \to H_i(X) \to ...$$

chamada sequência longa de Mayer-Vietoris. Logo, o fato geomético que o espaço X é recoberto pelos abertos U e V é traduzido algebricamente como exatidão da sequência de Mayer-Vietoris.

Exemplo 1.2. Uma outra construção importante em geometria, a qual o funtor Tor está intimamente ligado, é o produto. Se X e Y são dois espaços topológicos, dispomos do espaço $X \times Y$ com as respectivas flechas de projeção na primeira e na segunda coordenada:

$$pr_X : X \times Y \to X, \qquad pr_Y : X \times Y \to Y.$$

Nas teorias de homologia, o produto induz uma sequência exata curta da forma:

$$0 \to \bigoplus_{p+q=n} H_p(X) \otimes H_q(Y) \to H_n(X \times Y) \to \bigoplus_{p+q=n} Tor_1(H_p(X), H_{q-1}(Y)) \to 0.$$

Essa sequência exata é muito importante na Topologia Algébrica, pois ela permite calcular os grupos de homologia do produto $X \times Y$ em função dos grupos de homologia de X e Y. Aqui, já aparece o grupo abeliano $Tor_1(H_p(X), H_{q-1}(Y))$, que explicaremos mais adiante, entretanto esse exemplo já mostra a pertinência desses grupos.

Os funtores de homologia H_n podem ser calulados de diversas formas. O caso mais geral e simples de apresentar é o da homologia singular. Relembremos rapidamente essa construção. Primeiro, para cada $n \geq 0$, designamos o espaço:

$$\Delta^n =_{df} \{x \in [0,1]^{n+1} : \sum_{j=0}^{n} x_j = 1\},$$

com a topologia usual induzida de $\mathbb{R}^{n+1}$, e as funções contínuas:

$$d_j^n : \Delta^n \longrightarrow \Delta^{n+1}, \quad (x_0, ..., x_n) \mapsto (x_0, ..., x_j, 0, x_{j+1}, ..., x_n)$$

onde $0 \leq j \leq n$. Dado um espaço topológico X, seja $C_n(X)$ o grupo abeliano livre gerado pelo conjunto das funções contínuas de Δ^n para X. Para cada $n \geq 0$, existe o homomorfismo de grupos:

$$\partial_{n+1}^X : C_{n+1}(X) \longrightarrow C_n(X), \quad \sigma \mapsto \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \sigma \circ d_j^n$$

e podemos verificar que $\partial_n^X \circ \partial_{n+1}^X = 0$, o que por sua vez, equivale a dizer que $Im(\partial_{n+1}^X) \subset Ker(\partial_n^X)$. Logo, podemos formar os grupos:

$$H_n(X) =_{df} Ker(\partial_n^X)/Im(\partial_{n+1}^X)$$

que são os chamados grupos de homologia singular de X. Se $f : X \to Y$ é uma função contínua, então existe um único homomorfismo de grupos abelianos:

$$f_n : C_n(X) \longrightarrow C_n(Y),$$

tal que $f_n(\sigma) = f \circ \sigma$ para toda função contínua $\sigma : \Delta^n \to X$. Além disso, os quadrados:

$$\begin{tikzcd} C_{n+1}(X) \arrow[r, "f_{n+1}"] \arrow[d, "\partial_{n+1}^X"'] & C_{n+1}(Y) \arrow[d, "\partial_{n+1}^Y"] \\ C_n(X) \arrow[r, "f_n"'] & C_n(Y) \end{tikzcd}$$

são comutativos, de modo que f induz homomorfismos de grupos abelianos:

$$H_n(f) : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$$

que são funtoriais, ou seja, $H_n(Id_X) = Id_{H_n(X)}$ e $H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f)$ sempre que o domínio de g coincidir com o codomímio de f.

Recapitulando a construção anterior, procedemos do seguinte modo: associamos a cada espaço topológico X (resp. função contínua f) um *complexo de grupos abelianos* [1] $(C_n(X), \partial_n^X)_{n\in\mathbb{Z}}$ (resp. um morfismo de complexos $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$), e calculuamos os grupos de homologia desse complexo, obtendo assim uma família de funtores H_n, $n \in \mathbb{Z}$.

O percurso:

$$\{\text{Objetos Geométicos}\} \to \{\text{Complexos}\} \to \{\text{Homologia}\}$$

é geral, ocorre em todas as teorias de homologia.

Poderíamos repetir todo o raciocínio anterior trocando os grupos abelianos por R-módulos, onde R é um anel comutativo com unidade. Nesse caso, no lugar de considerar $C_n(X)$ como sendo o grupo abeliano livre gerado pelas funções contínuas de Δ^n para X, tomariamos $C_n(X)$ como sendo o R-módulo livre gerado por esse conjunto de funções. Agora, suponha que M é um R-módulo. Partindo de um espaço topológico X, temos o complexo de R-módulos:

$$... \to C_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \to ...$$

Aplicando o funtor $(-) \otimes_R M$, deduzimos a sequência de R-módulos:

$$... \to C_{n+1}(X) \otimes_R M \xrightarrow{\partial_{n+1} \otimes 1_M} C_n(X) \otimes_R M \xrightarrow{\partial_n \otimes 1_M} C_{n-1} \otimes_R M \to ...$$

que tembém é um complexo, i.e., $Im(\partial_{n+1} \otimes 1_M) \subset Ker(\partial_n \otimes 1_M)$. Logo, podemos calcular os grupos de homologia com coeficientes em M:

$$H_n(X; M) =_{df} Ker(\partial_n \otimes 1_M)/Im(\partial_{n+1} \otimes 1_M),$$

de modo que definimos uma família de funtores da forma:

$$H_n(-; M) : Top \longrightarrow R\text{-}Mod, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

[1] A definição desse conceito será apresentada na próxima seção.

Como podemos calcular $H_n(X;M)$ em termos de $H_n(X)$? Para responder essa pergunta, invocamos novamente o funtor Tor, pois existe um teorema central na Topologia Algébrica, chamado Teorema dos Coeficientes Universais, que nos diz que para todo espaço topológico X, existe uma sequência exata curta da forma:

$$0 \to H_n(X) \otimes_R M \to H_n(X;M) \to Tor_1(H_{n-1}(X), M) \to 0,$$

o que nos permite calcular os grupos $H_n(X;M)$ em função dos grupos $H_n(X)$.

Calcular os grupos de homologia de um espaço com coeficientes num módulo arbitrário não é um capricho da generalização, esses grupos são indispensáveis para obter informações geométricas do espaço. Por exemplo, a orientabilidade de um espaço topológico X é totalmente determinada pelos grupos de homologia $H_n(X;\mathbb{Z}/2)$.

