Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística

MAT0460 - Introdução à Álgebra Comutativa

17. Funtor Ext e suas propriedades

Roger Ramirez Primolan

São Paulo
Julho de 2020

Sumário

1 Extensões de Módulos

Uma motivação para o estudo de Ext como funtor são as chamadas *EXT*ensões de módulos. Para introduzir esse objeto faremos um paralelo com Teoria de Galois. Lá, uma extensão de corpos é um morfismo de anéis com unidade injetor $\mathbb{K} \overset{\phi}{\rightarrowtail} \mathbb{L}$, que sempre pode ser pensado como uma inclusão. O paralelo isso em teoria dos módulos é trivial, será um homomorfismo de módulos injetor $A \overset{\kappa}{\rightarrowtail} B$. Outro objeto interessante, que é o utilizado para o estudo de extensões de corpos, é o *grupo de Galois* que é dado por $\mathrm{Gal}(\mathbb{L} : \mathbb{K}) = \{\sigma : \mathbb{L} \mapsto \mathbb{L} \mid \sigma$ é um automorfismo de $\mathbb{L}$ que fixa $\mathbb{K}\}$. Esse objeto permite, moralmente, estudar o complementar de $\mathbb{K}$ em $\mathbb{L}$ levando em consideração a estrutura álgebrica deste. Dentro da categoria dos R-módulos, temos um paralelo dessa ideia através do *quociente de módulos*.

Com isso fica motivada a seguinte

Definição 1. Dados dois R-módulos A e B, uma *extensão de A por B* é uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\kappa} E \xrightarrow{\nu} A \longrightarrow 0.$$

Para os nossos estudos, vamos considerar uma equivalência entre extensões dada por

Definição 2. Duas extensões são ditas *equivalentes* quando existe $\xi : E \longmapsto F$ tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\xi"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\phi"] & F \arrow[r, "\psi"] & A \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Assim o objeto de estudo desta seção será o conjunto $\mathrm{E}(A, B)$ das classes de extensões de módulos sob a relação de equivalência acima.

Antes de continuarmos, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1. Dados dois R-módulos, sempre podemos considerar a seguinte extensão trivial $0 \longrightarrow B \xrightarrow{i} A \oplus B \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$, ou seja, $\mathrm{E}(A, B)$ nunca é um conjunto vazio.

Exemplo 2. Além disso, tomando $\mu : \mathbb{Z} \longmapsto \mathbb{Z}$ dada por $\mu(n) = 3n$ e $\epsilon, \epsilon' : \mathbb{Z} \longmapsto \mathbb{Z}_3$ os mapas induzidos por $1 \longmapsto \bar{1}$ e $1 \longmapsto \bar{2}$, respectivamente, temos que as seguintes extensões

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\mu} \mathbb{Z} \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}_3 \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\mu} \mathbb{Z} \xrightarrow{\epsilon'} \mathbb{Z}_3 \longrightarrow 0$$

não são equivalentes, isto é, $\mathrm{E}(A, B)$ pode ter mais de um elemento.

Agora que temos essas definições, veremos como interpretar extensões como funtores. Primeiro, vamos transformar $\mathrm{E}(-, B)$ em um funtor contravariante da categoria de R-módulo para a categoria de conjuntos. Já temos um mapa entre objetos, a saber $B \longmapsto \mathrm{E}(A, B)$, portanto falta definir um mapa entre morfismos. Para isso, usaremos os seguintes lemas

Lema 1. *O quadrado comutativo*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & A \arrow[d, "\phi"] \\ B \arrow[r, "\psi"] & X \end{tikzcd}$$

é um diagrama de pull-back *se, e somente se, a seguinte sequência*

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{\{\alpha,\beta\}} A \oplus B \xrightarrow{\langle\phi,-\psi\rangle} X \longrightarrow 0$$

é exata, em que $\{\alpha, \beta\}(y) = (\alpha(y), \beta(y))$ *e* $\langle\phi, -\psi\rangle(a, b) = \phi(a) + (-\psi)(b)$

Demonstração. Temos que dois mapas $\gamma : Z \longmapsto A$ e $\delta : Z \longmapsto B$ fazem o seguinte diagrama comutar

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\delta"] & A \arrow[d, "\phi"] \\ B \arrow[r, "\psi"] & X \end{tikzcd}$$

se, e somente se, $\langle\phi, -\psi\rangle \circ \{\gamma, \delta\} = 0$. Assim, basta mostrar que a propriedade universal do *pull-back* é a mesma que a propriedade universal do *kernel* de $\langle\phi, \psi\rangle$.

