Esquemas e suas propriedades básicas

Gabriel Bassan dos Santos

1 Introdução

Nesse material introduziremos a linguagem de esquemas e algumas propriedades básicas. Antes de partirmos para a matemática, vamos passar por algumas motivações para o desenvolvimento da teoria.

Pode-se dizer que a geometria algébrica clássica se concentra no estudo de variedades algébricas[1] sobre corpos algebricamente fechados, isto é, coleções de zeros de polinômios em n variáveis sobre um corpo K algebricamente fechada. Assim como com a maioria dos objetos na matemática moderna, não estamos apenas interessados em uma visão "conjuntista", também nos interessamos em como esses objetos interagem, em uma linguagem mais categórica, estamos interessados também em seus morfismos. Deste modo, definimos um morfismo de variedades algébricas

Definição 1.1. Dadas duas variedades algébricas $X \subseteq \mathbb{A}^n_K$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m_K$, dizemos que uma função $f\colon X \to Y$ é um **morfismo de variedades** se existem polinômios $p_1, \ldots, p_m \in K[t_1, \ldots, t_n]$ tais que

$$f(x) = (p_1(x), \ldots, p_m(x)) \in Y$$

para todo $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$.

É fácil de verificar que as variedades algébricas sobre K junto com seus morfismos formam uma categoria, denotada por Aff_K.

Vamos relembrar brevemente a definição de uma equivalência de categorias

Definição 1.2. Uma **equivalência de categorias** consiste de funtores $F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ e $G\colon \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ e isomorfismos naturais $\eta\colon id_{\mathsf{C}} \cong GF$ e $\varepsilon\colon GF \cong id_{\mathsf{D}}$.

Uma equivalência entre duas categorias nos diz que as categorias são essencialmente iguais. Isto fica um pouco mais claro ao enunciarmos a seguinte equivalência desta condição

[1]Consideraremos durante a introdução apenas variedades algébricas afins.

Proposição 1.1. *Um funtor $F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ define uma equivalência de categorias se, e somente se*[2]*, satisfaz as seguintes condições*

- *Para todo objeto $d \in \mathsf{D}$ existe um objeto $c \in \mathsf{C}$ tal que d é isomorfo a $F(c)$. Dizemos neste caso que F é* ***essencialmente sobrejetor****.*

- *Para todos os pares de objetos $x, y \in \mathsf{C}$, o mapa $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(x, y) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(F(x), F(y))$ é sobrejetor. Dizemos neste caso que F é* ***pleno****.*

- *Para todos os pares de objetos $x, y \in \mathsf{C}$, o mapa $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(x, y) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(F(x), F(y))$ é injetor. Dizemos neste caso que F é* ***fiel****.*

Um fato interessante sobre a categoria Aff_K é a seguinte

Proposição 1.2. *Existe uma equivalência de categorias entre Aff_K e a categoria oposta das K-álgebras reduzidas de tipo finito dada por*

$$X \longmapsto Y$$
$$f \longmapsto f^*$$

onde $A(X)$ é o anel de coordenadas de X e $f^*\colon A(Y) \to A(X)$ é dada por $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$.

Isto nos indica que em um certo sentido, estudar variedades afins é o mesmo que estudar certos anéis comutativos.

Porém algumas perguntas ainda ficam:

- É possível estendermos Aff_K de tal maneira que tenhamos uma nova categoria "geométrica"equivalente a CRing^{op}?

- Podemos definir variedades algébricas independentemente de $\mathbb{A}^n_K$?

- Podemos deduzir propriedades geométricas de X a partir de $A(X)$?

Assim como variedades algébricas, outros objetos como grupos e variedades diferenciáveis foram inicialmente definidos dependendo de um espaço ambiente, mas eventualmente conseguimos definições mais intrínsecas destes objetos. A segunda pergunta busca exatamente uma definição mais intrínseca de variedade e foi basicamente respondida pela teoria de variedades abstratas, considerada primeiro por André Weil em seu livro "Foundations of Algebraic Geometry"[1] utilizando valorações e mais tarde repaginada por Serre em "Faisceaux Algebriques Coherents"[2] utilizando a linguagem de feixes.

A primeira pergunta é mais traiçoeira, já que mesmo após definirmos variedades abstratas, ainda não encontramos a categoria desejada. Mas nem toda esperança está

[2]A volta desta afirmação depende do axioma da escolha

perdida! Ao introduzir a teoria de esquemas, Grothendieck[3] não só revolucionou a geometria algébrica como também nos mostrou que esta categoria estava escondida bem debaixo de nossos narizes! Mas antes de *esquematizarmos*[3] a teoria, vamos tentar motivar um pouco mais as definições que faremos nas próximas seções.

É claro que não temos como associar diretamente um variedade afim a qualquer anel comutativo, porém uma simples observação pode nos indicar um novo caminho para construirmos objetos "geométricos"para um anel comutativo qualquer.

Proposição 1.3. *Sejam $X \subseteq \mathbb{A}^n_K$ uma variedade afim e $A(X)$ seu anel de coordenadas, então temos um homeomorfismo entre X e $\operatorname{Specm}(A(X))$ (ambos os espaços considerados com a topologia de Zariski) dado por $p = (p_1, \ldots, p_n) \mapsto \mathfrak{m}_p = (x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n)$.*

Podemos então tentar associar a "variedade" $\operatorname{Specm}(A)$ para cada anel comutativo A porém ainda restam muitos problemas, por exemplo, dois anéis locais quaisquer possuem espectros maximais homeomorfos, pior ainda, mesmo estendendo para todo o espectro, quaisquer dois corpos ainda possuem espectros homeomorfos. Parece então que essa abordagem não irá funcionar, mas na verdade estamos muito próximos de resolver nosso problema. Perceba que podemos pensar nos elementos de $A(X)$ como funções polinomiais de X em K simplesmente avaliando algum representante de uma classe em $A(X)$ no ponto $p \in X$, em termos do Specm, estamos considerando a imagem de um elemento de $A(X)$ em $A(X)/\mathfrak{m}_p \cong K$. Copiando essa ideia, faremos a seguinte definição