Logo, o funtor Tor aparece naturalmente na Topologia Algébrica, sendo indispensável no cálculo dos grupos de homologia. Contudo, do que se trata o funtor Tor? Considere uma sequência exata de R-módulos:

$$... \to N_{i+1} \to N_i \to N_{i-1} \to ...$$

Aplicando um funtor $F : R\text{-}Mod \to R\text{-}Mod$, produzimos o diagrama:

$$... \to F(N_{i+1}) \to F(N_i) \to F(N_{i-1}) \to ...$$

que nem sempre é uma sequência exata (por exemplo, se $F = (-) \otimes_R M$). A álgebra homológica se ocupa em "medir" o quanto a sequência exata original deixa de ser exata após aplicar um funtor F. Bem, se considerarmos um complexo $C_\bullet$ de R-módulos:

$$... \to C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \to ...$$

então, após aplicar o funtor F, dispomos do complexo $F(C_\bullet)$ dado por:

$$... \to F(C_{n+1}) \xrightarrow{F(\partial_{n+1})} F(C_n) \xrightarrow{F(\partial_n)} F(C_{n-1}) \to ...$$

e dos respectivos grupos de homologia:

$$H_n(F(C_\bullet)) = Ker(F(\partial_n))/Im(F(\partial_{n+1})).$$

A sequência definida pelo complexo $F(C_\bullet)$ é exata se, e somente se, $H_n(F(C_\bullet)) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Logo, os grupos de homologia "medem" o quanto a sequência $C_\bullet$ deixa de ser exata em cada C_n, $n \in \mathbb{Z}$, quando aplicamos o funtor F.

Neste trabalho, nós contruiremos o funtor $Tor_n(-, M)$ para um R-módulo M arbitrário. Para isto, utilizaremos o método das resoluções projetivas. Existe, contudo, uma construção mais elegante e abstrata que lança mão de métodos categoriais como *localização* e *categorias de frações*, onde a noção de funtor derivado aparece de modo mais natural. Na verdade, o funtor $Tor_n(-, M)$ não é nada mais do que o n-ésimo funtor derivado do funtor $(-) \otimes_R M$. Depois de construir $Tor_n(-, M)$ demonstramos algumas de suas propriedades mais conhecidas, bem como uma caracterização importante dos módulos planos.

2 Complexos, Homologia

Fixamos de uma vez por todas um anel R.

Definição 2.1. Um complexo X de R-módulos é uma família $(X_n, \partial_n^X)_{n\in\mathbb{Z}}$ onde para cada $n \in \mathbb{Z}$, X_n é um R-módulo, $\partial_n^X : X_n \to X_{n-1}$ é um homomorfismo de R-módulos e $\partial_n^X \circ \partial_{n-1}^X = 0$.

Termonolgia: Note que para todo complexo X, $Im(\partial_{n+1}^X) \subset Ker(\partial_n^X)$. Utilizamos sempre as notações $Z_n(X)$ e $B_n(X)$ para indicar os módulos $Ker(\partial_n^X)$ e $Im(\partial_{n+1}^X)$. Chamamos $Z_n(X)$ (resp. $B_n(X)$) de grupo dos n-ciclos (resp. n-bordos) do complexo X. Supomos sempre que $X_n = 0$ para todo $n < -1$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, definimos o n-ésimo grupo de homologia de X como sendo:

$$H_n(X) =_{df} Z_n(X)/B_n(X).$$

Se $\sigma \in X_n$, dizemos que $\partial_n(\sigma)$ é o bordo de σ. Dado um n-ciclo α, denotamos por $[\alpha]$ sua classe de equivalência em $H_n(X)$ e dizemos que $[\alpha]$ é a classe de homologia de α. Dois ciclos α e β são ditos homólogos se $[\alpha] = [\beta]$, o que por sua vez, equivale a dizer que $\alpha - \beta \in B_{n+1}(X)$, ou seja, existe $\sigma \in X_{n+1}$ tal que $\alpha - \beta = \partial_{n+1}(\sigma)$. Sempre que o contexto estiver claro, indicamos apenas por:

$$... \to X_n \to ... \to X_1 \xrightarrow{\partial_1} X_0 \xrightarrow{\partial_0} X_{-1} \to 0$$

um complexo X. Destacamos que $H_i(X) = 0$ para todo $i \leq 0$.

Daqui em diante, o termo complexo se refere sempre a um complexo de R-módulos.

Definição 2.2. Um complexo X é dito exato se $B_n(X) = Z_n(X)$ para todo $n \geq 0$.

2.3. Considere um complexo exato

$$... \to X_n \to ... \to X_1 \xrightarrow{\partial_1} X_0 \xrightarrow{\partial_0} X_{-1} \to 0.$$

Então, para todo $n > 0$ temos

$$H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X) = Z_n(X)/Z_n(X) = 0$$

e

$$H_0(X) = Z_0(X)/B_0(X) = Im(\partial_1)/Ker(\partial_0) \cong X_1/X_{-1}$$

Definição 2.4. Um morfismo de complexos $f : X \to Y$ é uma família de homomorfismos de R-módulos da forma

$$f_n : X_n \longrightarrow Y_n, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

tal que para todo n, o diagrama

$$\begin{tikzcd} X_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "\partial_n^X"'] & Y_n \arrow[d, "\partial_n^Y"] \\ X_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"'] & Y_{n-1} \end{tikzcd}$$

comuta, ou seja, $\partial_n^Y \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial_n^X$.

Uma segunda forma de ver um complexo de R-módulos é a seguinte: Considere o conjunto $\mathbb{Z}$. Podemos pensar em $\mathbb{Z}$ como sendo a categoria:

$$... \to 0 \to 1 \to 2 \to ... \to n \to ...$$

Com as notações precedentes, podemos verificar que um complexo X é um funtor da forma de $\mathbb{Z}^o$ para R-Mod. De fato, se X é um funtor desse tipo, então para cada $n \in \mathbb{Z}$ temos um R-módulo X_n e um homomorfismo $X_{n+1} \to X_n$.

Proposição 2.5. *Seja $f : X \to Y$ um morfismo de complexos. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, temos que:*

1. $f(Z_n(X)) \subset Z_n(Y)$
2. $f(B_n(X)) \subset B_n(Y)$
3. *Existe um homomorfismo de módulos*

$$H_n(f) : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y).$$

Demonstração:

1. Se $\beta \in f(Z_n(X))$, então existe $\alpha \in Z_n(X)$ tal que $\beta = f_n(\alpha)$. Logo, $\partial_n^X(\alpha) = 0$ e
$$\partial_n^Y(\beta) = \partial_n^Y(f_n(\alpha)) = f_{n-1}(\partial_n^X(\alpha)) = f_{n-1}(0) = 0,$$
o que implica a relação $\beta \in Z_n(Y)$.

2. Se $\beta \in f(B_n(X))$, então existe $\alpha \in B_n(X)$ tal que $\beta = f_n(\alpha)$. Portanto, $\alpha = \partial_{n+1}^X(\alpha')$ para algum $\alpha' \in X_{n+1}$ e
$$\beta = f_n(\alpha) = f_n(\partial_{n+1}^X(\alpha')) = \partial_{n+1}^Y(f_{n+1}(\alpha'))$$
o que implica a relação $\beta \in B_n(Y)$.