De fato, a propriedade universal do *kernel* garante a existência de um único mapa $\zeta : Z \longmapsto Y$ tal que $\{\alpha, \beta\} \circ \zeta = \{\gamma, \delta\}$, enquanto a propriedade universal do *pull-back* garante a existência de um único mapa $\zeta : Z \longmapsto Y$ tal que $\alpha \circ \zeta = \gamma$ e $\beta \circ \zeta = \delta$. □

Lema 2. *Se*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & A \arrow[d, "\phi"] \\ B \arrow[r, "\psi"] & X \end{tikzcd}$$

é um quadrado comutativo, então valem:

- β *induz um isomorfismo entre* $\ker(\alpha)$ *e* $\ker(\psi)$
- *se* ψ *é um epimorfismo, então* α *é um epimorfismo.*

Demonstração. Primeiro Item: é sabido que se (J, μ) é um *kernel* de α, então $(J, \beta \circ \mu)$ é um *kernel* para ψ e, reciprocamente, se (J, ν) é um *kernel* para ψ, então ν pode ser fatorado como $\nu = \beta \circ \mu$, em que (J, μ) é um *kernel* para α. Assim, temos que β induz um isomorfismo $\ker(\alpha) \cong \ker(\psi)$. No caso de R-módulos, esse isomorfismo é dado por $x \longmapsto \beta(x)$.
Segundo Item: Pelo Lema 1, temos que

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{\{\alpha,\beta\}} A \oplus B \xrightarrow{\langle\phi,-\psi\rangle} X \longrightarrow 0$$

é exata. Logo, se $a \in A$, como ψ é um epimorfismo (que na categoria dos R-módulos é equivalente a ser um morfismo sobrejetor), então existe $b \in B$ tal que $\phi(a) = \psi(b)$. Assim, $(a, b) \in \ker\langle\phi, \psi\rangle = \mathrm{Im}(\{\alpha, \beta\})$, portanto existe $y \in Y$ tal que $\alpha(y) = a$ e $\beta(y) = b$ e, em particular, α é sobrejetora, i.e., um epimorfismo $\square$

Lema 3. *Seja*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\kappa'} & E' & \xrightarrow{\nu'} & A' & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \xi} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha'} & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\kappa} & E & \xrightarrow{\nu} & A & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

um diagrama comutativo, então o quadrado da direira é um diagrama de pull-back*.*

Demonstração. Seja

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\epsilon} & A' \\ \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ E & \xrightarrow{\nu} & A \end{array}$$

um diagrama de *pull-back*. Então ϵ é um epimorfismo e ϕ induz um isomorfismo, θ, entre $\ker(\epsilon) \mapsto \ker(\nu)$. Com isso, constrói-se a seguinte extensão

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\theta^{-1}\circ\kappa} P \xrightarrow{\epsilon} A' \longrightarrow 0.$$

Seja, devido a propriedade universal do *pull-back*, $\zeta : E' \longmapsto P$ tal que $\epsilon \circ \zeta = \nu'$ e $\phi \circ \zeta = \xi$. A primeira condição junto com a construção de $\mu = \theta^{-1} \circ \kappa$ garante que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\kappa'} & E' & \xrightarrow{\nu'} & A' & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \zeta} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\mu} & P & \xrightarrow{\epsilon} & A' & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Pelo *lema dos 5*, temos que ζ é um isomorfismo e, portanto, que o quadrado da direita é um diagrama de *pull-back*. $\square$

Agora estamos em condições de continuar com a construção do funtor $\mathrm{E}(-, B)$. Dado um morfismo $\alpha : A' \longmapsto A$ e um representante

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\kappa} E \xrightarrow{\nu} A \longrightarrow 0.$$

de uma classe de extensões, o Lema 3 nos constrói uma extensão

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\kappa'} E^{\alpha} \xrightarrow{\nu'} A' \longrightarrow 0,$$

em que (E^{α}, ν', ξ) é o *pull-back* de (ν, α). Além disso, sabendo que *pull-back* de *pull-back* é *pull-back*, o Lema 3 garante que o seguinte mapa $\mathrm{E}(\alpha, B) : \mathrm{E}(A, B) \longmapsto \mathrm{E}(A', B)$ dado por

$$
\begin{array}{c}
classe(0 \longrightarrow B \xrightarrow{\kappa} E \xrightarrow{\nu} A \longrightarrow 0) \\
\downarrow \\
classe(0 \longrightarrow B \xrightarrow{\kappa'} E^{\alpha} \xrightarrow{\nu'} A \longrightarrow 0)
\end{array}
$$

está bem definido.

Temos então o seguinte

Teorema 1. $\mathrm{E}(-, B)$ *é um funtor contravariante.*

Demonstração. Se $id_A : A \longmapsto A$, então $\mathrm{E}(id_A, B) = id_{\mathrm{E}(A,B)}$ por construção.

Se $\alpha : A' \longmapsto A$ e $\alpha'' : A'' \longmapsto A'$, então o seguinte diagrama comutativo

$$
\begin{tikzcd}
(E^{\alpha})^{\alpha'} \arrow[r, "\mu''"] \arrow[d, "\xi'"] & A'' \arrow[d, "\alpha'"] \\
(E^{\alpha}) \arrow[r, "\mu'"] \arrow[d, "\xi"] & A' \arrow[d, "\alpha"] \\
E \arrow[r, "\mu"] & A
\end{tikzcd}
$$

nos diz, usando que *pull-back* de *pull-back* é *pull-back*, que $\mathrm{E}(\alpha \circ \alpha', B) = \mathrm{E}(\alpha', B)\,\mathrm{E}(\alpha, B)$. $\square$

Analogamente, usando versões duais dos Lemas 1, 2 e 3, para cada morfismo $\beta : B \longmapsto B'$, constrói-se usando *push-out* um mapa $\mathrm{E}(A, \beta) : \mathrm{E}(A, B) \longmapsto \mathrm{E}(A, B')$ com o qual temos o seguinte

Teorema 2. $\mathrm{E}(A, -)$ *é um funtor covariante.*

A título de curiosidade, o leitor encontra em [HS97] a demonstração bem técnica do seguinte fato: $\mathrm{E}(A', \beta)\,\mathrm{E}(\alpha, B) = \mathrm{E}(\alpha, B')\,\mathrm{E}(A, \beta)$. Com isso temos o seguinte

Teorema 3. $\mathrm{E}(-, -)$ *é um bifuntor.*

2 Outra Construção

2.1 Cohomologia

Nesta seção falaremos de uma construção alternativa para o funtor Ext, que é mais abrangente e nos dá infinitos funtores. O ponto negativo dessa abordagem é a necessidade de uma abstração maior, a saber, ela é feita através dos métodos e técnicas de *Álgebra Homológica*. Assim, antes de começar a construção desses funtores, faz-se necessário definir alguns objetos.

