FEIXES ABELIANOS

EDUARDO MONTEIRO MENDONÇA

Sumário

1. Introdução

O conceito de feixe forte ferramente matemática que permite de forma geral trabalhar com conceitos matemáticos mais gerais de forma "localizada". Podemos pensar em feixes como um o objeto matemático que permite

fazer geometria via álgebra

e

fazer álgebra via geometria

A primeira ideia se dá via cohomologias. Cohomologias são invariantes algébricas associadas a um objeto geométrico/topológico que permite distingui-los a menos de deformações. Existem vários tipos de cohomologias, dentre elas vale citar a *cohomologia de De Rham* e a *cohomologia singular* associada a uma variedade. Feixes primeiro aparaceu como uma construção que permite generalizar definições/construções de cohomologias.

A segunda ideia nasce da ideia que a descrição de um objeto geométrico se dá via seu *espaço topológico* e suas *funções admissíveis*. O feixe então codifica a ideia de localidade e "cola de pedaços" que tais funções normalmente satisfazem. Em vista de sua grande generalidade a teoria de feixes (e mais precisamente, a teoria dos esquemas) apareceu naturalmente no contexto de obter resultados algébricos via conceitos geométricos.

A teoria de feixes teve participação de vários matemáticos durante os anos, dentre eles vale citar:

- Henri Cartan, onde define pela primeira vez, em 1950, o espaço de feixes via o conceito de talos. Cartan usou então o conceito de feixes para dar uma nova prova para o teorema de De Rham, que diz enuncia um isomorfismo entre a cohomologia de De Rham e a cohomologia singular;
- Jean-Pierre Serre, que no artigo "Faisceaux algébriques cohérents" introduziu feixes à geometria algébrica;
- Alexander Grothendieck, que, a partir de 1957, extendeu a teoria de feixes e pré-feixes, de forma intensamente categórica, mudando totalmente a forma e estudar geometria algébrica. Grothendieck intrudusiu diversos conceitos durante seus trabalhos, dentre eles esquemas, cohomologia local, categoria derivadas e muitos outros.

Nesse trabalho daremos uma introdução a feixes e pré-feixes. E mostraremos que eles formam uma categoria que se comporta de forma similar à categoria dos módulos, isto é: tem núcleos e conúcleos, e vale teorema do homomorfismo. (Dessa forma, faz sentido considerar complexos nas categorias de feixes e os cálculos de suas (co)homologias).

Como texto referência, usamos [Ten75], [Bre97], e principalmente [TB14] e [Vak17]. Nesse texto vamos assumir que o leitor esteja familiarizado com conceitos de categorias. Sugerimos a referência [Mac15] para teoria das categorias e [Ass97] para categorias abelianas.

1.1. **Exemplo Motivacional.** Vamos agora construir um exemplo de feixe que permitira obter uma intuição para a definição formal.

Considere um espaço topológico X. Dado um aberto $U \subseteq X$, defina

$$\mathcal{O}(U) = \{f \colon U \to \mathbb{R} \mid f \text{ contínua}\}.$$

Dados $V \subseteq U \subseteq X$ abertos e $f \in \mathcal{O}(U)$, podemos considerar a função restrita a V, $f|_V : V \to \mathbb{R}$. Definimos então uma função

$$\operatorname{res}_{U,V} \colon \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V), \quad f \mapsto f|_V ,$$

para cada par $v \subseteq U$ de abertos em X.

Sabemos que a restrição satisfaz a seguinte propriedade: dados $W \subseteq U \subseteq V$ abertos de X e uma função contínua $f \colon V \to \mathbb{R}$, então $f|_W = (f|_U)|_W$. Assim

$$\operatorname{res}_{U,W} \circ \operatorname{res}_{V,U} = \operatorname{res}_{V,W}.$$

Tal propriedade nos dará a noção de *pré-feixes* em X.

Além disso, sabemos que podemos colar de forma única funções contínuas compatíveis. Mais especificamente, seja um aberto U de X, com cobertura por abertos $\{U_i\}_{i\in I}$, e seja uma família $\{f_i \in \mathcal{O}U_i\}_{i\in i}$, satisfazendo

$$f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i\cap U_j} , \quad \text{para todo } i, j \in I,$$

então a função definida em todo U por

$$f \colon U \to \mathbb{R}, \quad f(x) = f_{i_x}(x), \text{ para algum } i_x \in I \text{tal que } x \in U_{i_x},$$

está bem definida e é contínua. Além disso, f é a única função tal que $f|_{U_i} = f_i$. Tal propriedade de colágem única equivale a noção de *feixes* em X.

Emfim, temos que a noção de continuidade é local. Assim, para estudar conceitos que remetem a continuidade num ponto $p \in X$, como por exemplo convergência, apenas precisamos estudar funções definidas/restritas a uma vizinhança de p. Ou seja, duas funções $f \colon U \to \mathbb{R}$ e $g \colon V \to \mathbb{R}$ definidas em abertos $p \in U, V \subseteq x$ tais que $f|_W = g|_W$, para algum aberto $p \in W \subseteq U \cap V$, são "essencialmente iguais" em relações a propriedades local em p. Essa noção de "igualdade local" defini uma equivalencia, que motivará a definição de *germe* de uma função.

Com essa intuição sobre feixes e germes, podemos então começar a definir formalmente.

2. Feixes e Pré-feixes

2.1. Pré-feixes.

Definição 2.1 (Categoria dos abertos de X)**.** Seja X um espaço topológico. A *categoria dos abertos de* X, denotada por $\mathbf{Op}(X)$, é a categoria com objetos

$$\mathrm{Obj}(\mathbf{Op}(X)) = \{U \subseteq X \mid U \text{aberto}\},$$

e com espaços de morfismos, para $U, V \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Op}(X))$, definido por

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Op}(X)}(U,V) = \begin{cases} \{U \to V\}, & U \subseteq V, \\ \emptyset, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Definição 2.2 (Categoria dos Pré-Feixes)**.** Um *pré-feixe em* X *com valores em* $\mathcal{C}$ é um funtor contravariante $\mathcal{F}\colon \mathbf{Op}(X) \to \mathcal{C}$. Dado abertos $U \subseteq V$ de X, o morfismo $\mathcal{F}(U \to V)$ é chamado *morfismo restrição* e denota-se por $\mathrm{res}_{V,U}\colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$.

A *categoria de pré-feixes em* X *com valores em* $\mathcal{C}$, denotada por $\mathbf{PSh}_{\mathcal{C}}(X)$, é a categoria definida por

$$\mathrm{Obj}(\mathbf{PSh}_{\mathcal{C}}(X)) = \{\mathbf{Op}(X) \to \mathcal{C} \text{ funtor contravariante}\},$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh}_{\mathcal{C}}(X)}(\mathcal{F},\mathcal{G}) = \{\varphi\colon \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G} \text{ tranformação natural}\}, \qquad \forall \mathcal{F},\mathcal{G} \in \mathbf{PSh}_{\mathcal{C}}(X).$$

Assim, seja $\mathcal{F}$ um pré-feixe em X com valores em $\mathcal{C}$. Ao aplicar $\mathcal{F}$ no diagrama $U \to V \to W$, obtemos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(W) \arrow[rr, "\mathrm{res}_{W,V}"] \arrow[dr, "\mathrm{res}_{W,U}"'] & & \mathcal{F}(V) \arrow[dl, "\mathrm{res}_{V,U}"] \\ & \mathcal{F}(U) & \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

Portanto, para qualquer cadeia $U \subseteq V \subseteq W$ de abertos em X temos que a $\mathrm{res}_{V,U} \circ \mathrm{res}_{W,V} = \mathrm{res}_{W,U}$.

Além disso, um morfismo de pré-feixes $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ em $\mathbf{PSh}_{\mathcal{C}}(X)$ é um conjunto de morfismos em $\mathcal{C}$

$$\{\varphi_U\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U) \mid U \in \mathbf{Op}(X)\},$$

tal que para todos $V \subseteq U$ abertos de X, o diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{U,V}"] \arrow[d, "\varphi_U"'] & \mathcal{F}(V) \arrow[d, "\varphi_V"] \\ \mathcal{G}(U) \arrow[r, "\mathrm{res}^{\mathcal{G}}_{U,V}"] & \mathcal{G}(V) \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

O caso particular em que $\mathcal{C}$ é uma categoria com objetos que são conjuntos, chamamos elementos de $\mathcal{F}(U)$, para um aberto $U \subseteq X$, de *sessão de* $\mathcal{F}$ *em* U.