Definição 1.3. Seja A um anel comutativo, dados $a \in A$ e $x \in \operatorname{Spec}(A)$[4], defina o valor de a no ponto x, denotado por $a(x)$, como a imagem de a sobre o morfismo

$$A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{p}_x \hookrightarrow k(x) := \operatorname{Frac}(A/\mathfrak{p}_x)$$

Por exemplo, considerando $A = \mathbb{C}[x]$, $a = x^2 + 1$ e $x = [(x - i)]$, temos que $a(x) = 0$, recuperando a noção de função. Outro exemplo que a princípio pode parecer estranho é o seguinte, considere $a = 27/4 \in \mathbb{Q}$, podemos também considerar a como uma "função racional"em $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ definida fora do ponto $[(2)]$ e com um zero no ponto $[(3)]$. Por exemplo, seu valor em $x = [(7)]$ é dado por

$$a(x) = 27 \cdot 4^{-1} \equiv (-1) \cdot 2 \equiv 5 \pmod 7$$

Mas infelizmente, em geral a não pode ser considerado uma função no sentido usual da palavra, visto que os valores dos pontos podem estar em corpos distintos e ainda pior do que isso, estas "funções"não são determinadas por seus valores. Pegue por exemplo o anel $A = \mathbb{C}[x]/(x^2)$, o único ponto de $\operatorname{Spec}(A)$ é $[(\overline{x})]$ e ambas as

[3] Pegou o trocadilho?

[4] Quando quisermos pensar em um ponto $x \in \operatorname{Spec}(A)$ como ideal primo denotaremos por $\mathfrak{p}_x$ o ideal primo associado a x.

funções 0 e $\overline{x}$ assumem 0 no ponto $[(\overline{x})]$. Mesmo assim esta ideia será crucial para finalizarmos a construção do nosso “objeto geométrico”.[5]

A estratégia agora será equipar $X = \mathrm{Spec}(A)$ com um feixe que, intuitivamente, associa para cada aberto de X o anel das ”funções racionais”definidas no aberto, isto nos dará não apenas um espaço topológico, nos dará o que é chamado de espaço anular, que neste caso específico chamaremos de esquema afim associado ao anel A, cuja estrutura depende não apenas de uma topologia como também de um feixe associado ao espaço. Isto finalmente nos permitirá encontrar a dualidade que procuramos.

2 Uma breve passagem pela teoria de feixes

Antes de introduzirmos a noção de esquema, vamos passar rapidamente por algumas definições e resultados sobre feixes.

Durante toda a discussão que se segue, dado um espaço topológico X, denotaremos por $\mathsf{O}(X)$ a categoria cujos objetos são os abertos de X e os morfismos são induzidos pela relação de inclusão, isto é, se $V \subseteq U$ são abertos, então existe um único morfismo de V em U, caso contrário os objetos não possuem morfismos entre si.

Definição 2.1. Seja X um espaço topológico.

1. Um **pré-feixe** de anéis (comutativos com unidade) sobre X é um funtor contravariante $\mathcal{F}\colon \mathsf{O}(X)^{op} \to \mathsf{CRing}$, ou seja, para cada $U \subseteq X$ aberto, temos que $\mathcal{F}(U)$ é um anel (cujos elementos são chamados de seções sobre U) e se $V \subseteq U$, ambos abertos, temos um morfismo de anéis $\rho^{\mathcal{F}}_{U,V}\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$, chamado morfismo de restrição, que respeita composição ($\rho^{\mathcal{F}}_{U,W} = \rho^{\mathcal{F}}_{V,W} \circ \rho^{\mathcal{F}}_{U,V}$) e identidade ($\rho^{\mathcal{F}}_{U,U} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$).

2. Um pré-feixe $\mathcal{F}\colon \mathsf{O}(X) \to \mathsf{CRing}$ é dito um **feixe** se satisfaz a seguinte “propriedade de cola”: dado um aberto $U \subseteq X$ e uma cobertura por abertos $\{U_i\}_{i\in I}$ de U, se temos seções $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ “compatíveis”, i.e.,
$$\rho^{\mathcal{F}}_{U_i,U_i\cap U_j}(f_i) = \rho^{\mathcal{F}}_{U_j,U_i\cap U_j}(f_j)$$
para todo $i, j \in I$, então existe um único $f \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\rho^{\mathcal{F}}_{U,U_i}(f) = f_i$ para todo $i \in I$.

Denotaremos na maioria das vezes $\rho^{\mathcal{F}}_{U,V}(f)$ simplesmente por $f|_V$.

Um exemplo simples de feixe de anéis sobre um espaço topológico X é dado pelos anéis de funções $f\colon U \to \mathbb{R}$ contínuas, onde $U \subseteq X$ é aberto, com os mapas de restrições usuais.

[5] Se este ponto de vista lhe pareceu estranho talvez o capítulo 1 de [4] e o capítulo 3 de [5] possam ser úteis.

Observação 2.1. *Seguindo a notação do segundo item da definição 2.1., observe que $\mathcal{F}$ é um feixe se, e somente se, a sequência*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varepsilon} \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) \xrightarrow{d^0} \prod_{i,j\in I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

é exata para todo aberto $U \subseteq X$ e toda cobertura por abertos $\{U_i\}_{i\in I}$ de U. Aqui $\varepsilon(f) = (f|_{U_i})_{i\in I}$ e $d^0((f_i)_{i\in I}) = (f_i|_{U_i\cap U_j} - f_j|_{U_i\cap U_j})_{i,j\in I}$.

Em particular, se $\mathcal{F}$ é um feixe e $U = \emptyset$, podemos cobrir U por uma cobertura vazia ($I = \emptyset$), de modo que $\prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) = 0$ (produto vazio) e portanto, como ε é injetor, $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$.