Definição 3. Um *complexo de cocadeias de R-módulos* é um par

$$((C^n)_{n\in\mathbb{Z}}, (d^n : C^n \to C^{n+1})_{n\in\mathbb{Z}})$$

em que cada C^n é um R-módulo, cada d^n é um morfismo de R-módulos e $d^n \circ d^{n-1} = 0$. Um complexo de cocadeias será denotado por $(C^\bullet, d^\bullet)$ ou $C^\bullet$

Definição 4. um *morfismo entre complexos* $A^\bullet$ e $B^\bullet$ é uma sequência de morfismos de R-módulos $(f^n : A^n \to B^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tais que $f^{n+1} \circ d_A^n = d_B^n \circ f^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Pictoricamente, é uma sequência de morfismos que faz o seguinte diagrama ser comutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^{n-1} \arrow[r, "d_A^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"] & A^n \arrow[r, "d_A^n"] \arrow[d, "f^n"] & A^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B^{n-1} \arrow[r, "d_B^{n-1}"] & B^n \arrow[r, "d_B^n"] & B^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Com essas definições estamos em condições de definir o que é a *cohomologia* de um complexo de cocadeias, objeto que será fundamental na construção que faremos.

Definição 5. A *n-ésima cohomologia* de um complexo de cocadeias $C^\bullet$ é definida como o seguinte grupo abeliano

$$\mathrm{H}^n(C^\bullet) = \ker(d^n)/\operatorname{Im}(d^{n-1}).$$

Uma relação fundamental entre esses objetos é o tópico da seguinte

Proposição 1. *Se $A^\bullet$ e $B^\bullet$ são dois complexos de cocadeias e $f^\bullet : A^\bullet \to B^\bullet$, então para cada inteiro $f^\bullet$ induz um morfismo de grupos*

$$\mathrm{H}^n(f^\bullet) : \mathrm{H}^n(A^\bullet) \to \mathrm{H}^n(B^\bullet),$$

dado por $\mathrm{H}^n(f^\bullet)([z_n]) = [f^n(z_n)]$

Demonstração. Precisamos primeiro mostrar que se $z_n \in \ker(d_A^n)$, então $f^n(z_n) \in \ker(d_B^n)$. De fato, pela definição de morfismo de cocadeia, temos $d_B^n \circ f^n(z_n) = f^{n+1} \circ d_A^n(z_n) = 0$.

Para mostrar que não depende da escolha de representante, se $[x], [y] \in \mathrm{H}^n(A^\bullet)$ e $[x] = [y]$, então $x, y \in \ker(d_A^n)$ e $x - y \in \operatorname{Im}(d_A^{n-1})$. Logo existe $a \in A^{n-1}$ tal que $x - y = d_A^{n-1}(a)$. Aplicando f^n em ambos os lados, obtemos que $f^n(x) - f^n(y) = f^n \circ d_A^{n-1}(a) = d_B^{n-1} \circ f^{n-1}(a)$. Portanto $f^n(x) - f^n(y) \in \operatorname{Im}(d_B^{n-1})$ e o mapa do enunciado está bem definido. É trivial ver que ele é um morfismo de grupos abelianos. $\square$

Agora, partiremos para outra definição e veremos como ela se relaciona com a proposição acima.

Definição 6. Dois morfismos de complexos $f^\bullet, g^\bullet : A^\bullet \to B^\bullet$ são ditos *homotópicos* quando existe uma sequência de morfismos $s_n : A^n \to B^{n-1}$ tal que

$$f^n - g^n = d_B^{n-1} \circ s_n + s_{n+1} \circ d_A^n$$

Seguem das definições que

Proposição 2. *Se* $f^\bullet, g^\bullet : A^\bullet \to B^\bullet$ *são homotópicos, então* $\mathrm{H}^n(f^\bullet) = \mathrm{H}^n(g^\bullet)$

Agora estamos em condições de provar uma proposição importante para a construção dos funtores Ext.

Proposição 3. *Se*

$$0 \longrightarrow A^\bullet \xrightarrow{i^\bullet} B^\bullet \xrightarrow{p^\bullet} C^\bullet \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata de complexos, então existem morfismos $\partial^n : \mathrm{H}^n(C^\bullet) \to \mathrm{H}^{n+1}(A^\bullet)$*, chamados de* morfismos conectores.