Vamos agora citar vários exemplos de pré-feixes com valores nas categorias: dos conjuntos, **Set**; dos anéis, **Ring**; dos grupos abelianos, **Ab**; ou dos A-módulos (para alguma álgebra A), A-**mod**.

Exemplo 2.3 (Pré-feixe das funções diferenciáveis com valores reais)**.** Seja X variedade diferenciável. Para cada aberto $U \subseteq X$, defina

$$\mathcal{O}_X(U) = \{f\colon U \to \mathbb{R} \text{ diferenciável}\}.$$

Dados $V \subseteq U$ abertos e $f \in \mathcal{O}_X(U)$, claramente $f|_V$ é uma função diferenciável. Assim,

$$\mathrm{res}_{U,V}\colon \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V), \quad f \mapsto f|_V$$

está bem definida e claramente satisfaz (2.1). Portanto $\mathcal{O}_X$ define um pré-feixe em X com valores em **Set**. Repare que $\mathcal{O}_X(U)$ tem estrutura de grupo abeliano ou anel (com multiplicação e soma ponto a ponto). Assim, $\mathcal{O}_X$ pode ser visto objeto em $\mathbf{PSh}_{\mathbf{Ab}}(X)$ e $\mathbf{PSh}_{\mathbf{Ring}}(X)$.

Note que qualquer função contínua $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ induz um (endo)morfismo de pré-feixes $\varphi_g\colon \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$, definido por

$$(\varphi_g)_U\colon \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(U), \quad f \mapsto g \circ f,$$

para todo $U \in X$ aberto.

Exemplo 2.4 (Pré-feixe (localmente) constante)**.** Seja $\mathcal{C} \in \{\mathbf{Set}, \mathbf{Ab}, \mathbf{Ring}, A\text{-}\mathbf{mod}\}$ e seja $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Definimos o *pré-feixe (localmente) constante* em X com valor constante C por

$$\underline{C}(U) = \{f\colon U \to C \text{ contínuas}\}, \quad \forall U \in \mathbf{Op}(X),$$

onde C é munido com a topologia discreta, e o morfismo restrição é dado pela restrição de funções. Claramente $\underline{C}(U) \in \mathcal{C}$ (ao definir a estrutura algébrica ponto a ponto). Assim $\underline{C}\colon \mathbf{Op}(X) \to \mathcal{C}$ é de fato um pré-feixe.

Note que uma função $f\colon U \to C$ é contínua se, e somente se, f é localmente constante. Isso justifica a nomenclatura dada para o pré-feixe.

Exemplo 2.5 (Pré-feixe arranha-céu)**.** Sejam $\mathcal{C} \in \{\mathbf{Set}, \mathbf{Ab}, \mathbf{Ring}, A\text{-}\mathbf{mod}\}$ e $0 \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ seu objeto final. Sejam $p \in X$ e $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Definimos o *pré-feixe arranha-céu* por

$$i_pC(U) = \begin{cases} C, & p \in U, \\ 0, & p \notin U, \end{cases} \quad \text{e} \quad \mathrm{res}_{U,V} = \begin{cases} \mathrm{Id}_C, & p \in V, \\ 0, & p \notin V, \end{cases}$$

para todos abertos $V \subseteq U$ de X.

Exemplo 2.6 (Pré-feixe estrutural de um domínio)**.** Seja A um domínio e $\Bbbk = \mathrm{Frac}(A)$ seu corpo de frações. Considere o espaço topológico $\mathrm{Spec}\, A$ com a topologia de Zariski. Definimos então

$$\mathcal{O}_A(U) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}} \subseteq \Bbbk, \quad \mathrm{res}_{U,V}\colon \bigcap_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow \bigcap_{\mathfrak{p} \in V} A_{\mathfrak{p}},$$

para todos abertos $V \subseteq U$ de $\mathrm{Spec}\, A$. Assim, $\mathcal{O}_A$ define um pré-feixe em $\mathrm{Spec}\, A$ com valores em **Ring** ou A-**mod**.

Exemplo 2.7 (Pré-feixe produto de objetos)**.** Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com produtos e para cada $x \in X$ tome um objeto $C_x \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Então para cada aberto $U \subseteq X$, está bem definido

$$\prod(U) = \prod_{x \in U} C_x, \quad \text{onde} \quad (\prod_{x \in U} C_x, \{p_x\}_{x \in U}) = \lim_{x \in U} C_x.$$

Sejam $V \subseteq U \in X$ abertos e considere o diagrama

$$\{p'_y = p_y\colon \prod_{x \in U} C_x \to C_y \mid y \in V \subseteq U\}.$$

Então por propriedade universal do produto, existe um único morfismo

$$\mathrm{res}_{U,V} \colon \prod_{x \in U} C_x \to \prod_{x \in V} C_x, \quad q_x \circ \mathrm{res}_{U,V} = p_x, \, \forall x \in V,$$

onde $(\prod_{x \in V} C_x, \{q_x\}_{x \in U}) = \lim_{x \in V} C_x$. Pela unicidade da propriedade universal do produto, é fácil de mostrar que a restrição satisfaz (2.1). Portanto $\prod$ é um pré-feixe em X com valores em $\mathcal{C}$.

2.2. **Feixes.** Agora vamos definir a categoria dos feixes. Para isso, primeiro vamos definir feixes em conjuntos e obter uma motivação para a definição geral.

Definição 2.8 (Feixe em conjunto)**.** Um *feixe de conjuntos em* X é um pré-feixe $\mathcal{F}$ em X com valores em **Set** satisfazendo o *axioma da colagem unica*, isto é: Dado um aberto U de X com cobertura por abertos $\{U_i\}_{i \in I}$, e dados

$$\{f_i \in \mathcal{F}(U_i)\}_{i \in I} \quad \text{tal que} \quad f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}, \, \forall i, j \in I,$$

então existe uma única sessão $f \in \mathcal{F}(U)$ tal que $f|_{U_i} = f_i$, para todo $i \in I$. *Morfismos de feixes* de conjuntos são simplismente morfismos de pré-feixes de conjuntos. Denotamos a categoria de feixes de conjuntos em X por $\mathbf{Sh}_{\mathbf{Set}}(X)$.

Seja $\mathcal{F}$ um feixe de conjuntos em um espaço topológico X. Dado aberto U e uma cobertura por abertos $\{U_i\}_{i \in I}$, considere o diagrama

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\epsilon} \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \overset{\varphi}{\underset{\psi}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j \in I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j), \tag{2.3}$$

onde

$$\begin{aligned}
\epsilon(f) &= (f|_{U_i})_{i \in I} = (\mathrm{res}_{U,U_i}(f))_{i \in I}, & \forall f \in \mathcal{F}(U),\\
\varphi((f_i)_{i \in I}) &= \left(\left((f_i|_{U_i \cap U_j})_{j \in I} \right)_{i \in I} \right) = \left(\prod_{i \in I} \prod_{j \in I} \mathrm{res}_{U_i, U_i \cap U_j} \right) ((f_i)_{i \in I}), &\\
\psi((f_i)_{i \in I}) &= \left(\left((f_i|_{U_i \cap U_j})_{i \in I} \right)_{j \in I} \right) = \left(\prod_{j \in I} \prod_{i \in I} \mathrm{res}_{U_i, U_i \cap U_j} \right) ((f_i)_{i \in I}), & \forall (f_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i).
\end{aligned}$$

Afirmo que (2.3) é um equalizador, ou seja, é satisfeito que $\varphi \circ \epsilon = \psi \circ \epsilon$ e para qualquer função $\delta \colon S \to \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i)$ tal que $\varphi \circ \delta = \psi \circ \delta$, existe uma única função $\tilde{\delta} \colon S \to \mathcal{F}(U)$ tal que $\delta = \epsilon \tilde{\delta}$. De fato, lembrando que $\mathcal{F}$ é feixe, basta definir $\tilde{\delta}(s) \in \mathcal{F}(U)$ como a única sessão tal que $\left(\tilde{\delta}(s) \Big|_{U_i} \right)_{i \in I} = \delta(s)$.

Isso motiva uma definição mais geral de feixe em X com valores em uma categoria com produtos qualquer $\mathcal{C}$.

Definição 2.9 (Feixe em X com valores em $\mathcal{C}$)**.** Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com produtos e seja $\mathcal{F}$ um pré-feixe num espaço topológico X com valores em $\mathcal{C}$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é um *feixe* se, para todo aberto $U \subseteq X$ e cobertura $\{U_i\}_{i \in I}$ por abertos, o diagrama

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j \in I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j), \tag{2.4}$$

com morfismos induzidos pela propriedade universal dos produtos e pelas restrições, é um equalizador em $\mathcal{C}$.

