INTRODUÇÃO À ALGEBRA COMUTATIVA – MAT0460

DIMENSÃO DE GRUPOS ALGÉBRICOS

ADRIANA MAYUMI SHIGUIHARA

Resumo. A intenção deste trabalho é introduzir a noção de grupos algébricos e de ação de grupos algébricos, e apresentar um resultado sobre dimensão nesse contexto. Tanto quanto possível, o texto se restringirá a variedades afins. Também será demonstrado que a dimensão do grupo das matrizes $n \times n$ de determinante não nulo é n^2. A relevância do estudo dos GL_n será evidenciada num teorema mencionado ao final, que relaciona qualquer grupo algébrico afim a um subgrupo de algum GL_n.

1. Preliminares

Neste trabalho, $\mathbf{k}$ será sempre um corpo algebricamente fechado.

1.1. Variedades algébricas afins.

Definição 1.1. Um subconjunto X do espaço afim $\mathbb{A}^n \doteq \mathbf{k} \times \cdots \times \mathbf{k}$ (n vezes) é uma *variedade algébrica afim* se

$$X = V(S)$$

para algum $S \subset \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$, onde

$$V(S) \doteq \{x \in \mathbb{A}^n \mid \forall f \in S, f(x) = 0\}.$$

Existe uma definição mais geral de *variedades algébricas* (sem a parte afim), mas ela será evitada neste texto. Aqui, o termo "variedade" designará apenas variedades afins, exceto quando for explicitado o contrário.

Observação 1.2. Se $S \subset \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ e I é o ideal gerado por S, então $V(S) = V(I)$.

Definição 1.3. Seja $X \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade afim.

(a) O *anel das coordenadas* de X é o quociente

$$A(X) \doteq \frac{\mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]}{I(X)},$$

onde

$$I(X) \doteq \{f \in \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n] \mid \forall x \in X, f(x) = 0\}.$$

(b) A *dimensão* de X, denotada por $\dim X$, é definida como a dimensão de Krull de seu anel das coordenadas, ou seja, como o maior comprimento possível de uma cadeia de ideais primos de $A(X)$.
(c) Uma *subvariedade* de X é um subconjunto de X que também é uma variedade.

Observação 1.4. $A(X)$ é mais que um anel; é uma $\mathbf{k}$-álgebra finitamente gerada. Em particular, temos $\dim A(X) < \infty$, e assim $\dim X < \infty$.

Definição 1.5. A *topologia de Zariski* em $\mathbb{A}^n$ é a topologia obtida definindo os fechados como as variedades afins.

Observação 1.6.

(a) Os complementares das variedades afins formam de fato uma topologia em $\mathbb{A}^n$:
  (i) $V(1)^{\complement} = \mathbb{A}^n$,
  (ii) $V(0)^{\complement} = \emptyset$,
  (iii) $V(I \cap J)^{\complement} = V(I)^{\complement} \cap V(J)^{\complement}$,
  (iv) $V\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right)^{\complement} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda)^{\complement}$.
(b) Se $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n$, então $\{a\} = V(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$. Assim, pontos são fechados na topologia de Zariski.

Definição 1.7. Uma variedade afim $X \subset \mathbb{A}^n$ é dita *irredutível* se não pode ser escrita como união de subvariedades próprias distintas.

Observação 1.8. Dada uma variedade X no espaço afim $\mathbb{A}^n$, um conjunto $Y \subset \mathbb{A}^n$ é uma subvariedade irredutível de $X \iff$ é o conjunto de zeros de um ideal primo de $\mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ que contém $I(X) \iff$ é o conjunto de zeros de um ideal primo de $A(X)$. Isso dá uma correspondência entre as cadeias de ideais primos em $A(X)$ e as cadeias de subvariedades irredutíveis de X. Assim, A dimensão de X é também o maior comprimento possível de uma cadeia de subvariedades irredutíveis de X. Além disso, sendo $\mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ um domínio, o espaço afim $\mathbb{A}^n = V(0)$ é irredutível.

Definição 1.9. Se X é um subconjunto qualquer de $\mathbb{A}^n$, definimos sua *dimensão* como

$$\dim X \doteq \dim \overline{X},$$

onde $\overline{X}$ é o fecho de X na topologia de Zariski, ou seja, a menor variedade afim que contém X.