Demonstração. Se $z_n \in \ker d_C^n$, então existe $b \in B^n$ tal que $p^n(b) = z_n$. Note que $p^{n+1}d_B^n(b) = d_C^n p^n(b) = d_C^n(z_n) = 0$, logo $d_B^n(b) \in \ker p^{n+1}$. Assim existe um único elemento $a \in A^{n+1}$ tal que $i^{n+1}(a) = d_B^n$. A ideia é definir o mapa como $[z_n] \longmapsto [a]$.

Vamos então mostrar o mapa dessa ideia está bem definido. Primeiramente, se $b, \hat{b} \in B^n$ são tais que $p^n(b) = p^n(\hat{b}) = z_n$, então $b - \hat{b} \in \ker p^n$, logo existe $\hat{a} \in A^n$ tal que $i^n(\hat{a}) = b - \hat{b}$. Logo $d_B^n(b) - d_B^n(\hat{b}) = d_B^n i^n(\hat{a}) = i^{n+1}d_A^n(\hat{a})$, ou seja, a pré-imagem de $d_B^n(b - \hat{b})$ por i^{n+1} pertence a $\operatorname{Im} d_A^n$. Vamos mostrar agora que $a \in \ker d_A^{n+1}$. De fato, temos $i^{n+2}d_A^{n+1}(a) = d_B^{n+1}i^{n+1}(a) = d_B^{n+1}d_B^n(b) = 0$ e, sendo i^{n+2} injetora, temos que $a \in \ker d_A^{n+1}$. Ou seja, agora temos que está bem definido o seguinte mapa

$$\ker d_C^n \ni z_n \longmapsto [a] \in \ker d_A^{n+1} / \operatorname{Im} d_A^n.$$

É facil de mostrar que é um homomorfismo de grupos. Agora vamos mostrar que $\operatorname{Im} d_C^{n-1}$ está contido no *kernel* desse mapa. De fato, se $z_n = d_C^{n-1}(c)$, então temos que existe $\hat{b} \in B^{n-1}$ tal que $c = p^{n-1}(\hat{b})$. Ou seja, temos que $p^n(b) = z_n = d_C^{n-1}p^{n-1}(\hat{b})$ e, portanto, $b - d_B^{n-1}(\hat{b}) \in \ker p^n = \operatorname{Im} i^n$. Seja $\hat{a} \in A^n$ tal que $b - d_B^{n-1}(\hat{b}) = i^n(\hat{a})$. Assim, temos que $d_B^n(b) = d_B^n i^n(\hat{a}) + d_B^n d_b^{n-1}(\hat{b}) = i^{n+1}d_A^n(\hat{a})$, com isso, provamos que a pré-imagem de b por i^{n-1} pertence a $\operatorname{Im} d_A^n$, o que conclui a demonstração. $\square$

Por fim, o último resultado sobre cohomologia que precisaremos é bem técnico e sua demonstração se encontra em [Rot09]. Ele nos diz

Proposição 4. *Se*

$$0 \longrightarrow A^\bullet \xrightarrow{i^\bullet} B^\bullet \xrightarrow{p^\bullet} C^\bullet \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata de complexos, então a seguinte sequência é exata

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^{n-1}(C^\bullet) \xrightarrow{\partial^{n-1}} \mathrm{H}^n(A^\bullet) \xrightarrow{\mathrm{H}^n(i^\bullet)} \mathrm{H}^n(B^\bullet) \xrightarrow{\mathrm{H}^n(p^\bullet)} \mathrm{H}^n(C^\bullet) \xrightarrow{\partial^{n+1}} \mathrm{H}^{n+1}(A^\bullet) \longrightarrow \cdots$$

2.2 Módulos Injetivos

Para continuar a construção dos funtores Ext vamos falar um pouco sobre um tipo específico de R-módulos: os *injetivos*. Um R-módulo I é dito *injetivo* quando para todo homomorfismo injetor $f : A \to B$ e todo homomorfismo $\alpha : A \to I$ existe um homomorfismo $\beta : B \to I$ tal que $\beta \circ \alpha = f$, em diagramas:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[dl, dashed, "\beta"] \\ I. & \end{tikzcd}$$

A categoria dos R-módulos "funciona bem" com módulos injetivos, no sentido que todo R-módulo A pode ser imerso em algum R-módulo injetivo, ou seja, sempre existe um mapa $A \overset{\epsilon}{\rightarrowtail} I$, para algum I injetivo. Com esse fato, é fácil mostrar que para todo R-módulo A existe uma sequência exata longa

$$A \overset{\epsilon}{\rightarrowtail} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \xrightarrow{d^1} \cdots,$$

que é chamada de *resolução injetiva* de A. A seguir, veremos dois lemas sobre resoluções injetivas.

Lema 4. *Se A e B são R-módulos, $f : A \to B$ é um homomorfismo de R-módulos e*

$$A \overset{\epsilon}{\rightarrowtail} I^0 \xrightarrow{d_I^0} I^1 \xrightarrow{d_I^1} \cdots$$

e

$$B \overset{\eta}{\rightarrowtail} J^0 \xrightarrow{d_J^0} J^1 \xrightarrow{d_J^1} \cdots,$$

são resoluções injetivas de A e B, respectivamente, então existem $f^n : I^n \to J^n$ tais que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "\epsilon"] \arrow[d, "f"] & I^0 \arrow[r, "d_I^0"] \arrow[d, "f^0"] & I^1 \arrow[r, "d_I^1"] \arrow[d, "f^1"] & \cdots \\ B \arrow[r, tail, "\eta"] & J^0 \arrow[r, "d_J^0"] & J^1 \arrow[r, "d_J^1"] & \cdots \end{tikzcd}$$

Além disso, essas funções são únicas a menos de homotopia.