Details: Para visualizar melhor a construção dos morfismos na definição de feixes, considere os diagramas

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\exists!\epsilon"] \arrow[dr, "\mathrm{res}_{U,U_i}"'] & \prod_{i\in I}\mathcal{F}(U_i) \arrow[d, "p_i"] \\ & \mathcal{F}(U_i) \end{tikzcd},$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U_i) \arrow[r, "\exists!q_i^j"] \arrow[dr, "\mathrm{res}_{U_i,U_i\cap U_j}"'] & \prod_{j\in I}\mathcal{F}(U_i\cap U_j) \arrow[d] \\ & \mathcal{F}(U_i\cap U_j) \end{tikzcd} \quad \text{o que implica} \quad \begin{tikzcd} \prod_{i\in I}\mathcal{F}(U_i) \arrow[r, "\exists!\varphi"] \arrow[dr, "q_i^j\circ p_i"'] & \prod_{i,j\in I}\mathcal{F}(U_i\cap U_j) \arrow[d] \\ & \prod_{j\in I}\mathcal{F}(U_i\cap U_j) \end{tikzcd},$$

e finalmente, trocando os índices,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U_i) \arrow[r, "\exists!q_j^i"] \arrow[dr, "\mathrm{res}_{U_j,U_i\cap U_j}"'] & \prod_{j\in I}\mathcal{F}(U_i\cap U_j) \arrow[d] \\ & \mathcal{F}(U_i\cap U_j) \end{tikzcd} \quad \text{o que implica} \quad \begin{tikzcd} \prod_{i\in I}\mathcal{F}(U_i) \arrow[r, "\exists!\psi"] \arrow[dr, "q_j^i\circ p_i"'] & \prod_{i,j\in I}\mathcal{F}(U_i\cap U_j) \arrow[d] \\ & \prod_{j\in I}\mathcal{F}(U_i\cap U_j) \end{tikzcd}.$$

Seja $\mathbf{F}\colon \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ uma funtor covariante fiel e $\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}_{\mathcal{C}}(X)$ um pré-feixe em X com valores em $\mathcal{C}$. Então o functor contravariante

$$\mathbf{F}\circ\mathcal{F}\colon \mathbf{Op}(X) \to \mathbf{Set}$$

é um pré-feixe de conjuntos em X. Chamamos o pré-feixe $\mathbf{F}\mathcal{F}$ de *pré-feixe de subjacente (em relação ao funtor $\mathbf{F}$) de $\mathcal{F}$*. Uma *sessão f de $\mathcal{F}$ sobre U* significa um elemento $s \in \mathbf{F}\mathcal{F}(U)$.

Temos então o seguinte lema:

Lema 2.10. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $\boldsymbol{F}\colon \mathcal{C} \to \boldsymbol{Set}$ uma funtor covariante satisfazendo as seguintes propriedades*

(1) $\boldsymbol{F}$ é fiel, isto é injetor nos espaços dos morfismos;
(2) $\mathcal{C}$ tem limites (portanto tem produtos) e $\boldsymbol{F}$ comuta com eles;
(3) $\boldsymbol{F}$ reflete isomorfismos.

Seja X um espaço topológico e seja $\mathcal{F}$ um pré-feixe em X com valores em $\mathcal{C}$. Então

$$\mathcal{F} \text{ é feixe} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{F}\mathcal{F} \text{ é feixe de conjuntos.}$$

Demonstração. Assuma $\mathcal{F}$ feixe. Então, para todo aberto U e cobertura $\{U_i\}_{i\in I}$, o $\mathcal{F}(U)$ é equalizador do diagrama (2.4). Assim $\mathbf{F}\mathcal{F}(U)$ é o equalizador do diagrama correspondente em $\mathbf{Set}$ (usando aqui a comutatividade de $\mathbf{F}$ com limites e, portanto, com produtos). Portanto $\mathcal{F}$ é um feixe.

Respectivamente, suponha que $\mathbf{F}\mathcal{F}$ é um feixe. Tome aberto U e cobertura $\{U_i\}_{i\in I}$ e seja $E(U) \in \operatorname{Obj}\mathbf{C}$ o equalizador dos morfismos paralelos do diagrama (2.4). Por definição de equalizador, existe um único morfismo $\mathcal{F}(U) \to E(U)$ tal que o diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} E(U) \arrow[r] & \mathcal{F}(U) \\ \mathcal{F}(U) \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd} .$$

Aplicando $\mathbf{F}$ temos que $\mathbf{F}\mathcal{F}(U) \to \mathbf{F}(E(U))$ é um isomorfismo, já que $\mathbf{F}(E(U))$ é o equalizador do diagrama correspondete. Assim, como $\mathbf{F}$ reflete isomorfismos, segue que $\mathcal{F}(U) \to E(U)$ também é isomofismo. $\square$

As categorias **Ab**, **Ring** e A-**mod**, junto com seus funtores esquecimentos, satisfazem as propriedades do Lema 2.10. Assim obtemos o seguinte corolário:

Corolário 2.11. *Um pré-feixe $\mathcal{F}$ em X com valores em **Ab**, **Ring** ou A-**mod** é feixe, se e somente se, é feixe de conjuntos em X.*

Agora vamos mostrar que os exemplos anteriores de pré-feixes, na verdade são exemplos de feixes:

Exemplo 2.12 (Feixe das funções diferenciáveis com valores reais)**.** Seja X variedade diferenciável e seja $\mathcal{O}_X$ o pré-feixe em X de funções diferenciáveis com valores reais. Seja um aberto U de X e uma cobertura por abertos $\{U_i\}_{i\in I}$. Seja uma família de funções diferenciaveis $\{f_i\colon U_i \to \mathbb{R}\}_{i\in I}$ tal que

$$f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i\cap U_j}, \quad \forall\, i,j \in I.$$

Então

$$f\colon U \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_i(x) \quad (i \in \{j \in I \mid x \in U_j\}),$$

está bem definida e é diferenciável (já que diferenciabilidade é uma propriedade local, e cada f_i é diferenciável). Além disso, por definição, $f|_{U_i} = f_i$, para todo $i \in I$, e é a única função definida em U que satisfaz tal proprieade. Portanto $\mathcal{O}_X$ é feixe.

Exemplo 2.13 (Feixe (localmente) constante)**.** Seja $\mathcal{C} \in \{\mathbf{Set}, \mathbf{Ab}, \mathbf{Ring}, A\text{-}\mathbf{mod}\}$ e seja $C \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$. Considere o $\underline{C}$ o pré-feixe (localmente) constante em X com valor (localmente) constante C. Tome um aberto U e uma cobertura $\{U_i\}_{i\in I}$ de U. Seja $\{f_i\colon U_i \to C\}_{i\in I}$ família de funções localmente constantes tal que $f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i\cap U_j}$, para todo $i,j \in I$. Defina

$$f\colon U \to C, \quad x \mapsto f_i(x) \quad (i \in \{j \in I \mid x \in U_j\}),$$

Afirmo que f é localmente constante. De fato, seja $x \in U$, tome $i \in I$ tal que $x \in U_i$. Como f_i é localmente constante, existe $V_x \subseteq U_i$ aberto tal que $f(V_x) = f_i(V_x) = f_i(x) = f(x)$. E portanto f é localmente constante, isto é, $f \in \underline{C}(U)$. Claramente f é a única função continua de U em C que satisfaz $f|_{U_i} = f_i$, para todo $i \in I$. Portanto $\underline{C}$ é um feixe.

Exemplo 2.14 (Feixe arranha-céu)**.** Sejam $\mathcal{C} \in \{\mathbf{Set}, \mathbf{Ab}, \mathbf{Ring}, A\text{-}\mathbf{mod}\}$ com objeto final 0, $p \in X$ e $C \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$. Considere i_pC pré-feixe arranha-céu em X Tome aberto U de X e cobertura aberta $\{U_i\}_{i\in I}$ de U.

Seja $\{c_i \in i_pC(U_i)\}_{i\in I}$ tal que $\operatorname{res}_{U_i,U_i\cap U_j}(c_i) = \operatorname{res}_{U_j,U_i\cap U_j}(c_j)$, para todos $i,j \in I$. Então, como as restrições são identidade ou 0, obtemos que $\{c_i \in C \mid i \in I\} \subseteq \{c, 0\}$, para algum

$c \in C$ (nulo ou não). Assim tal c é tal que $c \in \underline{C}(U)$ e $c|_{U_i} = c_i$ e é o único elemento de C satisfazendo essa condição. Portanto $\underline{C}$ é um feixe.