3. Devido ao item (a), existe o homomorfismo composto:
$$Z_n(X) \xrightarrow{f_n} Z_n(Y) \to H_n(Y), \quad \alpha \mapsto f_n(\alpha) \mapsto [f_n(\alpha)].$$
Pelo item (b), o homomorfismo precedente anula todo n-bordo de $Z_n(X)$. Logo, pelo Teorema do Homomorfismo, existe um único homomorfismo de R-módulos:
$$H_n(f) : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$$
de modo que o diagrama:
$$\begin{tikzcd} Z_n(X) \arrow[r, "f_n"] \arrow[d] & Z_n(Y) \arrow[d] \\ H_n(X) \arrow[r, "H_n(f)"'] & H_n(Y) \end{tikzcd}$$
comuta $(H_n(f) : [\alpha] \mapsto [f_n(\alpha)])$ $\square$

Proposição 2.6. *1. Dado um complexo X, $H_n(Id_X) = Id_{H_n(X)}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

2. Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são dois morfismos de complexos, então $H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração:

1. Pelo raciocínio apresentado da demonstração do item (3) de (2.5), $H_n(Id_X)([\alpha]) = [Id_{X_n}(\alpha)] = [\alpha] = Id_{H_n(X)}([\alpha])$ para todo $\alpha \in Z_n(X)$. Logo, $H_n(Id_X) = Id_{H_n(X)}$.

2. Pelo raciocínio apresentado da demonstração do item (3) de (2.5), $H_n(g \circ f) : H_n(X) \to H_n(Z)$ é o único homomorfismo de R-módulos tal que o diagrama:
$$\begin{tikzcd} Z_n(X) \arrow[r, "g \circ f"] \arrow[d] & Z_n(Z) \arrow[d] \\ H_n(X) \arrow[r, "H_n(g \circ f)"'] & H_n(Z) \end{tikzcd}$$
comuta. Ora, $H_n(g) \circ H_n(f) : H_n(X) \to H_n(Z)$ é um homomorfismo que faz o diagrama:
$$\begin{tikzcd} Z_n(X) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Z_n(Y) \arrow[r, "g"] \arrow[d] & Z_n(Z) \arrow[d] \\ H_n(X) \arrow[r, "H_n(f)"'] & H_n(Y) \arrow[r, "H_n(g)"'] & H_n(Z) \end{tikzcd}$$
comutar. Logo, $H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f)$ $\square$.

Teorema 2.7. *Seja:*

$$0 \to X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X'' \to 0$$

uma sequência exata curta de complexos. Então, para todo $i \in \mathbb{Z}$*, existe um homomorfismo de módulos* $\Delta_i : H_i(X'') \to H_{i-1}(X')$ *tal que a sequência longa:*

$$\begin{tikzcd}
... \arrow[r] & H_i(X') \arrow[r, "H_i(f)"] & H_i(X) \arrow[r, "H_i(g)"] & H_i(X'') \arrow[d, "\Delta_i"] \\
... & H_{i-1}(X'') \arrow[l] & H_{i-1}(X) \arrow[l, "H_{i-1}(g)"'] & H_{i-1}(X') \arrow[l, "H_{i-1}(f)"']
\end{tikzcd}$$

é exata.

Demonstração: A prova detalhada desse teorema é bem longa e trabalhosa, por isso, nos contentamos apenas em definir os homomorfismos $\Delta_i : H_i(X'') \to H_{i-1}(X')$ e indicamos [1] para uma demonstração mais completa. Com efeito, seja $\alpha''_i \in Z_i(X'')$. Como $\partial''_i(\alpha''_i) = 0$ e g_i é sobrejetor, existe $\gamma_i \in X_i$ tal que $g_i(\gamma_i) = \alpha''_i$. Logo, $g_{i-1}(\partial_i(\gamma_i)) = \partial''_i(g_i(\gamma_i)) = \partial''_i(\alpha''_i) = 0$. Ora, $Ker(g_{i-1}) = Im(f_{i-1})$ e f_{i-1} é injetor, o que implica a existência de um único $\alpha'_{i-1} \in X'_{i-1}$ tal que $f_{i-1}(\alpha'_{i-1}) = \partial_i(\gamma_i)$. Em particular, $f_{i-2}(\partial'_{i-1}(\alpha'_{i-1})) = \partial_{i-1}(f_{i-1}(\alpha'_{i-1})) = \partial_{i-1}(\partial_i(\gamma_i)) = 0$. Como f_{i-2} é injetor, $\partial'_{i-1}(\alpha'_{i-1}) = 0$, e, portanto, $\alpha'_{i-1} \in Z_{i-1}(X')$. Agora, suponha que $\overline{\gamma_i} \in X_i$ é um segundo elemento tal que $g_i(\overline{\gamma_i}) = \alpha''_i$. Nesse caso, $g_i(\overline{\gamma_i}) = g_i(\gamma_i)$, e, portanto, $\overline{\gamma_i} = \gamma_i + f_i(\gamma'_i)$ para algum $\gamma'_i \in X'_i$, de onde temos $f_{i-1}(\alpha'_{i-1} + \partial'_i(\gamma'_i)) = \partial_i(\gamma_i) + \partial_i(f_i(\gamma'_i)) = \partial_i(\gamma_i + f_i(\gamma'_i)) = \partial_i(\overline{\gamma_i})$. Logo, a substituição de γ_i por $\overline{\gamma_i}$ acarreta na sibstituição de α'_{i-1} por $\alpha'_{i-1} + \partial'_i(\gamma'_i)$, ou seja, a classe $[\alpha'_{i-1}]$ em $H_{i-1}(X')$ independe da escolha de γ_i para definir α'_i. Logo, existe o homomorfismo de R-módulos:

$$Z_i(X'') \longrightarrow H_{i-1}(X'), \quad \alpha''_i \mapsto [\alpha'_i].$$

que se fatora pela homologia, induzindo o homomorfismo desejado:

$$\Delta_i : H_i(X'') \longrightarrow H_i(X') \quad \square$$

3 Complexos, Homotopia

Na primeira seção vimos que as teorias de homologia traduzem algébricamente a geometria. Uma outra situação geométrica que a homologia singular reflete é a homotopia. Sejam X e Y dois espaços topológicos e $f, g : X \to Y$ funções contínuas. Dizemos que f é homotópica a g, e escrevemos $f \sim_{hpt} g$, se existir uma função contínua:

$$h : X \times [0,1] \longrightarrow Y$$

tal que $h(x,0) = f(x)$ e $h(x,1) = g(x)$ para todo $x \in X$. Podemos verificar que a relação $\sim_{hpt}$ é uma relação de equivalência no conjunto das funções contínuas de X para Y. Dizemos que X é homotopicamente equivalente à U, e escrevemos $X \sim Y$, se existirem funções contínuas $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ tais que $g \circ f \sim_{hpt} Id_X$ e $f \circ g \sim_{hpt} Id_Y$. Podemos verificar que a relação de equivalência homotópica é uma relação de equivalência entre espaços topológicos que é mais forte do que a homeomorfia, pois espaços homeomorfos são homotópicamente equivalentes.