Demonstração. Provaremos por indução em $n \in \mathbb{N}$. O caso $n = 0$ segue da definição de injetivos tomando $\alpha = \eta \circ f$. Suponha construído até n e considere o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} I^n \arrow[rr, "d_I^n"] \arrow[d, two heads] & & I^{n+1} \\ \operatorname{coker} d_I^{n-1} = I^n / \ker d_i^n \cong \operatorname{Im} d_I^n = \ker d_I^{n+1}. \arrow[urr, tail] & & \end{tikzcd}$$

Assim, pela propriedade universal do cokernel existe um homomorfismo $k : \ker d_I^{n+1} \to J^{n+1}$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
I^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] & I^n \arrow[r, two heads] \arrow[dr, "d_J^n \circ f^n"'] & \ker d_I^{n+1} \arrow[d, dashed, "k"] \\
 & & J^{n+1}.
\end{tikzcd}$$

Pela propriedade universal de onbetos injetivos, existe f^{n+1} tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
\ker d_I^n \arrow[r, tail] \arrow[d, "k"] & I^{n+1} \arrow[dl, "f^{n+1}"] \\
J^{n+1},
\end{tikzcd}$$

o que conclui o passo indutivo.

A prova segunda parte é mais técnica e o leitor pode encontrá-la em [dCT19] $\square$

Outro resultado importante, cuja demonstração também pode ser encontrada em [dCT19] é:

Lema 5. *Se* $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow C \xrightarrow{g} 0$ *é uma sequência exata curta e*

$$A \overset{\epsilon}{\rightarrowtail} I^0 \xrightarrow{d_I^0} I^1 \xrightarrow{d_I^1} \cdots$$

e

$$C \overset{\eta}{\rightarrowtail} J^0 \xrightarrow{d_J^0} J^1 \xrightarrow{d_J^1} \cdots$$

são resoluções injetivas para A e C, então existe uma resolução injetiva para B

$$B \overset{\zeta}{\rightarrowtail} K^0 \xrightarrow{d_K^0} K^1 \xrightarrow{d_K^1} \cdots$$

tal que existe um diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "\epsilon"] \arrow[d, tail, "f"] & I^0 \arrow[r, "d_I^0"] \arrow[d, tail, "i^0"] & I^1 \arrow[r, "d_I^1"] \arrow[d, tail, "i^1"] & \cdots \\
B \arrow[r, tail, "\zeta"] \arrow[d, two heads, "g"] & K^0 \arrow[r, "d_K^0"] \arrow[d, two heads, "p^0"] & K^1 \arrow[r, "d_K^1"] \arrow[d, two heads, "p^1"] & \cdots \\
C \arrow[r, tail, "\eta"] & J^0 \arrow[r, "d_J^0"] & I^1 \arrow[r, "d_J^1"] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

Note que, por cada K^n ser injetivo, as linhas a partir da segunda no diagrama acima sempre cindem.

2.3 Construção dos Funtores Ext.

Agora temos todos os resultados e definições necessárias para continuar com a construção dos funtores Ext.

Dados dois R-módulos A e B, tome

$$\mathbf{E} = \ 0 \longrightarrow B \xrightarrow{\eta} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} \cdots$$

uma resolução injetiva para B. Chame de $\mathbf{E^B}$ a *resolução injetiva deletada* de B, ou seja, o complexo

$$\mathbf{E^B} = \ 0 \longrightarrow E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} \cdots.$$

Aplicando o funtor exato a esquerda e covariante $\mathrm{Hom}_R(A, -)$ ao complexo $\mathbf{E^B}$ obtemos o seguinte complexo

$$\mathrm{Hom}_R(A, \mathbf{E^B}) = \ 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, E^0) \xrightarrow{d^0_*} \mathrm{Hom}_R(A, E^1) \xrightarrow{d^1_*} \cdots.$$

Defina agora $\mathrm{Ext}^n_R(A, B)_\mathbf{E} = \mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_R(A, \mathbf{E^B}))$. Se $f : B \to B'$ é um homomorfismo de módulos, tomando uma resolução injetiva $0 \longrightarrow B' \longrightarrow \mathbf{J}$, o Lema 4 garante, a menos de homotopia, um morfismo de complexos $f^\bullet : \mathbf{E_B} \to \mathbf{J_{B'}}$ e, pela Proposição 2, define-se $H^n(\mathbf{f}_*)_{\mathbf{E},\mathbf{J}} : \mathrm{Ext}^\mathbf{n}_\mathbf{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B})_\mathbf{E} \to \mathrm{Ext}^\mathbf{n}_\mathbf{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B}')_\mathbf{J}$.