Exemplo 2.15 (Pré-feixe estrutural de um domínio)**.** Seja A um domínio e seja seu pré-feixe estrutural

$$\mathcal{O}_A(U) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}} \subseteq \Bbbk = \mathrm{Frac}(A).$$

É fácil de observar que $\mathcal{O}_A$ satisfaz o axioma da colagem única, já que seus mapares restrições são inclusões de conjuntos. Assim $\mathcal{O}_A$ é um feixe.

Mas vale ilustrar que nem todo pré-feixe é feixe. Para isso, considere o pré-feixe das funções limitadas $\mathcal{B}\colon \mathbf{Op}(\mathbb{R}) \to \mathbf{Set}$ definido por

$$\mathcal{B}(U) = \{f\colon U \to \mathbb{R} \text{ contínuas} \mid \exists M > 0 \,\text{t.q.}\, f^{-1}((-M, M)) = \mathbb{R}\},$$

para todo U aberto de $\mathbb{R}$. Afirmo que $\mathcal{B}$ não é feixe.

De fato, o axioma da colagem única falha aberto $\mathbb{R}$ com cobertura $\{U_n = (-n, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Considere a família de funções continuas

$$f_n\colon U_n \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x, \forall x \in U_n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Claramente $f_n|_{U_n \cap U_m} = f_{\min\{n,m\}} = f_m|_{U_n \cap U_m}$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Porém, a única função contínua que colaria todas f_n's, é $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, que não pertence a $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Portanto $\mathcal{B}$ é um exemplo de pré-feixe que não é feixe.

3. Categorias Abelianas

Nessa sessão vamos definir categorias abelianas, que são, a grosso modo, categorias que satisfazem as mesmas propriedades das categorias dos módulos.

Ao final, demostraremos que a categoria dos pré-feixes com valores em uma categoria abeliana, é também uma categoria abeliana.

3.1. **Definição de categoria abelinas.**

As categorias abelianas, são categorias aditivas, ou seja, categorias com estrutura de grupo abeliano nos espaços de morfismos. Vamos a definição:

Definição 3.1 (Categoria aditiva)**.** Uma categoria $\mathcal{A}$ é dita *aditiva* se é $\mathbb{Z}$-linear, ou seja, se satisfaz as seguintes propriedades:

(1) Para todo par de objetos A, B em $\mathcal{A}$, o espaço $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ é um $\mathbb{Z}$-módulo;
(2) A composição em $\mathcal{A}$ é compatível com a estrutura de $\mathbb{Z}$-módulos nos morfismos, ou seja:
$$g \circ (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1(g \circ f_2) + \alpha_2(g \circ f_2),$$
$$(\beta_1 g_1 + \beta_2 g_2) \circ f = \beta_1(g_1 \circ f) + \beta_2(g_2 \circ f),$$
para todos $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Z}$ e morfismos f, g, f_1, f_2, g_1, g_2 com domínio e co-dominio que fazem sentido para a composição; e
(3) Toda família finita de objetos em $\mathcal{A}$ tem soma direta (isto é, co-produto).

Observação 3.2. É possível de mostrar que numa categoria aditiva, os produtos e co-produtos finitos coincidem. Veja [nLa20, Prop. 2.1] par a demonstração.

O objeto inicial (e também final) é a soma dierta de uma família vazia de objetos.

Exemplos de categoria aditiva são **Group** (categoria dos grupo), **Ab**, A-**mod**, **Ring**, **Vect** (categoria dos espaços vetoriais).

Vamos agora definir o conceito de núcleo e co-núcleo para morfismos em ma categoria aditiva.

Definição 3.3 (Núcleo e conúcleo)**.** Seja $f\colon A \to B$ um mosfismo numa categoria aditiva $\mathcal{A}$. O *núcleo* (ou *kernel*) de f é um par $(\mathrm{Ker}(f),\, k\colon \mathrm{Ker}(f) \to A)$ em $\mathcal{A}$ tal que

- **N1** $f \circ k = 0$;
- **N2** Dado qualquer morfismo $k'\colon K' \to A$ tal que $f\circ k' = 0$, então existe um único morfismo $\phi\colon K' \to \mathrm{Ker}(f)$ tal que $k \circ \phi = k'$.

De forma dual, o *conúcleo* (ou *cokernel*) de f é um par $(\mathrm{Coker}(f),\, c\colon B \to \mathrm{Coker}(f))$ em $\mathcal{A}$ tal que

- **C1** $c \circ f = 0$;
- **C2** Dado qualquer morfismo $c'\colon B \to C'$ tal que $c' \circ f = 0$, então existe um único morfismo $\psi\colon \mathrm{Coker}(f) \to C'$ tal que $\psi \circ c = c'$.

Observação 3.4 (Ker e coker para módulos)**.** A dfinição faz sentido, isto é, para categoria dos A-módulos, a definição de núcleo e conúcleo categórica coincide com a definição usual. De fato, seja $f\colon M \to N$ um morfismo de A-módulos e seja $k'\colon K' \to M$ tal que $f \circ k' = 0$. Então $k'(x) \in \mathrm{Ker}(f)$, para todo $x \in K'$. Assim,

$$\phi\colon K' \to \mathrm{Ker}(f), \quad x \mapsto k'(x) \quad (\forall x \in K'),$$

é a única função tal que a composição

$$K' \xrightarrow{\phi} \mathrm{Ker}(f) \hookrightarrow M$$

é igual a k'. Dualmente se mostra que conúcleo é $\mathrm{Coker}(f) = \dfrac{N}{\mathrm{Im}(f)}$

Relembre a definição de monomorfismo e epimorfismo. Para uma categoria aditiva $\mathcal{A}$, a definição equivalente é:

Definição 3.5 (Monomorfismo e Epimorfismo)**.** Seja $f\colon A \to B$ um morfismo numa categoria abeliana $\mathcal{A}$. Dizemos que f é *monomorfismo* (respectivamente, *epimorfismo*) se satisfaz: para todo morfismo $g\colon M \to A$ tal que $f \circ g = 0$, segue então $g = 0$ (respectivamente, para todo morfismo $g\colon B \to N$ tal que $g \circ f = 0$, segue então $g = 0$).

Temos o seguinte lema

Lema 3.6. *Seja $f\colon A \to B$ um morfismo numa categoria abeliana $\mathcal{A}$. Então:*

- *f é monomorfismo se, e somente se,* $\mathrm{Ker}(f) = 0$*;*
- *f é epimorfismo se, e somente se,* $\mathrm{Coker}(f) = 0$.

Demonstração. Segue diretamente da definição. □

Na verdade, vale também que todo morfismo núcleo $k\colon K \to A$ (respectivamente, morfismo conúcleo $c\colon B \to C$) é um monomorfismo (respec., epimorfismo). De fato um morfismo $v\colon V \to K$ tal que $kv = 0$. Temos $kv = 0 = k0$, e pela unicidade na propriedade universal do núcleo temos $v = 0$ (respectivamente, dado w tal que $wc = 0 = 0c$, segue da unicidade que $w = 0$).

Considere, numa categoria aditiva $\mathcal{A}$, um morfismo $f\colon A \to B$ que tem núcleo e conúcleo. Defina

$$(\mathrm{Im}(f), q) \coloneqq \mathrm{Ker}(B \to \mathrm{Coker}(f)), \tag{3.1}$$

$$(\mathrm{Coim}(f), p) \coloneqq \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(f) \to A). \tag{3.2}$$

a *imagem* e *coimagem* de f, respectivamente.

Agora considera o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(f) \arrow[r, "f"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, dashed, "h"] & Y \arrow[r, "c"] & \mathrm{Coker}(f) \\
 & \mathrm{Coim}(f) \arrow[r, dotted, "\exists!\bar{f}"] & \mathrm{Im}(f). \arrow[u, "q"'] &
\end{tikzcd} \tag{3.3}$$

Como $cf = 0$, por propriedade universal do núcleo, existe único morfismo $h\colon X \to \mathrm{Im}(f)$ tal que $qh = f$. Em particular $qhk = fk = 0$, e como q é núcleo (e portanto monomorfismo) segue $hk = 0$. Mas por propriedade universal do conúcleo, existe um único morfismo $\bar{f}\colon \mathrm{Coim}(f) \to \mathrm{Im}(f)$ tal que $\bar{f}p = h$. Vamos chamar $\bar{f}$ do morfismo induzido por f.