Um fato capital sobre as teorias de homologia é que os grupos de homologia são invariantes homotópicos dos espaços topológicos. O que caracteriza a Topologia Algébrica, e a diferencia da Topologia Geral, é que a primeira estuda invariantes homotópicos (como a homologia) enquanto a segunda estuda invariantes por homeomorfia (como a compacidade).

Exemplo 3.1. Considere o espaço $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, onde $n \geq 1$, e a esfera $S^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$. Notamos que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ não é compacto, ao passo que S^n é compacto. Entretanto, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ é homotopicamente equivalente a S^n. Em particular, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e S^n têm os mesmos grupos de homologia, ou seja, $H_i(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong H_i(S^n)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. De fato, podemos considerar a flecha de inclusão:

$$i : S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

e a flecha de retração:
$$r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow S^n, \quad x \mapsto x/\|x\|$$
e verificar facilmente as relações:
$$r \circ i \sim_{hpt} Id_{S^n} \qquad i \circ r \sim_{hpt} Id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}.$$

O exemplo anterior ilustra como espaços que seriam muito diferentes segundo a Topologia Geral são "essencialmente o mesmo" segundo a Topologia Algébrica. Agora, sejam $f, g : X \to Y$ funções contínuas tais que $f \sim_{hpt} g$. Com as notações anteriores, dispomos dos morfismos de complexos:
$$\alpha = \{f_n : C_n(X) \longrightarrow C_n(Y) : n \in \mathbb{Z}\}$$
e
$$\beta = \{g_n : C_n(X) \longrightarrow C_n(Y) : n \in \mathbb{Z}\}.$$
Que relação entre α e β é induzida pela homotopia? A resposta para essa pergunta nos leva a noção de homotopia entre complexos.

Em (2.5) vimos que um morfismo $f : X \to Y$ de complexos de R-módulos induz homomorfismos nos grupos de homologia $H_n(f) : H_n(X) \to H_n(Y)$, $n \in \mathbb{Z}$. Quando esses homomorfismos são todos isomorfismos, a flecha f é chamada de equivalência homológica. Existe uma relação entre morfismos de complexos que assegura que eles sejam automaticamente iguais no nível da homologia: a homotopia.

Definição 3.2. Sejam $f, g : X \to Y$ morfismos de complexos. Dizemos que f é homotópico a g, e escrevemos $f \sim g$, se existir uma família de homomorfismos $s_i : X_i \to Y_{i+1}$, $i \in \mathbb{Z}$, tal que:
$$f_i - g_i = (\partial^Y_{i+1} \circ s_i) + (s_{i-1} \circ \partial^X_i).$$
Um morfismo de complexos $p : X \to Y$ é uma equivalência homotópica se existir um morfismo de complexos $r : Y \to X$ tal que $r \circ p \sim Id_X$ e $p \circ r \sim Id_Y$. Dizemos que um complexo X é homotopicamente equivalente a um complexo Y, e escrevemos $X \sim Y$, se existir uma equivalência homotópica de X para Y.

Proposição 3.3. *Se $f, g : X \to Y$ são morfismos de complexos tais que $f \sim g$, então $H_i(f) = H_i(g)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração: Com as notações do enunciado, devemos mostrar que $H_n(f)([\alpha]) = H_n(g)([\alpha])$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e para todo $\alpha \in Z_n(X)$. Com efeito, considere $n \in \mathbb{Z}$ e $\alpha \in Z_n(X)$. A hipótese que f é homotópica a g implica na existência de homomorfismos de R-módulos:
$$s_i : X_i \to Y_{i+1}, \quad i \in \mathbb{Z}$$
tais que:
$$f_i - g_i = (\partial^Y_{i+1} \circ s_i) + (s_{i-1} \circ \partial^X_i).$$
Logo,
$$\begin{aligned} H_n(f)([\alpha]) - H_n(g)([\alpha]) &= [f_n(\alpha)] - [g_n(\alpha)] \\ &= [(f_n - g_n)(\alpha)] \\ &= [(\partial^Y_{n+1} \circ s_n)(\alpha) + (s_{n-1} \circ \partial^X_n)(\alpha)] \\ &= [\partial^Y_{n+1}(s_n(\alpha)) + s_{n-1}(\partial^X_n(\alpha))] \\ &= 0, \end{aligned}$$
de onde concluímos que $H_n(f)([\alpha]) = H_n(g)([\alpha])$ $\square$

Corolário 3.4. *Complexos homotópicamente equivalentes são homológicamente equivalentes.*

Demonstração: Suponha que X e Y são dois complexos homotopicamente equivalentes. Logo, existem morfismos de complexos $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ tais que $g \circ f \sim Id_X$ e $f \circ g \sim Id_Y$. Portanto, devido à (3.3) e (2.6), temos as igualdades:

$$H_n(g) \circ H_n(f) = H_n(g \circ f) = H_n(Id_X) = Id_{H_n(X)}$$

e

$$H_n(f) \circ H_n(g) = H_n(f \circ g) = H_n(Id_Y) = Id_{H_n(Y)}$$

o que implica $H_n(X) \cong H_n(Y)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ $\square$

4 Resoluções Projetivas, Funtor Derivado

Seja L um R-módulo livre e $u : L \to M$ um morfismo de R-módulos. Se $p : N \to M$ é um homomorfismo sobrejetor de R-módulos, então existe um morfismo $\widetilde{u} : L \to N$ tal que $p \circ \widetilde{u} = u$. De fato, seja E um conjunto de geradores de L. Como p é sobrejetor, para cada $e \in E$ existe $x \in N$ tal que $p(x) = u(e)$. Logo, para cada $e \in E$, o conjunto $p^{-1}(u(e))$ é não vazio. Pelo *Axioma da Escolha*, existe pelo menos uma função:

$$c : E \longrightarrow \bigcup_{e \in E} p^{-1}(u(e)) \subset N$$

tal que $p(c(e)) = u(e)$ para todo $e \in E$. Por fim, devido a propriedade universal de módulo livre gerado por um conjunto, existe um único homomorfismo de R-módulos:

$$\widetilde{u} : L \longrightarrow N$$

que estende a função escolha c. Logo, para todo $l \in L$, $p(\widetilde{u}(l)) = l$.

O raciocínio anterior nos leva a seguinte definição:

Definição 4.1. Um R-módulo P é dito projetivo se para todo diagrama de R-módulos da forma:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "u"] \\ N \arrow[r, "p"'] & M \end{tikzcd}$$

onde p é sobrejetor, existe um homomorfismo $\widetilde{u} : P \to N$ tal que $p \circ \widetilde{u} = u$.

Definição 4.2. Seja M um R-módulo. Um complexo sobre M consiste de um complexo X da forma:

$$... \to X_n \to ... \to X_1 \xrightarrow{\partial_1} X_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$$

onde $\varepsilon : X_0 \to M$ é um homomorfismo de R-módulos chamado aumentação. Destacamos que $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$. Dizemos que um complexo X sobre M é uma resolução se $H_i(X) = 0$ para todo $i > 0$ e

$$H_0(X) = Ker(\varepsilon)/Im(\partial_1) = X_0/Im(\partial_1) \cong M.$$

Por fim, dizemos que X é uma resolução projetiva de M se for uma resolução e cada X_n for um R-módulo projetivo.