Com essa construção, temos que Ext foi definido como o funtor derivado à direita de $\mathrm{Hom}_R(A, -)$. Um fato conhecido é que essa definição não depende da resolução injetiva tomada. A demonstração desse fato pode ser encontrada em [Rot09]. A ideia segue do Lema 4, pois dadas duas resoluções injetivas $0 \longrightarrow B \longrightarrow \mathbf{E}$ e $0 \longrightarrow B \longrightarrow \mathbf{J}$, ele garante morfismos de complexos $f^\bullet : \mathbf{E^B} \to \mathbf{J^B}$ e $g^\bullet : \mathbf{J^A} \to \mathbf{E^A}$ induzidos pela identidade de B. Devido as composições desses morfismos serem homotópicas as respectivas identidades, eles induzem isomorfismos naturais entre $\mathrm{Ext}^n_R(A, B)_\mathbf{E}$ e $\mathrm{Ext}^n_R(A, B)_\mathbf{J}$. Assim, a partir de agora o subescrito da resolução injetiva será omitido.

Devido ao caráter da construção, todos os lemas, definições e resultados podem ser adaptados à resoluções projetivas. Com isso, é possível definir Ext a partir de resoluções projetivas e utilizando funtores derivados à direita contravariantes utilizando o funtor $\mathrm{Hom}_R(-, B)$. Novamente, no [Rot09] se encontra uma demonstração de que as cohomologias construidas via resoluções projetivas e resoluções injetivas são isomorfas, ou seja, $\mathrm{Ext}^n_{proj}(A, B) \cong \mathrm{Ext}^n_{inj}(A, B)$. Além disso, o leitor também encontra no [Wei94] uma demonstração de que $\mathrm{Ext}^1_R(A, B) \cong E(A, B)$, então essa construção generaliza a noção de extensão de módulos. Vejamos agora alguns exemplos de cálculos de Ext.

Exemplo 3. Temos os seguintes cálculos:

- $\mathrm{Ext}^0_R(A, B) \cong \mathrm{Hom}_R(A, B)$: pois $\mathrm{Hom}_R(A, -)$ é exato à esquerda, assim

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, B) \xrightarrow{\eta_*} \mathrm{Hom}_R(A, E^0) \xrightarrow{d^0_*} \mathrm{Hom}_R(A, E^0) \longrightarrow \cdots$$

  é exata. Logo $\mathrm{Ext}^0_R(A, B) = \ker d^0_* \cong \mathrm{Hom}_R(A, B)$

- Se
$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0,$$
então existe uma sequência exata longa
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(A,M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(A,N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(A,P) \arrow[dlll] \\ \mathrm{Ext}^1_R(A,M) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_R(A,N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_R(A,P) \arrow[r] & \cdots : \end{tikzcd}$$
pois pelo Lema 5 existe uma sequência exata de complexos
$$0 \longrightarrow I^M \longrightarrow K^N \longrightarrow J^P \longrightarrow 0,$$
de tal modo que a sequência
$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, I^M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, K^N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, J^P) \longrightarrow 0,$$
é exata, logo pela Proposição 4 essa sequência induz uma sequência exata nas cohomologias, que são os Ext.

- Se I é injetivo, então $0 \to I \to I \to 0$ é uma resolução injetiva, donde $\mathrm{Ext}^n_R(A, I) = 0$ para todo $1 \leqq n$

- Se A e B são grupos abelianos, então, como objetos injetivos e os divisíveis são os mesmos na categoria dos $\mathbb{Z}$-módulos e quociente de divisível é divisível, temos uma resolução injetiva
$$0 \longrightarrow B \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow 0,$$
assim $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(A, B) = 0$ para todo $2 \leqq n$

3 Propriedades Básicas

Agora que temos uma construção bem abstrata de funtores Ext^*_R de R-módulos para grupos abelianos, vejamos algumas propriedades básicas que esses funtores satisfazem. A primeira delas diz como calculá-los em somas e produtos.

Teorema 4 (Somas e Produtos)**.** *Seja $(A_k)^{k \in K}$ uma família de R-módulos. Então, para qualquer R-módulo B e qualquer inteiro $n \geqq 0$, valem:*

- $\mathrm{Ext}^n_R(\bigoplus_{k \in K} A_k, B) \cong \prod_{k \in K} \mathrm{Ext}^n_R(A_k, B)$.
- $\mathrm{Ext}^n_R(B, \prod_{k \in K} A_k) \cong \prod_{k \in K} \mathrm{Ext}^n_R(A, B_k)$

Demonstração. Prova do primeiro item: Para cada $k \in K$ tome uma apresentação projetiva de A_k

$$0 \longrightarrow L_k \longrightarrow P_k \longrightarrow A_k \longrightarrow 0,$$

ou seja, nessa sequência exata o módulo P_k é projetivo. Como soma de projetivos é projetivos, temos que

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{k\in K} L_k \longrightarrow \bigoplus_{k\in K} P_k \longrightarrow \bigoplus_{k\in K} A_k \longrightarrow 0$$

é uma apresentação projetiva para $\bigoplus_{k\in K} A_k$. Assim, essa sequência exata induz uma sequência exata longa entre os Ext

$$\longrightarrow \operatorname{Ext}_R^{n-1}(\bigoplus_{k\in K} L_k, B) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^{n}(\bigoplus_{k\in K} A_k, B)$$

$$\longrightarrow \operatorname{Ext}_R^{n}(\bigoplus_{k\in K} P_k, B) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^{n}(\bigoplus_{k\in K} L_k, B)$$

$$\longrightarrow \operatorname{Ext}_R^{n+1}(\bigoplus_{k\in K} A_k, B) \longrightarrow \cdots$$

Usaremos essa sequência exata longa para provar por indução em $n \geqq 0$.