Definição 1.10. Sejam $X \subset \mathbb{A}^n$ e $Y \subset \mathbb{A}^m$ variedades afins.

$$\begin{aligned} \phi\colon X &\to Y \\ x &\to \phi(x) \end{aligned}$$

é um *morfismo de variedades* se existem $\phi_1, \ldots, \phi_m \in \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ tais que $\phi(x) = (\phi_1(x), \ldots \phi_m(x))$ para todo $x \in X$. Nesse caso, associamos a ϕ o seu *comorfismo* ϕ^*, dado por

$$\begin{aligned} \phi^* \colon A(Y) &\to A(X) \\ f &\mapsto f \circ \phi \end{aligned}$$

Observação 1.11. ϕ^* é um homomorfismo de $\mathbf{k}$-álgebras.

Proposição 1.12. *Todo morfismo de variedades afins é contínuo.*

Demonstração. Seja $\phi\colon X \to Y$ um morfismo de variedades, com $X \subset \mathbb{A}^n$ e $Y \subset \mathbb{A}^m$ variedades afins. Seja $A \subset Y$ um aberto. Então $A = V(I)^{\complement}$ para algum $I \lhd \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_m]$. Temos

$$\begin{aligned} x \in \phi^{-1}(A) &\iff \phi(x) \in A \\ &\iff \phi(x) \notin A^{\complement} = V(I) \\ &\iff f(\phi(x)) \neq 0, \exists f \in I \\ &\iff f \circ \phi(x) \neq 0, \exists f \in I \\ &\iff x \in V(\{f \circ \phi \mid f \in I\})^{\complement} \end{aligned}$$

portanto $\phi^{-1}(A)$ é aberto. □

Definição 1.13. Sejam $X \subset \mathbb{A}^n$ e $Y \subset \mathbb{A}^m$ variedades afins. O *produto* de X e Y, denotado por $X \times Y$, é o subconjunto de $\mathbb{A}^{n+m}$ dado por

$$X \times Y = \{(a_1, \ldots, a_{n+m}) \in \mathbb{A}^{n+m} \mid (a_1, \ldots, a_n) \in X, (a_{n+1}, \ldots, a_m) \in Y\}.$$

Observação 1.14. Sejam $X \subset \mathbb{A}^n$ e $Y \subset \mathbb{A}^m$ variedades afins.

(a) $X \times Y$ é uma variedade afim. Basta ver que, se $X = V(I)$ e $Y = V(J)$, então

$$X \times Y = V(\{f(x_1, \ldots, x_n) \cdot g(x_{n+1}, \ldots, x_m) \mid f \in I, g \in J\}).$$

(b) Se $Z \subset \mathbb{A}^k$ é uma variedade afim e $\phi\colon X \times Y \to Z$ é um morfismo de variedades, então para todo $a \in X$ e todo $b \in Y$ fixados as funções

$$\begin{aligned} \phi(a, \cdot)\colon Y &\to Z \\ y &\mapsto \phi(a, y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \phi(\cdot, b)\colon X &\to Z \\ x &\mapsto \phi(x, b) \end{aligned}$$

são morfismos de variedades. De fato, existem $\phi_1, \ldots, \phi_k \in \mathbf{k}[t_1, \ldots, t_{n+m}]$ tais que

$$\phi(x, y) = (\phi_1(x, y), \ldots, \phi_{n+m}(x, y)), \forall x \in X, \forall y \in Y,$$

onde $\phi_i(x, y) = \phi_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ se $1 \leq i \leq k$. Fixando $x = a$ e denotando $\phi(a, \cdot)$ por φ, temos

$$\varphi(y) = \phi(a, y) = (\phi_1(a, y), \ldots, \phi_{n+m}(a, y)), \forall y \in Y.$$

Como $\phi_i(a,\cdot) \in \mathbf{k}[y_1,\ldots,y_n]$ para todo i, φ é morfismo. Para $\phi(\cdot,b)$, é análogo.

1.2. **Grupos algébricos.**

Definição 1.15. Um *grupo algébrico* é um grupo G que também é uma variedade e tal que as funções

$$\begin{aligned} \theta\colon G\times G &\to G \\ (x,y) &\mapsto x\cdot y \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \iota\colon G &\to G \\ x &\mapsto x^{-1} \end{aligned}$$

são morfismos de variedades.