Como pré-feixes são apenas funtores, podemos considerar transformações naturais entre dois pré-feixes. Definimos então a categoria $\mathsf{PSh}(X)$, cujos objetos são pré-feixes de anéis sobre X e os morfismos são transformações naturais $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ entre dois pré-feixes, i.e., para cada aberto $U \subseteq X$ temos um morfismo $\varphi_U\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ satisfazendo que para $V \subseteq U$ abertos, o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "\rho^{\mathcal{F}}_{U,V}"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho^{\mathcal{G}}_{U,V}"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi_V"] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

Definimos também a categoria $\mathsf{Sh}(X)$, cujos objetos são feixes de anéis sobre X e os morfismos são simplesmente morfismos de pré-feixes (i.e. $\mathsf{Sh}(X)$ é uma subcategoria plena de $\mathsf{PSh}(X)$).

Definição 2.2. Sejam $\mathcal{F}\colon \mathsf{O}(X) \to \mathsf{CRing}$ um pré-feixe sobre X e $x \in X$. O **talo** $\mathcal{F}_x$ de $\mathcal{F}$ em x é o anél dado por

$$\mathcal{F}_x := \mathrm{colim}_{x\in U} \mathcal{F}(U)$$

Mais explicitamente, temos que

$$\mathcal{F}_x = \frac{\coprod_{x\in U} \mathcal{F}(U)}{\sim}$$

onde $(U, f) \sim (V, g)$ se, e só se, existe $W \subseteq U \cup V$ vizinhança de x tal que $f|_W = g|_W$. A soma e produto em $\mathcal{F}_x$ são definidos por $[(U, f)] + [(V, g)] = [(W, f|_W + g|_W)]$ e $[(U, f) \cdot (V, g)] = [(W, f|_W \cdot g|_W)]$, onde $W = U \cap V$. Perceba também que dado $U \subseteq X$ aberto e $x \in U$, temos um homomorfismo canônico de $\Phi_x\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x$ dado por $\Phi_x(f) = [(f, U)]$. Muitas vezes denotaremos a imagem de $f \in \mathcal{F}(U)$ em $\mathcal{F}_x$ por $f_x := [(f, U)]$.

Observação 2.2. *Perceba que se soubermos os valores de um feixe em uma base $\mathcal{B}$ da topologia de X, então podemos calcular o talo de $\mathcal{F}$ em x por*

$$\mathcal{F}_x := \mathrm{colim}_{x\in B}\mathcal{F}(B)$$

apenas para os abertos $B \in \mathcal{B}$.

Definição 2.3. Sejam $\mathcal{F}\colon \mathsf{O}(X)^{op} \to \mathsf{CRing}$ um pré-feixe e $U \subseteq X$ aberto, um elemento $(s_x)_{x\in U} \in \prod_{x\in U}\mathcal{F}_x$ é dito uma **tupla compatível** de U se para todo $x \in U$ existe uma vizinhança $U_x \subseteq U$ de x e uma seção $f^x \in \mathcal{F}(U_x)$ tal que $f^x_y = s_y \in \mathcal{F}_y$ para todo $y \in U_x$.

Proposição 2.1. *Se $\mathcal{F}$ é um feixe, dado $U \subseteq X$ aberto, defina o homomorfismo de anéis*

$$\Phi\colon \mathcal{F}(U) \to \prod_{x\in U}\mathcal{F}_x$$

dado por $\Phi(f) = (f_x)_{x\in U}$. Provemos que Φ é injetor cuja imagem é o conjunto C das tuplas compatíveis de U.

Demonstração. Vamos provar a afirmação por partes,

1. Para provarmos que Φ é injetora, suponha que $f \in \mathcal{F}(U)$ é tal que $f_x = 0$ para todo $x \in U$, então para cada x, existe uma vizinhança $U_x \subseteq U$ de x tal que $f|_{U_x} = 0$. Como $\{U_x\}_{x\in U}$ é uma cobertura aberta de U, segue então que $f = 0$.

2. É claro que a imagem de Φ está contido em C, por outro lado, dada uma tupla compatível $(s_x)_{x\in U}$, existe uma cobertura aberta $\{U_x\}_{x\in U}$ de U onde $x \in U_x$ e elementos $f^x \in \mathcal{F}(U_x)$ para cada $x \in U$ tais que $f^x_y = s_y$ para todo $y \in U_x$. Vamos provar que dados $x, y \in U$ tais que $U_x \cap U_y \neq \varnothing$, então $f^x|_{U_x\cap U_y} = f^y|_{U_x\cap U_y}$, já que desta maneira, pela propriedade de cola, existe um único $f \in \mathcal{F}(U)$ tal que $f|_{U_x} = f^x$ para todo $x \in U$ e portanto, $\Phi(f) = (s_x)_{x\in U}$. De fato, pela definição dos f^x, temos que $f^x_p = [(f^x|_{U_x\cap U_y}, U_x \cap U_y)] = [(f^y|_{U_x\cap U_y}, U_x \cap U_y)] = f^y_p \in \mathcal{F}_p$ para todo $p \in \mathcal{F}(U_x \cap U_y)$. Mas como o mapa

$$\mathcal{F}(U_x \cap U_y) \hookrightarrow \prod_{p\in U_x\cap U_y}\mathcal{F}_p$$

é injetor, segue então que $f^x|_{U_x\cap U_y} = f^y|_{U_x\cap U_y}$.

■

Como as seções de um feixe precisam satisfazer algumas restrições de ”compatibilidade”, é de se esperar que muitas vezes, ao se construir um feixe, explicitar as seções sobre um aberto qualquer seja uma tarefa complicada. Felizmente, veremos que um feixe está unicamente determinado pelos seus valores em uma base. Vamos deixar essa afirmação precisa pelos próximos lemas que serão muito importantes para construção de esquemas.