Podemos agora definir categoria abeliana. Uma categoria abeliana é "essencialmente" uma categoria aditiva que possui núcleos e conúcleos, e que "vale o teorema do homomorfismo". Mais precisamente:

Definição 3.7. Uma categoria aditiva $\mathcal{A}$ é dita *abeliana* se satisfaz:

(1) Todo morfismo em $\mathcal{A}$ adimite núcleo e conúcleo;
(2) Para todo morfismo $f\colon A \to B$ em $\mathcal{A}$, o morfismo induzido $\bar{f}\colon \mathrm{Coim}(f) \to \mathrm{Im}(f)$ é um isomorfismo. Ou seja, $\mathrm{Im}(f) \simeq \mathrm{Coim}(f)$.

3.2. **$\mathbf{PSh}_{\mathcal{A}}(X)$ é abeliana.** Fixe X um espaço topológico e $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. Vamos mostrar que a categoria dos pré-feixes em X com valores em $\mathcal{A}$ é uma categoria abeliana.

Para isso, precisamos mostrar que $\mathbf{PSh}_{\mathcal{A}}(X)$ é aditiva. Isso seguirá do fato de $\mathcal{A}$ ser aditiva. Sejam pré-feixes $(F), (G) \in \mathrm{Obj}(\mathbf{PSh}_{\mathcal{A}}(X))$. Temos:

- $\mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh}_{\mathcal{A}}(X)}((F), (G))$ é grupo abeliano:
  Basta, para cada $\phi, \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh}_{\mathcal{A}}(X)}((F), (G))$ e $U \subseteq X$ aberto, definir
  $$(\phi + \psi)_U = \phi_U + \psi_U \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U);$$
- A compatibilidade de $\circ$ com $+$ segue de $\mathcal{A}$ aberto por aberto; e
- A soma direta é definida por $(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})(U) \coloneqq \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U)$, para todo aberto U de X.

Assim $\mathbf{PSh}_{\mathcal{A}}(X)$ é aditiva.

Vamos agora construir agora os pré-feixes núcleo e conúcleo. Seja $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh}_{\mathcal{A}}(X)}((F), (G))$. Para cada aberto U de X, defina

$$((\mathrm{Ker}\,\phi)(U), k_U) = \mathrm{Ker}(\phi_U) \quad \text{e} \quad ((\mathrm{Coker}\,\phi)(U), k_U) = \mathrm{Coker}(\phi_U).$$

Os morfismos restrições são dados pela propriedade universal do núcleo e conúcleo. Isto é, dado $V \subsetneqq U$ abertos, então $\mathrm{res}_{U,V}^{\mathrm{Ker}\,\phi}\colon \mathrm{Ker}(\phi_U) \to \mathrm{Ker}(\phi_U)$, é definido como o único morfismo tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker}(\phi_U) \arrow[r, "k_U"] \arrow[d, dotted, "\exists! \operatorname{res}^{\operatorname{Ker}\phi}_{U,V}"] & \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\phi_U"] \arrow[d, "\operatorname{res}^{\mathcal{F}}_{U,V}"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\operatorname{res}^{\mathcal{G}}_{U,V}"] \\
\operatorname{Ker}(\phi_V) \arrow[r, "k_V"] & \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\phi_V"] & \mathcal{G}(V).
\end{tikzcd} \tag{3.4}$$

Details: Temos que $\phi_V \circ \operatorname{res}^{\mathcal{F}}_{U,V} \circ k_U = \operatorname{res}^{\mathcal{G}}_{U,V} \circ \phi_U \circ k_U = 0$. Logo existe $\operatorname{res}^{\operatorname{Ker}\phi}_{U,V}$ tal que $k_V \circ \operatorname{res}^{\operatorname{Ker}\phi}_{U,V} = \operatorname{res}^{\mathcal{F}}_{U,V} \circ k_U$.
Dualmente define-se $\operatorname{res}^{\operatorname{Coker}\phi}_{U,V}\colon \operatorname{Coker}(\phi_U) \to \operatorname{Coker}(\phi_U)$.

Para mostrar que $\operatorname{Ker}\phi$ é de fato pré-feixe, basta aplicar a unicidade da propriedade universal que define núcleos nos seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker}(\phi_U) \arrow[r, "k_U"] \arrow[d, dotted, "\exists! \operatorname{res}^{\operatorname{Ker}\phi}_{U,V}"] & \mathcal{F}(U) \arrow[d, "\operatorname{res}^{\mathcal{F}}_{U,V}"] \\
\operatorname{Ker}(\phi_V) \arrow[r, "k_V"] \arrow[d, dotted, "\exists! \operatorname{res}^{\operatorname{Ker}\phi}_{V,W}"] & \mathcal{F}(V) \arrow[d, "\operatorname{res}^{\mathcal{F}}_{V,W}"] \\
\operatorname{Ker}(\phi_W) \arrow[r, "k_W"] & \mathcal{F}(W),
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker}(\phi_U) \arrow[r, "k_U"] \arrow[d, dotted, "\exists! \operatorname{res}^{\operatorname{Ker}\phi}_{U,W}"] & \mathcal{F}(U) \arrow[d, "\operatorname{res}^{\mathcal{F}}_{U,W}"] \\
\operatorname{Ker}(\phi_W) \arrow[r, "k_W"] & \mathcal{F}(W).
\end{tikzcd}$$

onde $W \subseteq V \subseteq U$ são abertos de X.
Details: Temos

$$\begin{aligned}
\phi_W \circ \operatorname{res}^{\operatorname{Ker}\phi}_{U,W} &= \operatorname{res}^{\mathcal{F}}_{U,W} \circ \phi_U \\
&= \operatorname{res}^{\mathcal{F}}_{V,W} \circ \operatorname{res}^{\mathcal{F}}_{U,V} \circ \phi_U \\
&= \operatorname{res}^{\mathcal{F}}_{V,W} \circ \phi_V \circ \operatorname{res}^{\operatorname{Ker}\phi}_{U,V} \\
&= \phi_W \circ \operatorname{res}^{\operatorname{Ker}\phi}_{V,W} \circ \operatorname{res}^{\operatorname{Ker}\phi}_{U,V}.
\end{aligned}$$

E por unicidade $\operatorname{res}^{\operatorname{Ker}\phi}_{U,W} = \operatorname{res}^{\operatorname{Ker}\phi}_{V,W} \circ \operatorname{res}^{\operatorname{Ker}\phi}_{U,V}$.
Dualmente para o feixe conúcleo.

Observação 3.8. Repare que do primeiro quadrado do diagrama (3.4) segue-se que $\{k_U\}_{U \in \mathbf{Op}(X)}$ é um morfismo de pre-feixe. Analogamente para $\{c_U\}_U$.

Podemos então enunciar o seguinte teorema:

Theorem 3.9. *Seja X espaço topológico e $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. Então $\boldsymbol{PSh}_{\mathcal{A}}(X)$ é uma categoria abeliana.*

Demonstração. Já construimos feixes núcleo e conúcleo. Resta mostrar que vale o "teorema do homomorfismo". Como $\mathcal{A}$ é categoria abeliana segue que $\operatorname{Coim}(\phi_U) \simeq \operatorname{Im}(\phi_U)$, para todo aberto U de X e morfismo de pre-feixes ϕ. $\square$

3.3. **Propriedades de feixes abelianos.** A primeira coisa que nos perguntamos agora é se a categoria $\mathbf{Sh}_{\mathcal{A}}(X)$, dos feixes em X com valores numa categoria abeliana $\mathcal{A}$, é também uma categoria abeliana. Para responder isso, primeiro precisamos responder as seguintes perguntas:

Seja $\phi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ *um morfismo em* $\boldsymbol{Sh}_{\mathcal{A}}(X)$*, e seja* $\operatorname{Ker}\phi$ *e* $\operatorname{Coker}\phi$ *seus* ***pré-feixes*** *núcleo e conúcleo, respectivamente. Vale que* $\operatorname{Ker}\phi$ *e* $\operatorname{Coker}\phi$ *são na verdade feixes?*

Veremos a seguir que a resposta para $\operatorname{Ker}\phi$ é afirmativa. Porém daremos um contra-exemplo para $\operatorname{Coker}\phi$.