O caso em que $n = 0$ é trivial pois $\operatorname{Ext}_R^0(A, B) \cong \operatorname{Hom}_R(A, B)$. Se $n = 1$, então como cada P_k e $\bigoplus_{k\in K} P_k$ são projetivos, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}(\bigoplus P_k, B) \arrow[r] \arrow[d, "\tau"] & \operatorname{Hom}(\bigoplus L_k, B) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\sigma"] & \operatorname{Ext}_R^1(\bigoplus A_k, B) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
\prod \operatorname{Hom}(P_k, B) \arrow[r] & \prod \operatorname{Hom}(L_k, B) \arrow[r, "d"] & \prod \operatorname{Ext}_R^1(A_k, B) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

em que τ e σ são isomorfismos e a primeira linha é um trecho da sequência exata longa acima. É um resultado conhecido que um diagrama comutativo dessa forma permite construir um isomorfismo na seta hachurada de tal modo que o diagrama estendido seja comutativo. Portanto, $\operatorname{Ext}_R^1(\bigoplus_{k\in K} A_k, B) \cong \prod_{k\in K} \operatorname{Ext}_R^1(A_k, B)$.

Suponha que o resultado valha para $1 \leqq n$, então olhando mais para frente na sequência exata longa, um encontra a primeira linha do seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
0 = \operatorname{Ext}_R^n(\bigoplus P_k, B) \arrow[r] & \operatorname{Ext}_R^n(\bigoplus L_k, B) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\theta"] & \operatorname{Ext}_R^{n+1}(\bigoplus A_k, B) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
0 = \prod \operatorname{Ext}_R^n(P_k, B) \arrow[r] & \prod \operatorname{Ext}_R^n(L_k, B) \arrow[r, "d"] & \prod \operatorname{Ext}_R^{n+1}(A_k, B) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Pela hipótese de indução existe θ um isomorfismo. Portanto existe um isomorfismo para a seta hachurada tal que o diagrama estendido seja comutativo, a saber essa seta é $d\theta\delta^{-1}$.

Prova do segundo item: Para cada $k \in K$ tome uma apresentação injetiva de A_k

$$0 \longrightarrow A_k \longrightarrow I_k \longrightarrow M_k \longrightarrow 0,$$

ou seja, nessa sequência exata o módulo I_k é projetivo. Como produto de injetivos é injetivo, temos que

$$0 \longrightarrow \prod_{k\in K} A_k \longrightarrow \prod_{k\in K} I_k \longrightarrow \prod_{k\in K} M_k \longrightarrow 0$$

é uma apresentação projetiva para $\prod_{k\in K} A_k$. Assim, essa sequência exata induz uma sequência exata longa entre os Ext

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n-1}(B, \prod_{k\in K} M_k) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n}(B, \prod_{k\in K} A_k)$$

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n}(B, \prod_{k\in K} I_k) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n}(B, \prod_{k\in K} M_k)$$

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n+1}(B, \prod_{k\in K} A_k)) \longrightarrow \cdots$$

Usaremos essa sequência exata longa para provar por indução em $n \geqq 0$.

O caso em que $n = 0$ é trivial pois $\mathrm{Ext}_R^0(A, B) \cong \mathrm{Hom}_R(A, B)$. Se $n = 1$, então como cada I_k e $\prod_{k\in K} I_k$ são injetivos, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(B, \prod I_k) \arrow[r] \arrow[d, "\tau"] & \mathrm{Hom}(B, \prod M_k) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\sigma"] & \mathrm{Ext}_R^1(B, \prod A_k) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
\prod \mathrm{Hom}(B, I_k) \arrow[r] & \prod \mathrm{Hom}(B, M_k) \arrow[r, "d"] & \prod \mathrm{Ext}_R^1(B, A_k) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

em que τ e σ são isomorfismos e a primeira linha é um trecho da sequência exata longa acima. É um resultado conhecido que um diagrama comutativo dessa forma permite construir um isomorfismo na seta hachurada de tal modo que o diagrama estendido seja comutativo. Portanto, $\mathrm{Ext}_R^1(B, \prod_{k\in K} A_k) \cong \prod_{k\in K} \mathrm{Ext}_R^1(B, A_k)$.

Suponha que o resultado valha para $1 \leqq n$, então olhando mais para frente na sequência exata longa, um encontra a primeira linha do seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
0 = \mathrm{Ext}_R^n(B, \prod I_k) \arrow[r] & \mathrm{Ext}_R^n(B \prod M_k) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\theta"] & \mathrm{Ext}_R^{n+1}(B, \prod A_k) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
0 = \prod \mathrm{Ext}_R^n(B, I_k) \arrow[r] & \prod \mathrm{Ext}_R^n(B, M_k) \arrow[r, "d"] & \prod \mathrm{Ext}_R^{n+1}(B, A_k) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Pela hipótese de indução existe θ um isomorfismo. Portanto existe um isomorfismo para a seta hachurada tal que o diagrama estendido seja comutativo, a saber essa seta é $d\theta\delta^{-1}$. $\square$

Vejamos, agora, como utilizar esse teorema para calcular (alguns) Ext.