Lema 2.1. *Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{B}$ uma base de X. Defina $\mathcal{B}(X)$ como a subcategoria plena de $\mathsf{O}(X)$ cujos objetos são os elementos de $\mathcal{B}$. Dado um funtor $\mathcal{F}\colon \mathcal{B}(X)^{op} \to \mathsf{CRing}$ satisfazendo*

- *Se $U \in \mathcal{B}$ e $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ uma cobertura de U por abertos de $\mathcal{B}$, dados $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tais que, para todo $i, j \in I$, $f_i|_V = f_j|_V$ para todo $V \in \mathcal{B}$ com $V \subseteq U_i \cap U_j$, então existe um único $f \in \mathcal{F}(U)$ tal que $f|_{U_i} = f_i$ para todo $i \in I$.*

Então existe um único feixe $\tilde{\mathcal{F}}\colon \mathsf{O}(X)^{op} \to \mathsf{CRing}$ que estende $\mathcal{F}$.

Demonstração. Vamos apenas esboçar a demonstração. Observando a proposição 2.1., temos um chute "natural" para $\tilde{\mathcal{F}}(U)$, de fato, sabemos que os talos já estão determinados pela observação 2.2., tome então $\tilde{\mathcal{F}}(U)$ como o conjunto das tuplas coerentes de $\prod_{x\in U} \mathcal{F}_x$, é simples de mostrar que definido desta maneira $\tilde{\mathcal{F}}$ é o feixe de anéis procurado e é único. ■

Lema 2.2. *Seja X um espaço topológico e $\mathcal{B}$ uma base de X. Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ dois feixes de anéis comutativos sobre X. Suponha que $\varphi\colon\ \mathcal{F}|_{\mathcal{B}(X)^{op}} \to \mathcal{G}|_{\mathcal{B}(X)^{op}}$ é um morfismo de funtores entre as restrições de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ a categoria $\mathcal{B}(X)^{op}$, i.e., para cada $U \in \mathcal{B}$ temos um morfismo $\psi_U\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ e para cada inclusão $V \subseteq U$ com $U, V \in \mathcal{B}$, temos que o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\psi_U"] \arrow[d, "\rho_{U,V}"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho_{U,V}"] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\psi_V"] & \mathcal{G}(V) \end{tikzcd}$$

Então existe um único morfismo $\tilde{\varphi}\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ que estende φ.

Demonstração. Novamente apenas esboçaremos a demonstração. A ideia é essencialmente a mesma que a anterior, nos restringimos aos morfismos associados aos talos e os "colamos" de maneira que temos morfismos

$$\prod_{x\in U} \mathcal{F}_x \longrightarrow \prod_{x\in U} \mathcal{G}_x$$

após isso verificamos que a imagem de tuplas coerentes são tuplas coerentes, e então temos o morfismo desejado. ■

Após esses dois lemas bastante técnicos, estamos prontos pra apresentar o último conceito importante para a definição de esquemas.

Definição 2.4. 1. Um par $(X, \mathcal{O}_X)$ onde X é um espaço topológico e $\mathcal{O}_X$ é um feixe de anéis comutativos sobre X é chamado de um **espaço anular**.

2. Um espaço anular $(X, \mathcal{O}_X)$ é dito **localmente anular** se o talo $\mathcal{O}_{X,x}$ é um anel local para todo $x \in X$. Além disso denotaremos o ideal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$ por $\mathfrak{m}_{X,x}$.

Podemos também definir morfismos entre espaços anulares, mas antes disso perceba que dado uma função contínua $f\colon X \to Y$ e um feixe $\mathcal{F}$ sobre X, podemos induzir um novo feixe $f_*\mathcal{F}$ sobre Y, chamado de **imagem direta** (ou **pushfoward**) de $\mathcal{F}$ dado por

$$f_*\mathcal{F}(U) := \mathcal{F}(f^{-1}(U))$$

para todo $U \subseteq Y$ aberto, onde os mapas de restrição são os mesmos de $\mathcal{F}$. Na realidade, f_* é um funtor entre $\mathsf{Sh}(X)$ e $\mathsf{Sh}(Y)$.

Podemos então definir morfismos de espaços anulares da seguinte maneira

Definição 2.5. 1. Um **morfismo de espaços anulares** é um par $(f, f^\sharp)\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ onde $f\colon X \to Y$ é uma função contínua e $f^\sharp\colon \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ é um morfismo de feixes de anéis comutativos sobre Y.

2. Se $(X, \mathcal{O}_X)$ e $(Y, \mathcal{O}_Y)$ são espaços localmente anulares, um morfismo $(f, f^\sharp)\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ é dito **local** se para todo ponto $x \in X$, o morfismo

$$f_x^\sharp\colon \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$$

dado por $f_x^\sharp([(U,h)]) = [(f^{-1}(U), f_U^\sharp(h))]$ é um morfismo local, i.e., $f_x^\sharp(\mathfrak{m}_{Y,f(x)}) \subseteq \mathfrak{m}_{X,x}$.

É fácil verificar que os espaços anulares formam uma categoria RS com os morfismos como definidos acima e os espaços localmente anulares formam uma categoria LRS com morfismos sendo morfismos locais de espaços anulares.

Após essa *não* tão breve passagem pelo mundo dos feixes, estamos finalmente prontos para definir esquemas.

3 Esquemas afins

Esta seção será bastante técnica[6], porém tentaremos fazer a construção dos esquemas de maneira mais “intuitiva”[7] possível.

[6] E possivelmente maçante.
[7] Se é que essa palavra tem algum sentido aqui...