Antes de prosseguir, vamos dar uma definição equivalente para feixes com valores numa categoria abeliana

Lema 3.10. *Seja* $\mathcal{F}$ *um pré-feixe em* X *com valores numa categoria abeliana* $\mathcal{A}$*. Então* $\mathcal{F}$ *é feixe se, e somente se, para todo aberto* U *de* X*, com cobertura por abertos* $\{U_i\}_{i\in I}$*, a sequência for exata*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\ \epsilon\ } \prod_{i\in I}\mathcal{F}(U_i) \xrightarrow{\ \delta\ } \prod_{i,j\in I}\mathcal{F}(U_i\cap U_j),$$

onde $\epsilon = \prod res_{U,U_i}$ *e* $\delta = \prod_{i,j\in I}(res_{U_i,U_i\cap U_j} - res_{U_j,U_i\cap U_j})$*.*

Demonstração. Isso sai diretamente da definição de feixes e do fato de numa categoria abeliana, equalizador de dois morfismos é isomorfo ao núcleo da diferença. $\square$

Lema 3.11 (Pré-feixe núcleo é feixe)**.** *Seja* $\phi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ *um morfismo de feixe em* X *com valores numa categoria abeliana* $\mathcal{A}$*. Então o pré-feixe* $\operatorname{Ker}\phi$ *é na verdade um feixe.*

Demonstração. Considera o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & (\operatorname{Ker}\phi)(U) \arrow[r, "k_U"] \arrow[d, "\epsilon^{\operatorname{Ker}}"'] & \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\phi_U"] \arrow[d, "\epsilon^{\mathcal{F}}"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\epsilon^{\mathcal{G}}"] \\
0 \arrow[r] & \prod\limits_{i\in I}(\operatorname{Ker}\phi)(U_i) \arrow[r, "\prod k_{U_i}"] \arrow[d, "\delta^{\operatorname{Ker}}"'] & \prod\limits_{i\in I}\mathcal{F}(U_i) \arrow[r, "\prod \phi_{U_i}"] \arrow[d, "\delta^{\mathcal{F}}"] & \prod\limits_{i\in I}\mathcal{G}(U_i) \arrow[d, "\delta^{\mathcal{G}}"] \\
0 \arrow[r] & \prod\limits_{i,j\in I}(\operatorname{Ker}\phi)(U_i\cap U_j) \arrow[r, "\prod k_{U_i\cap U_j}"] & \prod\limits_{i\in I}\mathcal{F}(U_i\cap U_j) \arrow[r, "\prod \phi_{U_i\cap U_j}"] & \prod\limits_{i\in I}\mathcal{G}(U_i\cap U_j).
\end{tikzcd}$$

Como as linhas são exatas e as duas últimas colunas são exatas (pois $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são feixes), segue que a primeira linha é exata.

Details: Isso segue de uma "caça a diagrama" mais geral:

$$
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, dotted, "\exists!\tilde{\varphi}"'] \arrow[ddl, dotted, "\exists!\hat{\varphi}"] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, "0"] & \\
\mathrm{Ker}(k) \arrow[r, dashed, "k_1"'] \arrow[d, "\tilde{k}"'] & \mathrm{Ker}(f') \arrow[r, dashed, "k_2"'] \arrow[d, "k_{f'}"] & \mathrm{Ker}(g') \arrow[d, "k_{g'}"] \\
\mathrm{Ker}(f) \arrow[r, "k_f"'] \arrow[d, "k"'] & A \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "f'"] & B \arrow[d, "g'"] \\
\mathrm{Ker}(g) \arrow[r, "k_g"'] & A' \arrow[r, "g"'] & B'.
\end{tikzcd}
$$

□

Observação 3.12. Repare que, para provar que Coker ϕ é feixe, não conseguimos replicar um argumento análogo à prova do lema anterior. De faro, numa tentativa de repetir o argumento, obteriamos um diagrama da forma

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}
$$

onde as primeiras duas colunas e todas as linhas são exatas. E por caça de diagrama isso não implica a exatidão da terceira coluna.

Vamos agora construir um exemplo de pré-feixe cokernel que não é kernel. Para isso considere os feixes $\mathcal{O}, \mathcal{O}^* \in \mathbf{Sh}_{\mathbf{Ab}}(\mathbb{C})$ definido por

$$\mathcal{O}(U) = \{f : U \to \mathbb{C} \text{ holomórfica}\} \quad \text{e}$$

$$\mathcal{O}^*(U) = \{f : U \to \mathbb{C} \text{ holomórfica} \mid f(x) \neq 0, \, \forall x \in U\},$$

para todo aberto U de $\mathbb{C}$. As estruturas de grupos para $\mathcal{O}(U)$ e $\mathcal{O}^*(U)$ são dados, respectivamente, pela soma e produto ponto a ponto. Para todo aberto U, considere

$$\exp_U : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}^*(U), \quad f \mapsto \exp \circ f.$$

Temos então que $\{\exp_U\}_{U \in \mathbf{Op}(\mathbb{C})}$ define um morfismo de feixes $\phi : \mathcal{O} \to \mathcal{O}^*$.

Afirmo agora que o pré-feixe Coker(exp) não é um feixe. Com efeito, seja $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e considere a cobertura de U formada pelos conjuntos:

$$U_1 = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} | x \geq 0\} \quad \text{e} \quad U_2 = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} | x \leq 0\}.$$

Seja $g : z \mapsto z$ função em $\mathcal{O}^*(U)$. Por análise complexa, temos que a função g não admite logaritmo, ou seja, não é a exponencial de nenhuma função em $\mathcal{O}(U)$. Portanto $[g] \neq 0$ em

Coker(exp)(U). Mas, toda função holomorfa em $\mathcal{O}^*(U_1)$ e $\mathcal{O}^*(U_2)$ admite logaritmo, já que U_1 e U_2 são simplesmente conexos. Assim Coker(exp)(U_1) = Coker(exp)(U_2) = 0. Dessa forma, $[g]$ é uma colagem não trivial das seções nulas de Coker(exp) em U_1 e U_2. Portanto Coker(ϕ) não satisfaz o axioma da colagem única.

4. Talos, Germes e Feixeficação

Demonstramos na sessão anterior que a categoria dos pré-feixes com valores numa categoria abeliana, é também abeliana. Mas ao tentar demonstrar o resultado análogo para os feixes, falhamos em mostrar que o pré-feixe núcleo é feixe.

Para concertar esse esse problema, vamos ter que introduzir nesse sessão um conceito mais sofisticado de localidade: *germes de um talo*. Com esse conceito, será possível "transformar" um pré-feixe em um feixe, através da *feixeficação*.

Nessa sessão, apesar de todos os conceitos serem passíveis de generalizar pra qualquer categoria, vamos admitir qualquer categoria com objetos sendo conjuntos (como **Ab**, **Set**, A-**mod**, Vect, **Ring**, etc). Uma forma de "concertar" essa suposição é exigir que todos os feixes assumem valores numa categoria $\mathcal{C}$ que admite um funtor esquecimento para **Set** que *reflete limites e colimites pequenos (aqueles indexados por conjuntos).*

4.1. Talos e Germes.

Definição 4.1 (Talo e germe)**.** Seja $\mathcal{F}$ um (pré-)feixe em X com valores em $\mathcal{C}$, e seja $p \in X$. O *talo de $\mathcal{F}$ em p* é o conjunto das classes de equivalencia

$$\mathcal{F}_p := \{(f, U) \mid p \in U \in \mathbf{Op}(X) \text{ and } f \in \mathcal{F}(U)\}/\sim,$$

onde a relação de equivalencia $\sim$ é definido por

$$(f, U) \sim (g, V) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, W \in \mathbf{Op}(X), \text{ t.q. } p \in W \subseteq U \cap V \text{ e } f|_W = g|_W .$$

Um elemento $[f, U] = f_p$ de $\mathcal{F}_p$ é chamados de *germe* de $\mathcal{F}$ em p.

Observação 4.2 (Talo como colimite)**.** De forma mais geral, temos que

$$\mathcal{F}_p = \operatorname{colim}_{U \ni p} \mathcal{F}(U).$$

De fato, para cada U aberto de X contendo p, defina

$$g_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_p, \quad f \mapsto [f, U] = f_p.$$

Afirmo que, para qualquer sequência de abertos $p \in V \subseteq U$ de X, o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[rr, "\mathrm{res}_{U,V}"] \arrow[dr, "g_U"'] & & \mathcal{F}(V) \arrow[dl, "g_V"] \\ & \mathcal{F}_p & \end{tikzcd}$$

comuta. De fato, para todo $f \in \mathcal{F}(U)$, temos $[f, U] = [f|_V, V]$. Assim, $(\mathcal{F}_p, \{\phi_U\}_{U \ni p})$ é um co-cone para o diagrama $\{\mathcal{F}(U) \mid p \in U \in \mathbf{Op}(X)\}$. Seja agora $(A, \{\psi_U : \mathcal{F}(U) \to A\}_{U \ni p})$ outro co-cone, isto é, um par tal que $\forall\, f \in \mathcal{F}(U)$ e $p \in V \subseteq U$, temos

$$\psi_U(f|_U) = \psi_V(f). \tag{4.1}$$

Defina

$$\xi : \mathcal{F}_p \to A, \quad [f, U] \mapsto \psi_U(f).$$

Claramente ξ está bem definida por (4.1), e é a única função tal que $\psi_U = \xi \circ \phi_U$, para todo aberto U contendo p.