Definição 1.16. Um *morfismo de grupos algébricos* é um morfismo de variedades que também é homomorfismo de grupos.

Definição 1.17. Sejam G um grupo algébrico e X uma variedade. Uma *ação de grupos algébricos* de G sobre X é um morfismo

$$\begin{aligned} \phi\colon G\times X &\to X \\ (g,x) &\mapsto g\cdot x \doteq \phi(g,x) \end{aligned}$$

tal que, se $g,h\in G$ e $x\in X$,

$$(gh)\cdot x = g\cdot(h\cdot x)$$

e $e\cdot x = x$, onde e é o elemento neutro de G.

Definição 1.18. Sejam X uma variedade e G um grupo algébrico que age sobre X. Seja $x\in X$ fixado.

(a) O *estabilizador* de x é o subconjunto de G dado por

$$G_x \doteq \{g\in G \mid g\cdot x = x\}.$$

(b) A *órbita* de x é o subconjunto de X dado por

$$G\cdot x \doteq \{g\cdot x \mid g\in G\}.$$

2. Ações e dimensão

O resultado abaixo será útil para provar o teorema subsequente, mas sua demonstração será suprimida, pois foge ao escopo deste texto.

Lema 2.1. *Sejam X e Y variedades, e seja $u\colon X\to Y$ um morfismo tal que $\overline{u(X)} = Y$. Se existe $r\in\mathbb{N}$ com*

$$\dim u^{-1}(y) = r, \forall y\in u(X),$$

então

$$\dim X = \dim Y + r.$$

Teorema 2.2. *Sejam X uma variedade afim e G um grupo algébrico que age sobre X. Para todo $x \in X$,*

$$\dim G \cdot x = \dim G - \dim G_x.$$

Demonstração. Seja

$$\begin{aligned} u\colon G \times X &\to X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

a ação de G sobre X. Fixado $x \in X$, podemos definir $u_x \doteq u(\cdot, x)$, ou seja,

$$\begin{aligned} u_x\colon G &\to X \\ g &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

Por 1.14, u_x é morfismo de variedades. Sua imagem é

$$\begin{aligned} u_x(G) &= \{u_x(g) \mid g \in G\} \\ &= \{g \cdot x \mid g \in G\} \\ &= G \cdot x \end{aligned}$$

Assim, podemos trocar o contradomínio de u_x para $\overline{G \cdot x}$.
Seja $y \in u_x(G)$, e fixemos $g_y \in u_x^{-1}(y)$. A função

$$\begin{aligned} \phi\colon u_x^{-1}(x) &\to u_x^{-1}(y) \\ g &\mapsto g_y g \end{aligned}$$

é um homeomorfismo. De fato:

(i) Sejam $g, h \in u_x^{-1}(x)$ tais que $\phi(g) = \phi(h)$. Então

$$g_y g = g_y h \implies g_y^{-1} g_y g = g_y^{-1} g_y h \implies g = h,$$

logo ϕ é injetiva.

(ii) Se $g \in u_x^{-1}(y)$, então $g \cdot x = y$, logo

$$\begin{aligned} u_x(g_y^{-1} g) &= (g_y^{-1} g) \cdot x = g_y^{-1} \cdot (g \cdot x) \\ &= g_y^{-1} \cdot y = g_y^{-1} \cdot (g_y \cdot x) \\ &= (g_y g_y^{-1}) \cdot x = e \cdot x \\ &= x. \end{aligned}$$

Assim, $g_y^{-1} g \in u_x^{-1}(x)$. Temos então

$$g = g_y g_y^{-1} g = \phi(g_y^{-1} g),$$

portanto ϕ é sobrejetiva.

(iii) Como G é grupo algébrico, a função

$$\begin{aligned} m\colon G \times G &\to G \\ (x, y) &\mapsto x \cdot y \end{aligned}$$

é morfismo de variedades. Por 1.14, $\theta(g_y, \cdot)$ é morfismo; por 1.12, é contínuo. Como ϕ é restrição de $\theta(g_y, \cdot)$, é também contínua. Analogamente, sua inversa (dada por $g \mapsto g_y^{-1} g$) é contínua.