Utilizando a analogia com funções colocada na introdução, gostaríamos de construir um feixe sobre $X = \mathrm{Spec}(A)$, mas pelos resultados da seção anterior, para definirmos este feixe sobre X basta defini-lo em uma base de X.
Considere então a base $\mathcal{B} = \{D(f) \mid f \in A\}$ de X, se quisermos pensar em A como o anel das "funções"globais em X e $\mathcal{F}(D(f))$ como um anel de "funções"definidas sobre $D(f)$ é razoável que qualquer elemento $g \in A$ que não se anule em $D(f)$ possa ser invertido nesse aberto.
Perceba que $D(f) = \{\mathfrak{p} \in X \mid f \notin \mathfrak{p}\} = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$, então gostaríamos que um elemento $g \in A$ fosse inversível sobre $D(f)$ se $D(f) \subseteq D(g)$. Seja então S_f o subconjunto dos elementos g de A que satisfazem $D(f) \subseteq D(g)$, é simples de verificar que $D(f) \subseteq D(g) \iff f \in \sqrt{(g)}$, segue então que

$$S_f = \{a \in A \mid \exists b \in A \text{ e } \exists n \in \mathbb{N} \text{ tais que } ab = f^n\}$$

É fácil de verificar que S_f é multiplicativo e que caso $D(f) \subseteq D(g)$ então $S_g \subseteq S_f$, em particular, se $D(f) = D(g)$, então $S_f = S_g$, isto é, S_f não depende de representantes.
Gostaríamos então de definir $\mathcal{F}(D(f)) = S_f^{-1}A$. Para definirmos os mapas de restrição, perceba que se $D(f) \subseteq D(g)$, pela propriedade universal da localização, existe uma única $\rho_{g,f} \colon S_g^{-1}A \to S_f^{-1}A$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi_f"] \arrow[d, "\varphi_g"'] & S_f^{-1}A \\ S_g^{-1}A \arrow[ur, dotted, "\exists!\rho_{g,f}"'] & \end{tikzcd}$$

comuta[8].

Gostaríamos então que os morfismos de restrição fossem $\rho_{g,f}$, perceba que se $D(f) \subseteq D(g) \subseteq D(h)$, então temos um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} S_h^{-1}A \arrow[r, "\rho_{h,g}"] \arrow[rr, bend right, "\rho_{h,f}"'] & S_g^{-1}A \arrow[r, "\rho_{g,f}"] & S_f^{-1}A \end{tikzcd}$$

e portanto estes mapas de restrições satisfazem as condições de um pré-feixe.

Observação 3.1. *Uma conta simples mostra que $S_f^{-1}A \cong A_f$, o que poderá ser útil para simplificar nossas contas.*

Estamos então prontos para definirmos o feixe estrutural de um esquema afim.

Proposição 3.1. *Seja A um anel. Existe um feixe de anéis $\mathcal{O}_A$ sobre $\mathrm{Spec}(A)$ tal que*

$$\mathcal{O}_A(D(f)) \cong S_f^{-1}A \cong A_f$$

com os mapas de restrição dados pelos $\rho_{g,f}$ definidos acima. Além disso, desta maneira $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_A)$ é um espaço localmente anular.

[8] Aqui φ_f e φ_g são os mapas de localização.

Demonstração. Defina $\mathcal{O}_A(D(f)) = S_f^{-1}A$ e para $D(f) \subseteq D(g)$ os mapas de restrição $\rho_{g,f}$ como descritos na introdução desta seção. Pelo lema 2.1., basta mostrarmos que $\mathcal{O}_A$ satisfaz as condições necessárias para ser estendido para um feixe.

Sejam $D(f) = \bigcup_{i\in I} D(f_i)$ e $g_i \in S_{f_i}^{-1}A$ concordando em $D(f_i) \cap D(f_j) = D(f_i f_j)$, isto é

$$\rho_{f_i, f_i f_j}(g_i) = \rho_{f_j, f_i f_j}(g_j)$$

para todos $i, j \in I$.

Gostaríamos de encontrar um único $g \in S_f^{-1}A$ tal que $\rho_{f,f_i}(g) = g_i$ para todo $i \in I$.

Podemos supor sem perda de generalidade que $f = 1$, já que $D(f) \cong \text{Spec}(S_f^{-1}A)$, e que I é finito, já que Spec é compacto. Então reduzimos para o caso

$$\text{Spec}(A) = \bigcup_{i=1}^{k} D(f_i)$$

Vamos provar a existência e unicidade de g em partes.

- **Existência de** g: Pela definição de $S_{f_i}^{-1}$, temos que cada g_i pode ser escrito como $g_i = a_i/f_i^{n_i}$, mas como I é finito podemos supor que todos os n_i são iguais a um inteiro positivo N (de fato, basta substituir os n_i pelo máximo dos n_i). Do fato dos g_i concordarem nas interseções, temos que

$$\begin{aligned} \frac{a_i}{f_i^N} = \frac{a_j}{f_j^N} &\iff (f_i f_j)^M (a_i f_j^N - a_j f_i^N) = 0 \\ &\iff a_i f_i^M f_j^{N+M} = a_j f_i^{N+M} f_j^M \end{aligned} \tag{1}$$

  para algum M inteiro positivo e para todos $i, j \in I$.

  (Aqui utilizamos novamente o fato de que I é finito e a definição de $S_{f_i}^{-1}A$)

  Além disso, é claro que $D(f_i^{N+M}) = D(f_i)$ e $\bigcup_{1\leq i\leq k} D(f_i) = \text{Spec}(A)$ se, e somente se $(f_1, \ldots, f_k) = A$. Mas então como $\bigcup_{1\leq i\leq k} D(f_i^{N+M}) = \bigcup_{1\leq i\leq k} D(f_i)$ o conjunto $\{f_i^{N+M}\}_{1\leq i\leq k}$ gera A e portanto existem $t_i \in A$ tais que

$$\sum_{i=1}^{k} t_i f_i^{N+M} = 1 \tag{2}$$

  Perceba que isto nos dá uma "partição da unidade"em A, de tal maneira que dado $x \in A$ qualquer, temos que $\sum_{i=1}^{k} t_i (x f_i^{N+M}) = x$. Caso encontremos o

$g \in A$ procurado, teríamos que $g/1 = a_i/f_i^N = a_i f_i^M / f_i^{M+N}$ para todo i, mas então "substituindo"[9] em (2), teríamos que

$$g = \sum_{i=1}^{k} t_i(g f_i^{N+M}) = \sum_{i=1}^{k} t_i \left(\frac{a_i f_i^M}{f_i^{M+N}} \cdot f_i^{N+M} \right) = \sum_{i=1}^{k} t_i(a_i f_i^M)$$

Defina então g como o resultado final na conta acima, vamos provar que este candidato de fato satisfaz o que queremos. Fixe j, então temos

$$\begin{aligned} g f_j^{N+M} &= \sum_{i=1}^{k} t_i(a_i f_i^M) f_j^{M+N} \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{k} t_i a_j f_i^{N+M} f_j^M \\ &= a_j t_j^M \sum_{i=1}^{k} t_i f_i^{N+M} \overset{(2)}{=} a_j f_j^M \end{aligned}$$

Ou seja,

$$f_j^M(g f_j^N - a_j) = 0 \in A \Longrightarrow \frac{g}{1} = \frac{a_j}{f_j^N} = g_i \in S_{f_j}^{-1} A$$

como queríamos.