Vamos dar exemplos:

Exemplo 4.3 (Germes de funções diferenciáveis em p)**.** Seja $\mathcal{O}_X$ o feixe das funções reais diferenciáveis na variedade X e seja $p \in X$. O talo de $\mathcal{O}$ em p pode ser pensado como

$$\mathcal{O}_{X,p} = \text{“funções diferenciáveis em } p\text{”}.$$

Exemplo 4.4 (Germes do feixe estrutural de um domínio)**.** Seja A um domínio e $\mathcal{O}_A$ seu feixe estrutural. Seja $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$. Então

$$\mathcal{O}_{A,p} = \operatorname{colim}_{U \ni \mathfrak{p}} \mathcal{O}_A(U) = \operatorname{colim}_{D(h) \ni \mathfrak{p}} \mathcal{O}_A(D(h)),$$

Onde $D(h) = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(A) \mid h \notin \mathfrak{q}\}$ são os abertos básicos de $\operatorname{Spec}(A)$.

Para qualquer domínio R, vale $\bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R} R_\mathfrak{p} = R$. Assim, seja $h \in A$, segue da bijeção

$$D(h) \to \operatorname{Spec} A_h, \quad \mathfrak{q} \mapsto \mathfrak{q}_h,$$

que

$$\mathcal{O}_A(D(h)) = \bigcap_{h \notin \mathfrak{q}} A_\mathfrak{q} = \bigcap_{\mathfrak{q}_h \in \operatorname{Spec}(A_h)} (A_h)_{\mathfrak{q}_h} = A_h,$$

onde a última igualdade segue do fato de A_h ser um domínio.

Portanto

$$\mathcal{O}_{A,p} = \operatorname{colim}_{D(h) \ni \mathfrak{p}} \mathcal{O}_A(D(h)) = \operatorname{colim}_{D(h) \ni \mathfrak{p}} A_h = A_\mathfrak{p},$$

onde a última igualdade segue do fato do colimite de um diagrama dado por inclusões é a união.

Lema 4.5 (Função germe)**.** *Seja um feixe $\mathcal{F} \colon \boldsymbol{Op}(X) \to \mathcal{C}$. Defina, para todo aberto U de X,*

$$\operatorname{ger}_U \colon \mathcal{F} \to \prod_{p \in U} \mathcal{F}_p, \quad f \mapsto ([f, U] = f_p \in \mathcal{F}_p)_{p \in U}. \tag{4.2}$$

Então ger_U é injetor para todo aberto U.

Demonstração. Sejam $f, g \in \mathcal{F}(U)$, tal que $\operatorname{ger}_U(f) = \operatorname{ger}_U(g)$. Então, para ponto $p \in U$, existe um aberto $V_p \subseteq U$ contendo p, tal que $f|_{V_p} = g|_{V_p}$. Assim, pelo unicidade axioma da colagem única, considerando a $\{V_p\}p \in U$ a cobertura de U, temos que $f = g$. $\square$

Definição 4.6. Chamamos de *germes compatíveis* os elementos da imagem de ger_U.

Seja agora $\phi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ morfismo entre pré-feixes em X e seja $p \in X$. Podemos definir

$$\phi_p \colon \mathcal{F}_p \to \mathcal{F}_q, \quad [f, U] \mapsto [\phi_U(f), U].$$

Chamamos ϕ_p de *morfismo induzido no talo em p*. Além disso, note que a indução nos talos induz um funtor

$$-_p \colon \mathbf{Sh}_\mathcal{C}(X) \to \mathbf{Set}, \quad \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_p, \quad \phi \mapsto \phi_p$$

para todo $p \in X$.

Vamos agora mostrar um importante resultado, que diz que os morfismos são unicamente determinados por morfismos induzidos nos talos.

Lema 4.7. *Seja $\phi_1, \phi_2 \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ morfismo de pré-feixes em X. Suponha também que $\mathcal{G}$ é um feixe. Então*

$$\phi_1 = \phi_2 \quad \Leftrightarrow \quad (\phi_1)_p = (\phi_2)_p, \quad \forall\, p \in X.$$

Demonstração. A ida é trivial. Vamos provar a volta.

Suponha que $(\phi_1)_p = (\phi_2)_p, \quad \forall\, p \in X$ e seja $U \subseteq X$ aberto. Temos

$$\mathrm{ger}_U^{\mathcal{G}}((\phi_1)_U(f)) = \prod_{p\in U} (\phi_1)_p(f_p) = \prod_{p\in U} (\phi_2)_p(f_p) = \mathrm{ger}_U^{\mathcal{G}}((\phi_2)_U(f)),$$

para todo $f \in \mathcal{F}(U)$. Porém $\mathrm{ger}_U^{\mathcal{G}}$ é injetivo, já que $\mathcal{G}$ é feixe. Logo $(\phi_1)_U(f) = (\phi_2)_U(f)$, para todo $f \in \mathcal{F}(U)$. Em particular, $(\phi_1)_U = (\phi_2)_U$, para todo aberto U, e o lema segue. □

Quando o feixe tem valores numa categoria abeliana $\mathcal{A}$, temos que as propriedade monomorfismo e epimorfismo também são unicamente determinados pelos morfismos induzidos nos talos.

Antes de enunciar o teorema, observe que podemos definir uma estrutura nos talos de tal forma que sejam objetos de $\mathcal{A}$. Como exemplo, façamos para $\mathcal{A} = \mathbf{Ab}$. Seja $\mathcal{F}$ um feixe abeliano em X e seja $p \in X$. Defina, para todo $f \in \mathcal{F}(V)$, $f' \in \mathcal{F}(U)$, com $p \in V \cap U$,

$$[f, V] + [f', U] = [\,f|_W + f'\big|_W, W] \in \mathcal{F}_p,$$

onde $W \subseteq V \cap U$ é tal que:

$$[\,f|_W, W] = [f, V] \text{ e } [\,f'\big|_W, W] = [f', U].$$

Assim $\mathcal{F}_p \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Ab})$.

Lema 4.8. *Seja $\phi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ morfismo não nulo de feixes em X com valores numa categoria abeliana $\mathcal{A}$. Então ϕ é monomorfismo (respec., epimorfismo) em $\boldsymbol{Sh}_{\mathcal{A}}(X)$ se, e somente se, ϕ_p é injetivo (respec., sobrejetor), para todo $p \in X$.*

Demonstração. Vamos provar apenas para o caso monomorfismo e injetivo. O caso epimorfismo e sobrejetivo é totalmente dual.

Suponha ϕ_p é injetivo, para todo $p \in X$, e seja $\psi \colon \mathcal{H} \to \mathcal{F}$ tal que $\phi\psi = 0$. Então temos que $0 = (\phi\psi)_p = \phi_p\psi_p$, para todo $p \in X$. Assim, como ϕ_p é injetivo, segue que $\psi_p = 0$, para todo $p \in X$. Segue pelo Lema (4.7) que $\psi = 0$, e portanto ϕ é monomorfismo.

Suponha agora ϕ um monomorfismo. Afirmo que $\phi_U \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ é injetor para todo aberto U. Com efeito, considera o feixe em X definido por

$$\mathcal{H}(V) = \Big\{ K = \mathrm{Ker}(\phi_U), \quad V \subseteq U; 0, \text{caso contrário.}$$

Tome o morfismo de feixe $\mu \colon \mathcal{H} \to \mathcal{F}$, definido por: $\mu_V \colon \mathcal{H}(V) \hookrightarrow \mathcal{F}(V)$ é a inclusão. Temos que $\phi\mu = 0$. Assim, $\mu = 0$ e portanto $\mathrm{Ker}(\phi_U) = 0$, para todo aberto U.

Finalmente, seja $p \in X$ e $K_p = \mathrm{Ker}(\phi_p)$. Então para todo $f_p \in K_o$, existe um aberto $V \subseteq X$ contendo p tal que $f_p = [f, V]$ e $\phi_V(f) = 0$. Logo $f = 0$. Portanto para todo $p \in X$, ϕ_p é injetivo. □

Observação 4.9. Para a prova do caso "sobrejetor implica epimorfismo" no lema anterio, usamos o feixe arranha-céu na argumentação.

4.2. **Feixeficação.** Vamos agora aprender como transformar um pré-feixe em feixe. Para isso primeiro precisamos entender o que é "transformar em feixe", que será chamado de feixeficação.