O conjunto $u_x^{-1}(y)$ é uma variedade afim, pois é pré-imagem do fechado $\{y\}$ pelo morfismo u_x, que é contínuo por 1.12. Dessa forma, a dimensão da fibra de y é finita e coincide com o tamanho máximo das cadeias de subvariedades irredutíveis de $u_x^{-1}(y)$. Como esse número só depende da topologia, conclui-se que a dimensão é preservada por homeomorfismos, logo todas as fibras de u_x têm dimensão $\dim u_x^{-1}(x)$. Aplicando o lema 2.1,

$$\dim G = \overline{\dim G \cdot x} + \dim u_x^{-1}(x) \implies \overline{\dim G \cdot x} = \dim G - \dim u_x^{-1}(x) \tag{1}$$

Por definição, $\dim G \cdot x = \dim \overline{G \cdot x}$, e além disso

$$\begin{aligned} u_x^{-1}(x) &= \{g \in G \mid u_x(g) = x\} \\ &= \{g \in G \mid g \cdot x = x\} \\ &= G_x. \end{aligned}$$

Portanto, de 1 e da igualdade acima, resulta

$$\dim G \cdot x = \dim G - \dim u_x^{-1}(x) = \dim G - \dim G_x.$$

□

3. Dimensão do GL_n

O conjunto M_n das matrizes $n \times n$ (com entradas em $\mathbf{k}$) pode ser visto como o espaço afim $\mathbb{A}^{n^2}$. Como o determinante de uma matriz é um polinômio nas suas entradas, o GL_n (o subconjunto de M_n onde o determinante não se anula) é o complementar da variedade $V(\det X)$.

Proposição 3.1. *A dimensão do* GL_n *é* n^2.

Demonstração.

$$\dim \mathrm{GL}_n = \dim V(\det X)^{\complement} = \dim \overline{V(\det X)^{\complement}}.$$

O espaço afim é irredutível, logo GL_n é denso. De fato,

$$\mathbb{A}^{n^2} = V(\det X)^{\complement} \cup V(\det X) = \overline{V(\det X)^{\complement}} \cup V(\det X)$$

é uma decomposição de $\mathbb{A}^{n^2}$ em união de fechados (=subvariedades) distintos, já que existem matrizes com determinante nulo (a matriz com todas as entradas nulas é uma delas). Como $V(\det X)$ é subconjunto próprio de $\mathbb{A}^{n^2}$ (a matriz identidade por exemplo tem determinante não nulo), resulta que $\overline{V(\det X)^{\complement}}$ não pode ser próprio. Assim,

$$\dim \mathrm{GL}_n = \dim \mathbb{A}^{n^2} = \dim \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_{n^2}] = n^2.$$

□

4. Linearização dos grupos algébricos afins

Os subgrupos fechados do GL_n são também chamados de *grupos algébricos lineares*. Nesta seção, busca-se mostrar que todo grupo algébrico afim (ou seja, que é uma variedade *afim*, e não qualquer) pode ser considerado um grupo algébrico linear.

Lema 4.1. *Sejam $X \subset \mathbb{A}^n$ e $Y \subset \mathbb{A}$ variedades afins. Se $\phi \in A(X \times Y)$, podemos escrever*

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(x)\beta_i(y),$$

para algum $r \in \mathbb{N}$, com $\alpha_i \in A(X)$ e $\beta_i \in A(Y)$ para cada i. Além disso, é possível fazer tal escolha de forma que o conjunto dos α_i seja linearmente independente.

Demonstração. Para mostrar a existência da expressão descrita, basta tomar os monômios.
Suponhamos que o conjunto $\{\alpha_i\}_{i=1}^{r}$ seja linearmente dependente. Então α_r se escreve como

$$\alpha_r = \sum_{j=1}^{r-1} \lambda_j \alpha_j,$$

com os λ_j em $\mathbf{k}$. Então

$$\begin{aligned}
\phi &= \left(\sum_{i=1}^{r-1} \alpha_i\beta_i\right) + \alpha_r\beta_r \\
&= \left(\sum_{i=1}^{r-1} \alpha_i\beta_i\right) + \left(\sum_{j=1}^{r-1} \lambda_j\alpha_j\right)\beta_r \\
&= \left(\sum_{i=1}^{r-1} \alpha_i\beta_i\right) + \left(\sum_{j=1}^{r-1} \lambda_j\alpha_j\beta_r\right) \\
&= \sum_{i=1}^{r-1} \alpha_i\beta_i + \lambda_i\alpha_i\beta_r \\
&= \sum_{i=1}^{r-1} \alpha_i(\beta_i + \lambda_i\beta_r),
\end{aligned}$$

assim basta redefinir cada β_i como $\beta_i + \lambda_i\beta_r$ (e repetir o processo enquanto for possível). $\square$