- **Unicidade de** g: A unicidade é mais simples de se obter, de fato, considere a seguinte sequência exata de A-módulos

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}(\varepsilon) \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} \prod_{i=1}^{k} S_{f_i}^{-1} A$$

onde ε é o produto dos mapas de localização. Para provarmos a unicidade de g basta provarmos que $\operatorname{Ker}(\varepsilon) = 0$, mas sabemos que dado um A-módulo M, então $M = 0 \iff M_\mathfrak{p} = 0$ para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$, então basta mostrarmos que dado $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ temos que $\operatorname{Ker}(\varepsilon)_\mathfrak{p} = \operatorname{Ker}(\varepsilon_\mathfrak{p}) = 0$. Sabemos que existe f_i tal que $\mathfrak{p} \in D(f_i)$, isto é, $f_i \notin \mathfrak{p}$, mas então é fácil de verificar que $(S_{f_i}^{-1} A)_\mathfrak{p} \cong A_\mathfrak{p}$ e a localização em $\mathfrak{p}$ do mapa $A \to S_{f_i}^{-1} A$ é a identidade em $A_\mathfrak{p}$, segue então que $\varepsilon_\mathfrak{p}$ é injetor, já que uma de suas coordenadas é a identidade.

Por fim, como $\operatorname{colim}_{\mathfrak{p} \in D(f)} A_f = \operatorname{colim}_{f \notin \mathfrak{p}} A_f = A_\mathfrak{p}$ temos que $\operatorname{Spec}(A)$ é um espaço localmente anular. ■

Definimos então o **esquema afim** associado ao anel A como o espaço localmente anular $(\operatorname{Spec}(A), \mathcal{O}_A)$. Na maioria das vezes, por abuso de linguagem, denotaremos o esquema afim apenas por $\operatorname{Spec}(A)$ e um morfismo entre esquemas apenas por f.

Definimos também um morfismo entre esquemas afins apenas como um morfismo em LRS. Assim temos uma categoria $\mathsf{Aff\ Sch}$ dos esquemas afins.

[9] Perceba que esta conta não tem um sentido real em A, é apenas uma motivação para um possível candidato para g.

É claro que dado um morfismo de esquemas $f\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$, temos um morfismo induzido de anéis $f^\sharp_{\mathrm{Spec}(A)}\colon A \to B$, já que $\mathcal{O}_R(\mathrm{Spec}(R)) \cong R$ para qualquer anel R. Vamos agora mostrar como associar a cada morfismo de anéis $\varphi\colon A \to B$ um morfismo de esquemas afins $f\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$.

Dado $\varphi\colon A \to B$, definimos $f = \mathrm{Spec}(\varphi)$. Queremos agora definir um morfismo $f^\sharp\colon \mathcal{O}_A \to f_*\mathcal{O}_B$.

É fácil de verificar que dado $h \in A$, temos que $f^{-1}(D(h)) = D(\varphi(h))$, e então pelo lema 2.2 é suficiente encontrarmos morfismos $\psi_h\colon S_h^{-1}A \cong \mathcal{O}_A(D(h)) \to f_*\mathcal{O}_B(D(h)) = \mathcal{O}_B(D(\varphi(h))) \cong S^{-1}_{\varphi(h)}B$ tais que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
S_g^{-1}A \arrow[r, "\psi_g"] \arrow[d, "\rho_{g,h}"'] & S^{-1}_{\varphi(g)}B \arrow[d, "\rho_{\varphi(g),\varphi(h)}"] \\
S_h^{-1}A \arrow[r, "\psi_h"] & S^{-1}_{\varphi(h)}B
\end{tikzcd}$$

sempre que $D(h) \subseteq D(g)$.

Definimos assim ψ_h pela propriedade universal da localização, já que a imagem de S_h^{-1} pelo morfismo $A \xrightarrow{\varphi} B \to S^{-1}_{\varphi(h)}B$ esta contida em $S^{-1}_{\varphi(h)}$, dada por

$$\begin{aligned}
\psi_h\colon S_h^{-1}A &\longrightarrow S^{-1}_{\varphi(h)}B \\
\frac{a}{s} &\longmapsto \frac{\varphi(a)}{\varphi(s)}
\end{aligned}$$

Desta maneira é fácil verificar que o diagrama descrito anteriormente é de fato comutativo e então definimos $f^\sharp_{D(h)} = \psi_h$.

Por fim, dado $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$, é fácil de se verificar que o morfismo induzido nos talos é dado por

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{A,f(\mathfrak{q})} \arrow[r, "f^\sharp_{\mathfrak{q}}"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathcal{O}_{B,\mathfrak{q}} \arrow[d, "\cong"] \\
A_{\varphi^{-1}\mathfrak{q}} \arrow[r, "\varphi_{\varphi^{-1}\mathfrak{q}}"] & B_{\mathfrak{q}}
\end{tikzcd}$$

e portanto é local, ou seja, $(f, f^\sharp)$ é um morfismo de esquemas.

Desta maneira temos dois funtores

$$\begin{aligned}
\mathrm{Spec}\colon \mathsf{CRing}^{op} &\longrightarrow \mathsf{Aff\ Sch} \\
A &\longmapsto (\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_A) \\
\varphi\colon A \to B &\longmapsto f\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\Gamma\colon \mathsf{Aff\ Sch} &\longrightarrow \mathsf{CRing}^{op}\\ (\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_A) &\longmapsto \mathcal{O}_A(\mathrm{Spec}(A)) \cong A\\ f\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A) &\longmapsto f^\sharp_{\mathrm{Spec}(A)}\colon A \to B\end{aligned}$$

Vamos então provar que Spec e Γ são equivalências de categorias.