Definição 4.10 (Feixeficação)**.** Seja $\mathcal{F}$ um pré-feixe em X com valores em $\mathcal{C}$. Um morfismo $\mathrm{sh}\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^{\mathrm{sh}}$ de pré-feixes em X é chamado *feixeficação de* $\mathcal{F}$ se

- $\mathcal{F}^{\mathrm{sh}}$ é feixe em X com valores em $\mathcal{C}$; e
- Para todo feixe $\mathcal{G} \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Sh}_{\mathcal{C}}(X))$ e morfismo de pré-feixe $\phi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, existe único morfismo de feixes $\phi^{\mathrm{sh}}\colon \mathcal{F}^{\mathrm{sh}} \to \mathcal{G}$ tal que $\phi = \phi^{\mathrm{sh}} \circ \mathrm{sh}$.

Primeiramente observe que a definição de feixeficação é dada por uma propriedade universal. Assim, se a feixeficação existe, *ela é única a menos de um único isomorfismo.*

Vamos agora mostrar que a feixeficação existe.

Theorem 4.11. *Existe feixeficação para todo préfeixe $\mathcal{F} \in \boldsymbol{PSh}_{\mathcal{A}}(X)$, onde $\mathcal{A}$ é categoria abeliana.*

Demonstração. Para cada aberto U de X, defina

$$\mathcal{F}^{\mathrm{sh}}(U) = \{(f_p = [f, U] \in \mathcal{F}_p)_{p \in U} \mid \forall\, q \in U,\, \exists q \in V \subseteq U,\ \text{tal que } (f_p)_{p\in V} \in \mathrm{Im}(\mathrm{ger}_V)\}.$$

e para cada $V \subseteq U$, defina

$$\mathrm{res}_{U,V}\colon (f_p)_{p\in U} \mapsto (f_p)_{p \in V}.$$

Claramente $\mathcal{F}^{\mathrm{sh}}$ é feixe.

Definimos o morfismo de pré-feixes $\mathrm{sh}\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^{\mathrm{sh}}$ por

$$\mathrm{sh}_U\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}^{\mathrm{sh}}(U), \quad f \mapsto \mathrm{ger}_U(f),$$

para todo aberto U.

Para mostrar que sh satisfaz a propriedade universal, considere o diagrama de pré-feixes, com $\mathcal{G}$ um feixe:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\mathrm{sh}"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathcal{F}^{\mathrm{sh}} \arrow[d, dashed, "\hat{\phi}"] \arrow[dl, dotted, "\exists!\tilde{\phi}"] \\
\mathcal{G} \arrow[r, "\mathrm{sh}^{\mathcal{G}}"'] & \mathcal{G}^{\mathrm{sh}},
\end{tikzcd}$$

onde $\hat{\phi}$ é dada por $\hat{\phi}_U((f_p)_{p\in U}) = (\phi_p(f_p))_{p \in U}$, for all $(f_p)_{p\in U} \in \mathcal{F}^{\mathrm{sh}}(U)$. Basta mostrar que $\mathrm{sh}_{\mathcal{G}}$ é isomorfismo, e definir $\tilde{\phi} = \mathrm{sh}_{\mathcal{G}}^{-1}\hat{\phi}$.

Para ver que $\mathrm{sh}_{\mathcal{G}}$ é isomorfismo, repare que para cada $q \in X$, temos

$$(\mathrm{sh}_{\mathcal{G}})_q\colon \mathcal{G}_q \to \mathcal{G}_q^{\mathrm{sh}}, \quad f_q = [f, V] \mapsto [(\mathrm{sh}_{\mathcal{G}})_V(f), V] = [(f_p)_{p\in V}, V]$$

é bijetora. Portanto, pelo Lema 4.8, segue que $\mathrm{sh}_{\mathcal{G}}$ é isomorfismo. □

Observação 4.12. No teorema anterior admitimos $\mathcal{A}$ abeliana, apenas para aplicarmos o Lema 4.8, que provamos apenas para feixes com valores em categoria abeliana.

É possível a demonstração dese resultado para um caso mais geral. Veja [Sta20, Tag 007X] para mais detalhes.

5. Feixes abelianos

Sessa sessão vamos finalmente provar nosso resultado principal: *a categoria dos feixes abelianos é abeliana.*

Assim, durante a sessão assuma $\mathcal{A}$ sendo uma categoria abeliana com objetos em **Set**, como por exemplo A**-mod** e **Ab**.

Para atingir nosso objetivo, vamos passar o problema para o estudo dos morfismos induzidos nos talos. Assim:

Proposição 5.1. *Seja $\phi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ um morfismo entre feixes em X com valores em$\mathcal{A}$. Então existe um isomorfismo natural $(\operatorname{Ker}\phi)_p \simeq \operatorname{Ker}(\phi_p)$.*

Demonstração. Basta observar que

$$(\operatorname{Ker}\phi)_p = \{[f \in \operatorname{Ker}(\phi_U), U \ni p]\} \simeq \{[f \in \mathcal{F}(U), U \ni p] \mid \phi_p([f, U]) = 0\} = \operatorname{Ker}(\phi_p).$$

□

Vamos agora definir o feixe conúcleo. Seja $\phi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ morfismo em $\mathbf{Sh}_{\mathcal{A}}(X)$ e seja $\operatorname{Coker}_{\mathrm{pre}}\phi$ o conúcleo de ϕ em $\mathbf{PSh}_{\mathcal{A}}(X)$. Definimos

$$\operatorname{Coker}\phi \coloneqq (\operatorname{Coker}_{\mathrm{pre}}\phi)^{\mathrm{sh}}.$$

Para provar que $\operatorname{Coker}\phi$ satisfaz a propriedade universal, tome um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & \mathcal{G} \arrow[d, "\psi"] \\
0 \arrow[r] & \mathcal{E},
\end{tikzcd}$$

e considere o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[rr, "\phi"] \arrow[d] & & \mathcal{G} \arrow[dl] \arrow[dd, bend left, "\psi"] \\
0 \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & \operatorname{Coker}_{\mathrm{pre}}\phi \arrow[r, "\mathrm{sh}"] \arrow[dr, dashed, "\exists!\hat{\psi}"'] & \operatorname{Coker}\phi \arrow[d, dotted, "\exists!\tilde{\phi}"] \\
& & \mathcal{E}.
\end{tikzcd}$$

Proposição 5.2. *Seja $\phi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ um morfismo entre feixes em X com valores em $\mathcal{A}$. Então existe um isomorfismo natural $(\operatorname{Coker}\phi)_p \simeq \operatorname{Coker}(\phi_p)$.*

Demonstração. De forma análoga a demonstração de Prop. 5.1, podemos provar que, para qualquer $p \in X$, temos $\operatorname{Coker}(\phi_p) \simeq (\operatorname{Coker}_{\mathrm{pre}}\phi)_p$ naturalmente. Mas claramente

$$(\operatorname{Coker}_{\mathrm{pre}}\phi)_p \simeq (\operatorname{Coker}_{\mathrm{pre}}\phi)^{\mathrm{sh}}_p = (\operatorname{Coker}\phi)_p.$$

Logo segue o resultado. □

Finalmente podemos provar o teorema principal:

Theorem 5.3. *A categoria $\boldsymbol{Sh}_{\mathcal{A}}(X)$ é abeliana.*

Demonstração. Das proposições 5.1, 5.1, e lemas 4.7 e 4.8, passamos o problema de demonstrar o "teorema do homomorfismo" para os talos. Como os talos tem uma estrutura algébrica de tal forma a ser objeto de $\mathcal{A}$, que é categoria abeliana, obtemos o resultado. □

Referências

[Ass97] Ibrahim Assem. *Algèbres et Modules*. Les Presses d'Université d'Ottawa, 1997.

[Bre97] Glen E. Bredon. *Sheaf theory*, volume 170 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1997. doi:10.1007/978-1-4612-0647-7.

[Mac15] I. G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials*. Oxford Classic Texts in the Physical Sciences. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, second edition, 2015. With contribution by A. V. Zelevinsky and a foreword by Richard Stanley, Reprint of the 2008 paperback edition [MR1354144].

[nLa20] nLab authors. Additive category. http://ncatlab.org/nlab/show/additive+category, July 2020. Revision 39.

[Sta20] The Stacks project authors. The stacks project. https://stacks.math.columbia.edu, 2020.

[TB14] Eduardo Tengan and Herivelto Borges. *The title of the work*. IMPA, 2 2014.

[Ten75] B. R. Tennison. *Sheaf theory*. Cambridge University Press, Cambridge, England-New York-Melbourne, 1975. London Mathematical Society Lecture Note Series, No. 20.

[Vak17] Ravi Vakil. The rising sea: Foundations of algebraic geometry, November 2017.