Teorema 4.3. *Sejam M e M' dois R-módulos, X uma resolução projetiva sobre M, X' uma resolução sobre M e $u : M \to M'$ um homomorfismo de R-módulos. Com as notações precedentes, são válidas as seguintes afirmações:*

1. *Existe um morfismo de complexos $f : X \to X'$ tal que o diagrama*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{\partial_1} & X_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_0} & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \\
\dots & \longrightarrow & X_1' & \xrightarrow[\partial_1']{} & X_0' & \xrightarrow[\varepsilon']{} & M' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

comuta, i.e. $u \circ \varepsilon = \varepsilon' \circ f_0$ *e* $f_n \circ \partial_{n+1} = \partial'_{n+1} \circ f_{n+1}$ *para todo* $n \geq 0$.

2. *Se $f, g : X \to Y$ são morfismos de complexos satisfazendo a condição (1), então $f \sim g$.*

Demonstração:

1. Como X_0 é projetivo ((4.1)) e a sequência $X_0' \xrightarrow{\varepsilon'} M' \to 0$ é exata, existe um homomorfismo de R-módulos $f_0 : X_0 \to X_0'$ tal que $u \circ \varepsilon = \varepsilon' \circ f_0$. Suponha agora que $n > 1$ a existam homormofismos de R-módulos $f_0, ..., f_{n-1}$ tais que $f_j \circ \partial_{j+1} = \partial'_{j+1} \circ f_{j+1}$ para todo $0 \leq j \leq n-1$. Então $f_{n-1}(Im(\partial_n)) \subset Ker(\partial'_{n-1}) = Im(\partial'_n)$, de onde segue que a sequência $X'_n \to Im(\partial'_n) \to 0$ é exata. Pela projetividade de X_n, existe um homomorfismo $f_n : X_n \to Im(\partial'_n) \subset X'_n$ tal que $f_n \circ \partial_{n+1} = \partial'_{n+1} \circ f_{n+1}$. Logo, por indução em n, existe um morfismo de complexos $f : X \to X'$ que satisfaz as condições do enunciado.

2. Suponha que f e g são dois morfismos de complexos satisfazendo a condição do item (1) e seja $h = f - g$. Então:
$$\varepsilon' \circ h_0 = \varepsilon' \circ f_0 - \varepsilon' \circ g_0 = u \circ \varepsilon - u \circ \varepsilon = 0$$
e
$$\partial'_n \circ h_n = h_{n-1} \circ \partial_n, \qquad n \geq 1.$$
Considere o diagrama:
$$\begin{array}{ccccccc}
 & & X_0 & & & & \\
 & & \downarrow{\scriptstyle h_0} & & & & \\
X_1' & \xrightarrow[\partial_1']{} & X_0' & \xrightarrow[\varepsilon']{} & M' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$
Como $\varepsilon' \circ h_0 = 0$, $Im(h_0) \subset Im(\partial'_1)$. Logo, temos o diagrama:
$$\begin{array}{ccc}
 & & X_0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle h_0} \\
X_1' & \xrightarrow[\partial_1']{} & Im(\partial_1')
\end{array}$$
onde ∂'_1 é sobrejetor. Pela projetividade de X_0, existe um homorfismo $s_0 : X_0 \to X'_1$ tal que $h_0 = \partial'_1 \circ s_0$. Seja $n > 0$ e suponha que existam homomorfismos de R-módulos $s_j : X_j \to X'_{j+1}$, com $0 \leq j \leq n-1$, tais que:
$$h_j = \partial'_{j+1} \circ s_j + s_{j-1} \circ \partial_j.$$
Assim, temos que:
$$\begin{aligned}
\partial'_n \circ (h_n - s_{n-1} \circ \partial_n) &= \partial'_n \circ h_n - \partial'_n \circ s_{n-1} \circ \partial_n \\
&= h_{n-1} \circ \partial_n - \partial'_n \circ s_{n-1} \circ \partial_n \\
&= (h_{n-1} - \partial'_n \circ s_{n-1}) \circ \partial_n \\
&= s_{n-2} \circ \partial_{n-1} \circ \partial_n \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo, por indução, existe uma família de homomorfismos de R-módulos:

$$s_n : X_n \to X'_{n+1}, \qquad n \geq 0$$

tal que:

$$f_n - g_n = h_n = \partial'_n \circ s_n + s_{n-1} \circ \partial_n$$

de onde concluímos que $f \sim g$. $\square$

Corolário 4.4. *Se X e X' são duas resoluções projetivas de um mesmo R-módulo M, então X é homotopicamente equivalente à Y. Além disso, $H_n(X) \cong H_n(X')$ para todo $n \geq 0$.*

Demonstração: Com efeito, existe um morfismo de complexos $f : X \to X'$ tal que o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
... \arrow[r] & X_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "f_1"'] & X_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "f_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "Id_M"] & 0 \\
... \arrow[r] & X'_1 \arrow[r, "\partial'_1"'] & X'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"'] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

comuta (por (1) de (4.3)). Pelo mesmo raciocínio, existe um morfismo de complexos $g : X' \to X$ tal que o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
... \arrow[r] & X'_1 \arrow[r, "\partial'_1"] \arrow[d, "g_1"'] & X'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"] \arrow[d, "g_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "Id_M"] & 0 \\
... \arrow[r] & X_1 \arrow[r, "\partial_1"'] & X_0 \arrow[r, "\varepsilon"'] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

comuta. Ora, o morfismo composto $g \circ f : X \to X$ e o morfismo identidade $Id_X : X \to X$ são ambos morfismos de complexos da forma $h : X \to X$ tais que o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
... \arrow[r] & X_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "h_1"'] & X_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "h_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "Id_M"] & 0 \\
... \arrow[r] & X_1 \arrow[r, "\partial_1"'] & X_0 \arrow[r, "\varepsilon"'] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

comuta, de onde concluímos que $g \circ f \sim Id_X$ (devido a (2) de (4.3)). Análogamente, $f \circ g \sim Id_{X'}$, o que encerra a demonstração do fato que X e X' são homotópicamente equivalentes. Por fim, devido a (3.4), temos que $H_n(X) \cong H_n(X')$ para todo $n \geq 0$. $\square$

Definição 4.5. Um funtor $F : R\text{-}Mod \to R\text{-}Mod$ é dito aditivo se satisfaz as seguintes condições:

1. $F(0) = 0$, onde 0 indica tanto o homomorfismo nulo quanto o R-módulo zero.
2. Dados quaisquer dois R-módulos M e N, a aplicação

   $$Hom_R(M, N) \longrightarrow Hom_R(F(M), F(N)), \quad u \mapsto F(u)$$

   é um homomorfismo de R-módulos.