Proposição 3.2. *Os funtores* Spec *e* Γ *definem uma equivalência de categorias entre* $\mathsf{Aff\ Sch}$ *e* CRing^{op}.

Demonstração. Apenas esboçaremos a demonstração.[10] É simples de verificar que $\Gamma \circ \mathrm{Spec} \cong \mathrm{Id}_{\mathsf{CRing}^{op}}$ e $\mathrm{Spec} \circ \Gamma \cong \mathrm{Id}_{\mathsf{Aff\ Sch}}$ nos objetos. Além disso, pela definição, é claro que $\Gamma \circ \mathrm{Spec} = \mathrm{Id}$ nos morfismos e para a outra composição, perceba que dado um morfismo $(f, f^\sharp)$ de esquemas, é claro que a função contínua $F = \mathrm{Spec}(\Gamma(f))$ entre os **espaços topológicos** dos Spec associada a $\Gamma(f)$ é igual a f. Para verificarmos que $F^\sharp = f^\sharp$, basta verificarmos nos talos, e isso é uma conta relativamente simples. ∎

Com isso respondemos parcialmente a primeira pergunta colocada na introdução, porém ainda resta a seguinte questão: "como relacionar as noções de variedades algébricas afins e esquemas afins?". Esta questão será o foco principal da próxima seção.

4 Variedades algébricas e esquemas afins

Esta seção será menor do que as demais já que se trata mais de uma curiosidade e não queremos nos estender neste assunto. Na última seção provamos que $\mathsf{Aff\ Sch}$ é equivalente a CRing^{op}, mas ainda não discutimos exatamente como, ou em qual sentido, a noção de esquema generaliza variedades algébricas.

Um bom "chute" para começarmos a estudar essa relação seria começar com uma variedade $X \in \mathbb{A}^n_K$, associar a ela seu anel de funções regulares $A(X)$ e então associar a $A(X)$ seu esquema afim $\mathrm{Spec}(A(X))$. Mas dado um esquema afim X, como podemos recuperar uma variedade? Uma ideia natural seria de nos restringirmos apenas aos espectros de K-álgebras de tipo finito, mas ainda teríamos uma certa redundância com anéis não reduzidos, como $\mathbb{C}[x]/(x^2)$ e $\mathbb{C}[x]/(x)$, então talvez uma ideia melhor seria de nos restringirmos apenas as K-álgebras reduzidas de tipo finito. Vamos tentar traduzir essas ideias para o mundo dos esquemas.

Definição 4.1. Um esquema afim $(\mathrm{Spec}(A),)_A)$ é dito reduzido se $\mathcal{O}_A(U)$ é reduzido para todo aberto $U \subseteq \mathrm{Spec}(A)$, ou equivalentemente[11], se $\mathcal{O}A, x$ é reduzido para todo $x \in \mathrm{Spec}(A)$.

[10] Para mais detalhes veja [6] ou [7].

[11] A equivalência vem do fato de que a condição de um anel ser reduzido é local.

Esta condição está moralmente nos dizendo que as "funções" em um aberto são determinadas por seus valores nos pontos de $\mathrm{Spec}(A)$. Perceba que esse nem sempre é o caso, já que por exemplo em $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x]/(x^2))$ as "funções" x e x^2 possuem os mesmos valores.

Definição 4.2. Dizemos que um esquema afim $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_A)$ é de tipo finito sobre um corpo se A é uma K-álgebra de tipo finito.

A definição acima não nos diz nada de novo, mas será importante para estendermos esta noção para esquemas em geral na próxima seção. Vamos agora verificar que de fato temos a seguinte equivalência de categorias.

Proposição 4.1. *Seja K um corpo algebricamente fechado. Temos uma equivalência de categorias entre*

$$\mathsf{Aff}_K \longleftrightarrow \{\text{Esquemas afins reduzidos de tipo finito sobre } K\}$$

Demonstração. Mostraremos que a prova desta proposição é muito simples, de fato, basta mostrarmos que a categoria dos esquemas afins reduzidos de tipo finito é equivalente a categoria oposta das K-álgebras reduzidas de tipo finito sobre K, mas isto segue quase que diretamente da proposição 3.2.[12]. ■

5 Esquemas

Esta seção será bastante curta, nela faremos uma breve discussão sobre a noção de esquemas. Vamos iniciar a discussão com a definição de esquemas em geral.

Definição 5.1. Seja $(X, \mathcal{O}_X)$ um espaço localmente anular, dizemos que $(X, \mathcal{O}_X)$ é um **esquema** se podemos cobrir X por uma família $\{U_i\}_{i\in I}$ de abertos tal que $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ é um esquema afim para todo $i \in I$[13].

Definição 5.2. Um morfismo entre esquemas é apenas um morfismo entre espaços localmente anulares.

Desta maneira temos a subcategoria Sch de LRS dos esquemas. Mas por que considerar esquemas ao invés de apenas esquemas afins? Vamos tentar responder essa pergunta por meio de 2 exemplos que, se quisermos pensar em esquemas como objetos "geométricos", gostaríamos que fossem esquemas.

Exemplo 5.1. Seja $(X, \mathcal{O}_X)$ um esquema, dado um aberto qualquer $U \subseteq X$, será que $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ é também um esquema? Essa pergunta é natural já que em muitos ambientes "geométricos" considerar um subespaço aberto é algo natural, por exemplo, em uma variedade topológica (diferenciável, complexa, etc) M qualquer aberto de M é também uma variedade. O mesmo vale para espaços com menos propriedades como espaços métricos e topológicos, mas será que o mesmo vale para esquemas? A resposta é sim e a argumentação é bastante imediata.

[12]Se quiser ver mais detalhes sobre a relação entre variedades e esquemas veja [8] ou [7].