Nas proposições que seguem, será usada a seguinte notação:
Se G é um grupo algébrico que age sobre uma variedade X, então φ denota

a função

$$\begin{aligned}\varphi\colon G \times X &\to X\\ (g,x) &\mapsto g^{-1}\cdot x\end{aligned}$$

Isso é um morfismo, pois é composição dos morfismos θ e ι. Assim, podemos tomar seu comorfismo φ^*. Para cada $f \in A(X)$, temos

$$\varphi^*(f)(g,x) = f\circ\varphi(g,x) = f(g^{-1}\cdot x), \forall g \in G, \forall x \in X. \tag{2}$$

Por 1.14, $\varphi(g,\cdot)$ também é morfismo para cada g, e podemos tomar seu comorfismo, que será denotado por τ_g. Dessa forma, se $f \in A(X)$,

$$\tau_g(f)(x) = f\circ(\varphi(g,\cdot))(x) = f(\varphi(g,x)) = f(g^{-1}\cdot x), \forall x \in X. \tag{3}$$

De 2 e 3,

$$\varphi^*(f)(g,x) = \tau_g(f)(x), \forall g \in G, \forall x \in X.$$

Além disso, τ_g é $\mathbf{k}$-linear, já que é um comorfismo.

Proposição 4.2. *Sejam X uma variedade e G um grupo algébrico que age sobre X. Se F é um subespaço de dimensão finita de $A(X)$, existe um subespaço de dimensão finita E de $A(X)$ tal que $F \subset E$ e E é invariante sob τ_g para todo $g \in G$.*

Demonstração. Suponhamos que a proposição valha quando $\dim F = 1$. Seja agora $\dim F = n$, sendo $\{f_1, \ldots, f_n\}$ uma base de F. Se $1 \le i \le n$, então a suposição nos garante um subespaço E_i de $A(X)$ de dimensão finita contendo $\operatorname{span}\{f_i\}$, com E_i invariante sob os τ_g. Tomando

$$E = E_1 + E_2 + \cdots + E_n$$

temos $F = \operatorname{span}\{f_1, \ldots, f_n\} \subset E$ e

$$\dim E \le \dim E_1 + \dim E_2 + \cdots + \dim E_n < \infty$$

Se $\psi \in E$, podemos escrever $\psi = \psi_1 + \ldots \psi_n$, com $\psi_i \in E_i$. Fixado $g \in G$, temos $\tau_g(\psi_i) \in E_i$ para cada i, e obtemos

$$\tau_g(\psi) = \tau_g(\psi_1 + \ldots \psi_n) = \tau_g(\psi_1) + \ldots \tau_g(\psi_n) \in E.$$

Resta provar para $\dim F = 1$. Seja $F = \operatorname{span}\{f\}$. $\varphi^*(f) \in A(G\times X)$, logo por 4.1 existem $\alpha_i \in A(G)$ e $\beta_i \in A(X)$ (com $1 \le i \le r \in \mathbb{N}$) tais que

$$\varphi^*(f)(g,x) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(g)\beta_i(x).$$

Dessa forma, fixado $g \in G$,

$$\begin{aligned}\tau_g(f) &= f\circ\varphi(g,\cdot) = \varphi^*(f)(g,\cdot)\\ \implies \tau_g(f) &= \sum_{i=1}^{r}\alpha_i(g)\beta_i.\end{aligned}$$

Como g está fixado, os $\alpha_i(g)$ são elementos de $\mathbf{k}$, assim $\tau_g(f)$ é combinação linear dos β_i. Logo,

$$\begin{aligned} &\operatorname{span}\{\tau_g(f) \mid g \in G\} \subset \operatorname{span}\{\beta_i\}_{i=1}^r \\ \implies &\dim \operatorname{span}\{\tau_g(f) \mid g \in G\} \leq \dim \operatorname{span}\{\beta_i\}_{i=1}^r < \infty. \end{aligned}$$