Construção 4.6. Seja M um R-módulo e

$$... \to X_n \to ... \to X_1 \xrightarrow{\partial_1} X_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$$

uma resolução projetiva de M. Suponha ainda que $F : R\text{-}Mod \to R\text{-}Mod$ é um funtor aditivo segundo (4.5). Para todo $n \geq 0$, temos (pela funtorialidade de F) a seguinte igualdade:

$$F(\partial_n) \circ F(\partial_{n+1}) = F(\partial_n \circ \partial_{n+1}) = F(0) = 0.$$

Logo, F induz o complexo:

$$... \to F(X_n) \to .... \to F(X_1) \xrightarrow{F(\partial_1)} F(X_0) \xrightarrow{F(\varepsilon)} F(M) \to 0.$$

que denotamos por $F(X)$. Existem os grupos de homologia do complexo $F(X)$:

$$H_n(F(X)), \qquad n \geq 0.$$

Suponha agora que:

$$... \to X'_n \to ... \to X'_1 \xrightarrow{\partial'_1} X'_0 \xrightarrow{\varepsilon'} M' \to 0$$

é uma resolução projetiva de um R-módulo M' e $u : M \to M'$ é um homomorfismo de módulos. Em virtude de (4.3), existe um morfismo de complexos $f : X \to X'$ tal que o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
... \arrow[r] & X_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "f_1"'] & X_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "f_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "u"] & 0 \\
... \arrow[r] & X'_1 \arrow[r, "\partial'_1"'] & X'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"'] & M' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

comuta. Aplicando o funtor F, obtemos a diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
... \arrow[r] & F(X_1) \arrow[r, "F(\partial_1)"] \arrow[d, "F(f_1)"'] & F(X_0) \arrow[r, "F(\varepsilon)"] \arrow[d, "F(f_0)"'] & F(M) \arrow[r] \arrow[d, "F(u)"] & 0 \\
... \arrow[r] & F(X'_1) \arrow[r, "F(\partial'_1)"'] & F(X'_0) \arrow[r, "F(\varepsilon')"'] & F(M') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

onde as linhas horizontais são complexos. Dito de outro modo, obtemos um morfismo de complexos:

$$F(f) : F(X) \longrightarrow F(X').$$

Logo, temos os homomorfismos induzidos na homologia:

$$H_n(F(f)) : H_n(F(X)) \longrightarrow H_n(F(X')), \quad n \in \mathbb{Z}$$

que independem da escolha de f. De fato, se $g : X \to X'$ é um segundo morfismo de complexos tal que o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
... \arrow[r] & X_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "g_1"'] & X_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "g_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "u"] & 0 \\
... \arrow[r] & X'_1 \arrow[r, "\partial'_1"'] & X'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"'] & M' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

comuta, então $f \sim g$ (devido a (2) de (4.3)), de onde segue a existência de uma família de homomorfismos $s_n : X_n \to X'_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$, tal que:

$$f_n - g_n = \partial'_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ \partial_n.$$

Pela aditividade de F, obtemos a igualdade:

$$F(f_n) - F(g_n) = F(\partial'_{n+1}) \circ F(s_n) + F(s_{n-1}) \circ F(\partial_n)$$

o que implica $F(f) \sim F(g)$, e, poranto $H_n(F(f)) = H_n(F(g))$. Agora, devido à (4.4), os grupos de homologia $H_n(F(X))$ também independem da escolha da resolução projetiva tomada. Logo, com as notações precedentes, podemos designar o R-módulo:

$$\mathbf{L}_n F(M) =_{df} H_n(F(X))$$

e os homomorfismos de R-módulos:

$$\mathbf{L}_n F(u) =_{df} H_n(F(f)) : \mathbf{L}_n F(M) \longrightarrow \mathbf{L}_n F(M').$$

Proposição 4.7. *Para todo funtor aditivo $F : R\text{-}Mod \to R\text{-}Mod$ são válidas as seguintes afirmações:*

1. *Se M é R-módulo, então $\mathbf{L}_n F(Id_M) = Id_{\mathbf{L}_n F(M)}$.*
2. *Se $u : M \to N$ e $v : N \to P$ são morfismos de R-módulos, então $\mathbf{L}_n F(v \circ u) = \mathbf{L}_n F(v) \circ \mathbf{L}_n F(u)$.*
3. *A aplicação $\mathbf{L}_n F$ define um funtor aditivo de R-Mod para R-Mod.*

Demonstração: As afirmações seguem formalmente da construção (4.6) e dos resultados (3.3) e (2.6). $\square$

Definição 4.8. Para cada funtor aditivo $F : R\text{-}Mod \to R\text{-}Mod$ e para cada $n \geq 0$, definimos o n-ésimo funtor derivado de F como sendo o funtor aditivo $\mathbf{L}_n F$.

Teorema 4.9. *Seja $F : R\text{-}Mod \to R\text{-}Mod$ um funtor aditivo. Para toda sequência exata curta de R-módulos:*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

existem homomorfismos de R-módulos:

$$\Delta_n : \mathbf{L}_n F(M'') \longrightarrow \mathbf{L}_n F(M')$$

tal que a sequência longa:

$$... \to \mathbf{L}_1 F(M'') \xrightarrow{\Delta_1} \mathbf{L}_0 F(M') \to \mathbf{L}_0(M) \to \mathbf{L}_0 F(M'') \to 0$$

é exata. Em particular, se $\mathbf{L}_1 F(M) = 0$, então temos a sequência exata curta:

$$0 \to \mathbf{L}_0 F(M') \to \mathbf{L}_0 F(M) \to \mathbf{L}_0 F(M'') \to 0.$$

Demonstração: Para demonstrar o teorema, devemos antes introduzir a noção de *resolução projetiva de uma sequência exata curta*. Fixemos uma sequência exata curta:

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0.$$

Uma *resolução projetiva dessa sequência* consiste em resoluções projetivas X' de M', X de M e X'' de M'', junto com morfismos de complexos $f : X' \to X$ e $g : X \to X''$, onde as sequências:

$$0 \to X'_n \xrightarrow{f_n} X_n \xrightarrow{g_n} X''_n \to 0$$

são exatas e o diagrama:

$$\begin{tikzcd} X'_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\varepsilon'"'] & X_0 \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & X''_0 \arrow[d, "\varepsilon''"] \\ M'' \arrow[r] & M \arrow[r] & M'' \end{tikzcd}$$

comuta. Se existe uma resolução projetiva da sequência exata curta original, então para cada $n \geq 0$, a sequência:

$$0 \to X'_n \xrightarrow{f_n} X_n \xrightarrow{g_n} X''_n \to 0$$

é exata e cinde (devido à projetividade de X''_n), de onde segue que as sequências:

$$0 \to F(X'_n) \xrightarrow{F(f_n)} F(X_n) \xrightarrow{F(g_n)} F(X''_n) \to 0$$

também são sequências exatas curtas que cindem. Logo, temos uma sequência exata de complexos:

$$0 \to F(X') \to F(X) \to F(X'') \to 0.$$

e, portanto, o teorema segue de (2.7). Portanto, para provar o teorema, basta demonstrar que toda sequência exata curta admite uma resolução projetiva.