[13]Chamaremos abertos desta forma de abertos afins.

Considere $U \subseteq X$ aberto e uma cobertura aberta afim $\{U_i\}_{i\in I}$ de X, é claro que $\{V_i\}_{i\in I}$ onde $V_i = U_i \cap U$ é uma cobertura aberta de U não necessariamente afim, mas como $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i}) \cong (A_i, \mathcal{O}_{A_i})$ para alguns anéis A_i e $V_i \subseteq U_i$, podemos cobrir cada V_i por abertos afins da forma $(\mathrm{Spec}(S_f^{-1}A_i), \mathcal{O}_{S_f^{-1}A_i})$ (lembre-se que abertos desta forma formam uma base para $\mathrm{Spec}(A_i)$) e portanto, cobrimos U por abertos afins. Temos então que $(U, \mathcal{O}_X|_U$ é um esquema.

Perceba que provamos que um aberto de um esquema é um esquema, mas poderíamos nos perguntar se abertos de esquemas afins são esquemas afins. A demonstração anterior não nos da indícios de que isso seria verdade, e de fato não é. Vamos ver um exemplo onde isso não ocorre.

Considere $X = \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y])$ e o aberto $U = \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \setminus \{(x,y)\} = D(x) \cup D(y)$, para provar que U não é afim basta mostrarmos que $U \neq \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X(U))$.

Vamos primeiramente "calcular" $\mathcal{O}_X(U)$ por meio da seguinte sequência exata (como descrita na observação 2.1.)

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(U) \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{O}_X(D(x)) \times \mathcal{O}_X(D(y)) \xrightarrow{d^0} \mathcal{O}_X(D(xy))$$

que é traduzida em

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(U) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{C}[x,y,1/x] \times \mathbb{C}[x,y,1/y] \xrightarrow{d^0} \mathbb{C}[x,y,1/xy]$$

De maneira que podemos identificar $\mathcal{O}_X(U)$ com a imagem de ε, isto é

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(U) &= \{(f,g) \in \mathbb{C}[x,y,1/x] \times \mathbb{C}[x,y,1/y] \mid f = g \in \mathbb{C}[x,y,1/xy]\} \\ &= \{(f,f) \in \mathbb{C}[x,y,1/x] \times \mathbb{C}[x,y,1/y] \mid f \in \mathbb{C}[x,y]\} \\ &= \mathbb{C}[x,y] \end{aligned}$$

Como $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y]) \neq U$, temos que U não é afim.[14]

Exemplo 5.2. Na seção anterior vimos que a teoria de esquemas engloba a noção de variedade afim, mas o mesmo pode ser dito para variedades projetivas? Novamente a resposta é sim e daremos um exemplo.

Considere duas cópias de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[t])$, $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x])$ e $Y = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[y])$ e os abertos $U_0 = D(x) \cong \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,1/x])$ de X e $U_1 = D(y) \cong \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[y,1/y])$ de Y. Considere então o seguinte isomorfismo

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[y,1/y] &\to \mathbb{C}[x,1/x] \\ y &\mapsto 1/x \end{aligned}$$

[14]Podemos interpretar esse fenômeno como uma versão algébrica do teorema de Hartogs que essencialmente diz que uma função holomorfa definida no complemento de um conjunto analítico de codimensão 2 em $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ pode ser estendida para todo o plano.

que induz um mapa de espectros

$$\begin{aligned} U_0 &\to U_1 \\ (x-a) &\mapsto (y-1/a) \end{aligned}$$

Vamos então "colar" estes esquemas por meio deste morfismo, isto é, defina $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = X_0 \sqcup X_1 / \sim$, onde a relação $\sim$ identifica os pontos pelo morfismo descrito acima. A definição do feixe estrutural é um pouco mais complicada, mas é definido também como "colagem" dos feixes de X_0 e X_1. O espaço resultante é um esquema análogo a reta projetiva complexa (ou esfera de Riemann) que ,novamente, não é afim, pois é possível mostrar que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}$.[15]

Perceba que estes exemplos nos indicam uma relação entre a Geometria Algébrica e a Geometria Complexa/Analítica, e podemos então nos perguntar se existe algo mais profundo nessa relação, e surpreendentemente[16] a resposta é sim! O estudo dessa relação começou basicamente com o artigo "Géometrie algébrique et géometrie analytique" de Jean-Pierre Serre e hoje em dia a interseção destas áreas é bastante estudada (Teoria de Hodge, Geometria algébrica complexa, etc).

Referências

[1] A. Weil, *Foundations of Algebraic Geometry.* American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 29, American Mathematical Society, New York, 1946.

[2] J.-P. Serre, "Faisceaux algébriques cohérents," *Ann. of Math. (2)*, vol. 61, pp. 197–278, 1955.

[3] A. Grothendieck, "Éléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas," *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, no. 4, p. 228, 1960.

[4] D. Eisenbud and J. Harris, *The geometry of schemes*, vol. 197 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 2000.

[5] R. Vakil, "The rising sea: foundations of algebraic geometry," *preprint*, 2017.

[6] E. Tengan and H. Borges, "Algebra comutativa em quatro movimentos," *Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro*, 2015.

[7] U. Görtz and T. Wedhorn, *Algebraic geometry I.* Advanced Lectures in Mathematics, Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2010. Schemes with examples and exercises.

[15] Mais uma vez podemos interpretar este fenômeno como uma versão algébrica do fato de que as únicas funções holomorfas definidas na esfera de Riemann são constantes.

[16] Ou talvez não tão surpreendentemente assim...

[8] D. Mumford, *The red book of varieties and schemes*, vol. 1358 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, expanded ed., 1999. Includes the Michigan lectures (1974) on curves and their Jacobians, With contributions by Enrico Arbarello.

[9] R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.* Actualit'es Sci. Ind. No. 1252. Publ. Math. Univ. Strasbourg. No. 13, Hermann, Paris, 1958.

[10] J.-P. Serre, "Géométrie algébrique et géométrie analytique," *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, vol. 6, pp. 1–42, 1955/56.