Assim, definindo

$$E \doteq \operatorname{span}\left(\{f\} \cup \{\tau_g(f) \mid g \in G\}\right),$$

temos $\dim E < \infty$, $F \subset E$ e $\tau_g(f) \subset E$ para todo g.
Para todo $x \in X$,

$$\begin{aligned} \tau_g(\tau_h(f))(x) &= \tau_h(f)(g^{-1} \cdot x) = f(h^{-1} \cdot (g^{-1} \cdot x)) \\ &= f((h^{-1}g^{-1}) \cdot x) = f((gh)^{-1} \cdot x) \\ &= \tau_{gh}(f)(x). \end{aligned}$$

Portanto, fixado $g \in G$,

$$\begin{aligned} &\tau_g(\tau_h(f)) = \tau_{gh}(f), \forall h \in G \\ \implies &\tau_g(\tau_h(f)) \in E, \forall h \in G. \end{aligned}$$

Como τ_g é $\mathbf{k}$-linear, segue que $\tau_g(E) \subset E$. □

Proposição 4.3. *Seja G um grupo algébrico que age sobre uma variedade X, e seja E um subespaço de dimensão finita de $A(X)$ tal que $\tau_g(E) \subset E$ para todo $g \in G$. Então, dado $f \in E$, $\varphi^*(f)$ se escreve como*

$$\varphi^*(f)(g, x) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(g)\beta_i(x),$$

para algum $r \in \mathbb{N}$, com $\alpha_i \in A(G)$ e $\beta_i \in E$ para cada i.

Demonstração. Por 4.1, se $f \in A(X)$, $\varphi^*(f)$ se escreve como

$$\varphi^*(f)(g, x) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(g)\beta_i(x),$$

para algum $r \in \mathbb{N}$, com $\alpha_i \in A(G)$ e $\beta_i \in A(X)$ para cada i, de modo que o conjunto dos α_i seja linearmente independente.
Seja $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de E, e estendamos a uma base $\{v_i\}_{i=1}^n \amalg W$ de $A(X)$. Escrevendo β_i nessa base, temos

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j} v_j + \sum_{l=1}^{m} \mu_{i,l} w_l, \tag{4}$$

com $\lambda_{i,j}, \mu_{i,l} \in \mathbf{k}$ e $w_l \in W$.
Fixado $g \in G$, temos $\alpha_i(g) \in \mathbf{k}$ para cada i. Assim,

$$\begin{aligned}
\tau_g(f) &= \varphi^*(f)(g, \cdot) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(g) \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j} v_j + \sum_{l=1}^{m} \mu_{i,l} w_l \right) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_i(g) \lambda_{i,j} v_j + \sum_{l=1}^{m} \alpha_i(g) \mu_{i,l} w_l \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i(g) \lambda_{i,j} v_j \right) + \left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{l=1}^{m} \alpha_i(g) \mu_{i,l} w_l \right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i(g) \lambda_{i,j} \right) v_j \right) + \left(\sum_{l=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i(g) \mu_{i,l} \right) w_l \right)
\end{aligned}$$

é a expressão de $\tau_g(f)$ na base $\{v_i\}_{i=1}^n \amalg W$. Se $f \in E$, temos $\tau_g(f) \in E$, logo

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i(g) \mu_{i,l}, \forall l \in \{1, \dots, m\}.$$

Como isso vale para todo $g \in G$ (e os $\mu_{i,l}$ não dependem de g), temos

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mu_{i,l}, \forall l \in \{1, \dots, m\}.$$

Sendo $\{\alpha_i\}_{i=1}^r$ l.i., todos os $\mu_{i,l}$ devem ser nulos. De 4, concluímos que $\beta_i \in E$ para todo i. □

Todo grupo algébrico age sobre si pela ação

$$\begin{aligned}
G \times G &\to G \\
(g, h) &\mapsto hg^{-1}
\end{aligned}$$

que é morfismo por ser composição de θ e ι. Com essa ação, $\varphi(g, x)$ passa a ser xg, e

$$\tau_g(f)(x) = \varphi^*(f)(g, x) = f(xg), \forall x, g \in G.$$

Essa será a notação usada na demonstração do próximo teorema.
A partir daqui é preciso considerar a definição mais abrangente de variedades, que faz de GL_n um grupo algébrico (não afim). Essa definição não será exposta aqui, pois será usada brevemente, aliada ao lema abaixo:

Lema 4.4. *Sejam G e G' grupos algébricos, e seja $\phi\colon G \to G'$ um morfismo de grupos algébricos. Então $\phi(G)$ é um subgrupo fechado de G'.*

Teorema 4.5. *Todo grupo algébrico afim é isomorfo a um subgrupo fechado de algum GL_n.*

Demonstração. Seja G um grupo algébrico afim. $A(G)$ é uma $\mathbf{k}$-álgebra finitamente gerada, logo existe subconjunto finito F que gera $A(G)$. Pela proposição 4.2, existe subespaço E de $A(G)$ de dimensão finita que contém $\operatorname{span} F$ e tal que $\tau_g(E) \subset E$ para todo $g \in G$.
Seja $\{f_1, \dots, f_n\}$ base de E. Fixado i, podemos escrever (por 4.3)

$$\varphi^*(f_i)(g,x) = \sum_{l=1}^{r} \alpha_{i,l}(g)\beta_{i,l}(x), \tag{5}$$

para algum $r \in \mathbb{N}$, com $\alpha_{i,l} \in A(G)$ e $\beta_{i,l} \in E$ para cada l. Os $\beta_{i,l}$ se escrevem como combinação linear dos f_j, assim

$$\beta_{i,l} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,l,j} f_j,$$

com $\lambda_{i,l,j} \in \mathbf{k}$. Portanto, a igualdade em 5 fica

$$\begin{aligned}
\varphi^*(f_i)(g,x) &= \sum_{l=1}^{r} \alpha_{i,l}(g) \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,l,j} f_j(x) \right) \\
&= \sum_{l=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,l,j} \alpha_{i,l}(g) f_j(x) \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{r} \lambda_{i,l,j} \alpha_{i,l}(g) \right) f_j(x).
\end{aligned}$$

Definamos

$$m_{i,j}(g) \doteq \sum_{l=1}^{r} \lambda_{i,l,j} \alpha_{i,l}(g).$$

Para cada $g \in G$, temos que $\varphi^*(f_i)(g, \cdot) = \tau_g(f_i)$, logo

$$\tau_g(f_i) = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}(g)(f_j).$$

Assim, os $m_{i,j}(g)$ são as entradas da matriz da transformação $\tau_g|_E \colon E \to E$ na base $\{f_1, \dots, f_n\}$. Como $\tau_g \circ \tau_h = \tau_{gh}$ para todo $h \in G$, segue que $\tau_g|_E$ é inversível (com inversa $\tau_{g^{-1}}|_E$), logo a matriz $[m_{i,j}(g)]$ está em GL_n. Temos então

$$\begin{aligned}
\psi \colon G &\to \mathrm{GL}_n \\
g &\mapsto [m_{i,j}(g)]
\end{aligned}$$

Os $m_{i,j}$ estão em $A(G)$, logo isso é um morfismo de variedades. É também homomorfismo de grupos: como $\tau_g|_E \circ \tau_h|_E = \tau_{gh}|_E$, a matriz de $\tau_{gh}|_E$ deve ser a multiplicação das matrizes de $\tau_g|_E$ e $\tau_h|_E$. Assim,

$$\psi(gh) = [m_{i,j}(gh)] = [m_{i,j}(g)][m_{i,j}(h)] = \psi(g)\psi(h).$$

Dessa forma, ψ é morfismo de grupos algébricos, e pelo lema 4.4 temos que $\psi(G)$ é subgrupo fechado de GL_n.[1] $\square$

Referências

[1] Michel Brion. Introduction to actions of algebraic groups, 2009.
[2] James E. Humphreys. *Linear algebraic groups*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975. Graduate Texts in Mathematics, No. 21.
[3] Dipendra Prasad. Lectures on algebraic groups, 2002.
[4] Patrice Tauvel and Rupert W. T. Yu. *Lie algebras and algebraic groups*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[1] Esta demonstração está incompleta: resta verificar, com auxílio do comorfismo ψ^*, que ψ é isomorfismo de variedades.