A seguir, mostramos como os funtores derivados de um funtor aditivo caracterizam sua exatidão.

Definição 4.10. Seja $F : R\text{-}Mod \to R\text{-}Mod$ um funtor aditivo.

1. F é dito exato à esquerda se para toda sequência exata curta:
$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$
a sequência:
$$0 \to F(M') \to F(M) \to F(M'')$$
é exata.

2. F é dito exato à direita se para toda sequência exata curta:
$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$
a sequência:
$$F(M') \to F(M) \to F(M'') \to 0$$
é exata.

3. F é dito exato se for exato à direita e à esquerda.

Lema 4.11. *Seja $F : R\text{-}Mod \to R\text{-}Mod$ um funtor aditivo. Se F é exato à direita, então $\mathbf{L}_0F(M) \cong F(M)$ para todo $n \geq 0$ e para todo R-módulo M.*

Demonstração: Seja M um R-módulo. Considere uma resolução projetiva X de M:
$$... \to X_1 \xrightarrow{\partial_1} X_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0.$$
Aplicando o funtor F, obtemos o complexo $F(X)$ dado por:
$$... \to F(X_1) \xrightarrow{F(\partial_1)} F(X_0) \xrightarrow{F(\varepsilon)} F(M) \to 0.$$
Por definição:
$$\mathbf{L}_0F(M) = H_0(F(X)) = Ker(F(\varepsilon))/Im(F(\partial_1)).$$
Como a sequência curta:
$$0 \to Im(\partial_1) \xrightarrow{\partial_1} X_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$$
é exata ((4.2)), temos que:
$$F(Im(\partial_1)) \xrightarrow{F(\partial_1)} F(X_0) \xrightarrow{F(\varepsilon)} F(M) \to 0$$
é exata, pois por hipótese, F é exato à direita. Logo,
$$\mathbf{L}_0F(M) = Ker(F(\varepsilon))/Im(F(\partial_1)) \cong F(M). \quad \square$$

Teorema 4.12. *Seja $F : R\text{-}Mod \to R\text{-}Mod$ um funtor aditivo exato à direita. Condições equivalentes:*

1. *F é exato.*
2. *$\mathbf{L}_nF(N) = 0$ para todo $n \geq 0$ e para todo R-módulo N.*
3. *$\mathbf{L}_1F(N) = 0$ para todo R-módulo N.*

Demonstração: (1) $\implies$ (2): Seja N um R-módulo. Se o funtor F é exato, então para toda resolução projetiva X de N:

$$... \to X_n \to ... \to X_1 \to X_0 \to N \to 0$$

temos que o o complexo $F(X)$:

$$... \to F(X_n) \to ... \to F(X_1) \to F(X_0) \to F(N) \to 0$$

é uma sequência exata em cada $F(X_n)$ onde $n \geq 1$, o que implica :

$$\mathbf{L}_n F(M) = H_n(F(X)) = 0$$

para todo $n \geq 1$.
(2) $\implies$ (3): Imediato.
(3) $\implies$ (1): Devemos mostrar que para toda sequência exata curta:

$$0 \to N' \to N \to N'' \to 0$$

a sequência:

$$0 \to F(N') \to F(N) \to F(N'') \to 0$$

é exata. Com efeito, considere uma resolução projetiva X de N':

$$... \to X_n \to ... \to X_1 \to X_0 \to N' \to 0.$$

Pela hipótese que F é exato à direita, a sequência:

$$F(N') \to F(N) \to F(N'') \to 0$$

é exata, mas por (4.11), $\mathbf{L}_0 F(N') \cong F(N')$, $\mathbf{L}_0 F(N) \cong N$ e $\mathbf{L}_0 F(N'') \cong F(N'')$, de onde deduzimos a sequência exata:

$$\mathbf{L}_0 F(N') \to \mathbf{L}_0 F(N) \to \mathbf{L}_0 F(N'') \to 0.$$

Utilizando a sequência exata longa:

$$... \to \mathbf{L}_1 F(M'') \xrightarrow{\Delta_1} \mathbf{L}_0 F(M') \to \mathbf{L}_0(M) \to \mathbf{L}_0 F(M'') \to 0$$

de (4.9), chegamos na sequência exata curta:

$$0 \to \mathbf{L}_0 F(N') \to \mathbf{L}_0 F(N) \to \mathbf{L}_0 F(N'') \to 0,$$

visto que, por hipótese, $\mathbf{L}_1 F(M) = 0$ para todo R-módulo M, o que por sua vez, implica $\mathbf{L}_1 F(N') = 0$. Logo, a sequência:

$$0 \to F(N') \to F(N) \to F(N'') \to 0$$

é exata, como queríamos demonstrar. $\square$

5 Funtor $Tor_n^R(-, M)$

Para todo R-módulo M, existe o funtor:

$$(-) \otimes_R M : R\text{-}Mod \longrightarrow R\text{-}Mod.$$

Sabemos que $(-) \otimes_R M$ é um funtor aditivo e exato à direita, mas não necessariamente exato à esquerda. Para construir os módulos $Tor_n^R(N, M)$, $n \geq 0$, considere uma resolução projetiva X de N:

$$... \to X_n \to ... \to X_1 \xrightarrow{\partial_1} X_0 \xrightarrow{\varepsilon} N \to 0$$

e tome o complexo $X \otimes_R M$ dado por:

$$... \to X_n \otimes_R M \to ... \to X_1 \otimes_R M \xrightarrow{\partial_1 \otimes 1_M} X_0 \otimes_R M \xrightarrow{\varepsilon \otimes 1_M} N \otimes_R M \to 0.$$

Designamos $Tor_n^R(N, M)$ como sendo o n-ésimo grupo de homologia do complexo $X \otimes_R M$. Dito de outro modo, o funtor $Tor_n^R(-, M)$ é o n-ésimo funtor derivado à esquerda do funtor $(-) \otimes_R M$:

$$Tor_n^R(-, M) =_{df} \mathbf{L}_n((-) \otimes_R M).$$

Logo, devido à (4.11), temos que:

$$Tor_0^R(N, M) = \mathbf{L}_0(N \otimes_R M) \cong N \otimes_R M,$$

pois $(-) \otimes_R M$ é exato à direita.
A seguir, vemos como os funtores $Tor_n^R(-, M)$ caracterizam a *planitude* de M, ou seja, eles "medem" o quanto o funtor $(-) \otimes_R M$ deixa de ser exato à esquerda. Dito de outro modo, quanto mais os funtores $Tor_n^R(-, M)$ são triviais, mais o R-módulo M é plano.