Exemplo 4. Considere a seguinte sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\mu_m} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_m \longrightarrow 0.$$

Então o início da sequência exata dos $\operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}}^*$ nos dá a primeira linha do seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, B) \arrow[r, "\mu_m^*"] \arrow[d, "\theta"] & \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, B) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\theta"] & \operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}_m, B) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
B \arrow[r, "\mu_m"] & B \arrow[r, "\pi"] & B/mB \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Como os θ são isomorfismos, temos que existe um isomorfismo para a seta hachurada tal que o diagrama estendido continue comutativo, ou seja, $\operatorname{Ext}_R^1(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}) \cong B/mb$. Assim, quando A é um grupo abeliano finitamente gerado, o teorema dos grupos abelianos finitamente gerados nos permite concluir que A é livre se, e somente se, $\operatorname{Ext}_R^1(A, \mathbb{Z}) = 0$

Toda a discussão feita até agora não impôs nenhuma propriedade para o anel R. Como nosso curso prioriza anéis comutativos, uma pergunta natural de se fazer é o que ocorre quanto assumimos que R é comutativo. Nesse caso, temos que $\operatorname{Hom}_R(A, B)$, para quaisquer R-módulos A e B, é um R-módulo com a ação natural ponto à ponto, ou seja, $(rf)(x) = r(f(x))$. Com isso, temos que o Ext_R^* passa a ser quociente de R-módulos e, portanto, um R-módulo em si. Em outras palavras, eles podem ser pensados como funtores de R-módulos para R-módulos. Um resultado interessante ocorre quando tentamos localizar Ext_R^* por um subconjunto multiplicativo $S \subseteq R$. Para isso, precisaremos do seguinte

Lema 6. *Se A é um módulo* finitamente presentado *e $S \subseteq R$ é um subconjunto multiplicativo, então $S^{-1} \operatorname{Hom}_R(A, B) \cong \operatorname{Hom}_{S^{-1}}(S^{-1}A, S^{-1}B)$.*

Demonstração. Se $A = R^n$, então $S^{-1} \operatorname{Hom}_R(R^n, B) \cong \bigoplus_{i=1}^n S^{-1} \operatorname{Hom}_R(R, B) \cong \bigoplus_{i=1}^n S^{-1}B \cong S^{-1} \operatorname{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}R, S^{-1}B)$.

No caso geral, existe uma sequência exata

$$R^m \longrightarrow R^n \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

assim, aplicando o funtor $\operatorname{Hom}_R(-, B)$, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_{-1} \operatorname{Hom}_R(A, B) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\phi"] & S_{-1} \operatorname{Hom}_R(R^n, B) \arrow[r] \arrow[d, "\tau"] & S_{-1} \operatorname{Hom}_R(R^m, B) \arrow[d, "\sigma"] \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{S^{-1}} R(S^{-1}A, S^{-1}B) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{S^{-1}} R(S^{-1}R^n, S^{-1}B) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{S^{-1}} R(S^{-1}R^m, S^{-1}B).
\end{tikzcd}$$

Pela primeira parte da demonstração, podemos tomar τ e σ como isomorfismos, portanto existe um isomorfismo ϕ tal que o diagrama estendido continue comutativo $\square$

Com esse lema em mãos, podemos provar o seguinte resultado sobre localização dos funtores Ext:

Teorema 5. *Se A é um módulo finitamente gerado sobre um anel (comutativo) noetheriano R, então para todo subconjunto $S \subseteq R$ multiplicativo, para todo R-módulo B e para todo inteiro $0 \leqq n$ vale*

$$S^{-1} \operatorname{Ext}_R^n(A, B) \cong \operatorname{Ext}_{S^{-1}R}^n(S^{-1}A, S^{-1}B)$$

Demonstração. Tome $\mathbf{F} \longrightarrow A \longrightarrow 0$ uma resolução projetiva de A por R-módulos livres finitamente gerados (pois A é finitamente gerado e R é noetheriano). Como S^{-1} é um funtor exato da categoria de R-módulos para a categoria de $S^{-1}R$-módulos, temos que $S^{-1}\mathbf{F} \longrightarrow S^{-1}A \longrightarrow 0$ é uma resolução projetiva de $S^{-1}A$ por S^{-1}-módulos livres finitamente gerados. Assim, temos a seguinte sequência de isomorfismos envolvendo as respectivas cohomologias:

$$S^{-1}\operatorname{Ext}^n_R(A,B) = S^{-1}H^n(\operatorname{Hom}_R(\mathbf{F},B) = S^{-1}kerd_n/imd_{n-1} \cong$$

$$\cong kerS^{-1}d_n/imS^{-1}d_{n-1} = H^n(S^{-1}\operatorname{Hom}_R(\mathbf{F},B) \cong H^n(\operatorname{Hom}_{S^{-1}}(S^{-1}\mathbf{F},B) \cong$$
$$\cong \operatorname{Ext}^n_{S^{-1}R}(S^{-1}A,S^{-1}B).$$

□

Uma aplicação desse resultado é o seguinte

Corolário 1. $\operatorname{Ext}^n_R(A,B) = 0 \iff \operatorname{Ext}^n_{R_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p},B_\mathfrak{p}) = 0,\ \forall\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$.

Referências

[dCT19] Ana Luiza da Conceição Tenorio. Álgebra homológica em topos, 2019.

[HS97] P. J. Hilton and U. Stammbach. *A Course in Homological Algebra.* Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York, 1997.

[Rot09] Joseph J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra.* Universitext. Springer-Verlag New York, 2009.

[Wei94] Charles A. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra.* Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1994.