Teorema 5.1. *Para todo R-módulo M as condições seguintes são equivalentes:*

1. *M é um módulo plano.*
2. *$Tor_n(N, M) = 0$ para todo $n \geq 1$ e para todo R-módulo N.*
3. *$Tor_1(N, M) = 0$ para todo R-módulo N.*

Demonstração: Decorre de (4.12) já que $(-) \otimes_R M$ é um funtor exato à direita e $Tor_n^R(-, M) = \mathbf{L}_n((-) \otimes_R M)$ $\square$

Proposição 5.2. *Listamos a seguir algumas propriedades que o funtor $Tor_n^R(-, M)$ verifica:*

1. *$Tor_n^R(N, M) \cong Tor_n^R(M, N)$*
2. *$Tor_n^R(\bigoplus_\alpha M_\alpha, N) \cong \bigoplus_\alpha Tor_n^R(M_\alpha, N)$*
3. *Se $a \in R$ não é divisor de zero, então $Tor_0^R(R/(a), M) \cong M/aM$, $Tor_1^R(R/(a), M) \cong Ann_M(a)$ e $Tor_n^R(R/(a), M) = 0$ para todo $n > 0$.*
4. *Se R' é uma R-álgebra plana, então*

   $$Tor_n^R(M, N) \otimes_R R' \cong Tor_n^{R'}(M \otimes_R R', N \otimes_R R').$$

5. *Se S é um subconjunto multiplicativo de R, então*

   $$S^{-1}Tor_n^R(M, N) \cong Tor_n^{S^{-1}R}(S^{-1}M, S^{-1}N).$$

Demonstração:

1. Considere dois R-módulos M e N com resoluções projetivias X e Y:

   $$... \to X_1 \to X_0 \to M \to 0$$

   e

   $$... \to Y_1 \to Y_0 \to N \to 0.$$

   Com as notações anteriores, podemos formar o complexo $X \otimes_R Y$ onde:

   $$(X \otimes_R Y)_n = \bigoplus_{p+q=n} X_p \otimes_R Y_q$$

e cada $\partial_n^{X\otimes_R Y} : (X \otimes_R Y)_n \to (X \otimes_R Y)_{n-1}$ é dado por:

$$\partial_n^{X\otimes_R Y}(x \otimes y) = \partial_p^X(x) \otimes y + (-1)^p x \otimes \partial_q^Y(y).$$

Utilizando (4.6) e (3.4), podemos verificar facilmente que:

$$Tor_n^R(M, N) \cong H_n(X \otimes_R Y).$$

Pela comutatividade do produto tensorial, temos que $X \otimes_R Y \cong Y \otimes_R X$. Logo,

$$Tor_n^R(M, N) \cong H_n(X \otimes_R Y) \cong H_n(Y \otimes_R X) \cong Tor_n^R(N, M).$$

2. Para cada índice α, dispomos da homomorfismo de inclusão:

$$\imath_\alpha : M_\alpha \longrightarrow \bigoplus_\alpha M_\alpha.$$

Aplicando o funtor $Tor_n^R(-, N)$, obtemos a família de homomorfismos:

$$\widetilde{\imath}_\alpha =_{df} Tor_n^R(\imath_\alpha, N) : Tor_n^R(M_\alpha) \longrightarrow Tor_n^R(\bigoplus_\alpha M_\alpha, N).$$

Pela propriedade universal da soma direta, a família de homomorfismos precedente induz um homomorfismo canônico:

$$s =_{df} \bigoplus_\alpha Tor_n^R(\imath_\alpha, N) : \bigoplus_\alpha Tor_n^R(M_\alpha, N) \longrightarrow Tor_n^R(\bigoplus_\alpha M_\alpha, N).$$

Para provar que s é um isomorfismo, basta tomar resolções projetivas X_α para cada M_α:

$$...X_{1,\alpha} \to X_{0,\alpha} \to M_\alpha \to 0,$$

pois o complexo X, onde:

$$X_n = \bigoplus_\alpha X_{n,\alpha}$$

e

$$\partial_n^X =_{df} \bigoplus_\alpha \partial_n^{X_\alpha} : X_n \longrightarrow X_{n-1},$$

é uma resolução projetiva de $\bigoplus_\alpha M_\alpha$. Pela distributividade do produto tensorial com a soma direta, pela comutatividade da homologia com a soma direta e pela definição de $Tor_n^R(-, N)$, temos que:

$$\begin{aligned} Tor_n^R(\bigoplus_\alpha M_\alpha, N) &\cong H_n((\bigoplus_\alpha M_\alpha) \otimes_R N) \\ &\cong H_n(\bigoplus_\alpha M_\alpha \otimes_R N) \\ &\cong \bigoplus_\alpha H_n(M_\alpha \otimes_R N) \\ &\cong \bigoplus_\alpha Tor_n^R(M_\alpha, N). \end{aligned}$$

3. Considere a sequência curta:

$$0 \to R \xrightarrow{\widehat{a}} R \xrightarrow{p_a} R/(a) \to 0,$$

onde $\widehat{a}(r) = ar$ para todo $r \in R$ e p_a é a projeção canônica no quociente. Como a não é divisor de zero, $\widehat{a}$ é injetor, e, portanto, a sequência curta considerada é exata. Devido à (4.9), temos uma sequência exata longa:

$$... \to Tor_1^R(R/(a), M) \xrightarrow{\Delta_1} Tor_0^R(R, M) \to Tor_0^R(R, M) \to Tor_0^R(R/(a), M) \to 0$$

que por sua vez, equivale a sequência exata longa:

$$... \to Tor_1^R(R/(a), M) \xrightarrow{\Delta_1} M \xrightarrow{\widehat{a}} M \xrightarrow{p_a} M/aM \to 0,$$

onde, com abuso de notação, $\widehat{a}$ (resp. p_a) indica o homomorfismo $x \mapsto a.x$ (resp. projeção canônica no quociente). De fato, $Tor_0^R(R, M) \cong R \otimes_R M \cong M$ e $Tor_0^R(R/(a), M) \cong R/(a) \otimes_R M \cong M/aM$. Logo,

$$Ker(\widehat{a}) = \{x \in M : a.x = 0\} = Ann_M(a)$$

e a sequência:

$$0 \to Ann_M(a) \to M \xrightarrow{\widehat{a}} M \xrightarrow{p_a} M/aM \to 0$$

é exata curta. Logo, $Tor_1^R(R/(a), M) \cong Ann_M(a)$. Por indução, podemos verificar que $Tor_n^R(R/(a), M) = 0$ para todo $n > 1$.

4. Decorre das definições de álgebra plana, resolução projetiva e (4.6). Indicamos (Rotman) para mais detalhes.

5. Lembramos que $S^{-1}R$ é sempre uma R-álgebra plana. Além disso, para todo R-módulo M', $S^{-1}M' \cong M' \otimes_R S^{-1}R$. Logo, pelo item anterior, temos que:

$$\begin{aligned} Tor_n^{S^{-1}R}(S^{-1}M, S^{-1}N) &\cong Tor_n^{S^{-1}R}(M \otimes_R S^{-1}R, N \otimes_R S^{-1}R) \\ &\cong S^{-1}Tor_n^R(M, N) \quad \square \end{aligned}$$

References

[1] Rotman, Joseph. *An Introduction to Homological Algebra*, Springer-Verlag New York, Universitext, 2º edition.