Espectro projetivo de um anel graduado
Lucas Seidy Ogawa

Definição: Sejam S um anel e I um monoide. Dizemos que S é I-graduado se para todo $i \in I$ tivermos S_i subgrupo do grupo abeliano aditivo de S tal que $S = \bigoplus_{i \in I} S_i$ como grupos abelinos. Além disso, para todos $i, j \in I$, devemos ter $S_i S_j \subset S_{i+j}$

Observações:

1. Dados S anel e I monoide, S é I-graduado de modo trivial: sendo 0 o elemento neutro de I, basta colocar $S_0 = S$ e $S_i = 0$ para todo $i \in I \setminus \{0\}$. Entretanto, essa graduação não é interesante.

2. Se J é um ideal de S, com $J = \bigoplus_{i \in I}(J \cap S_i)$, dizemos que J é um ideal graduado de S. Isso ocorre quando as componentes homogêneas dos elementos de J estão em J. Dessa forma, S/J será um anel I-graduado também, pois:

   $S/J = \bigoplus_{i \in I} S_i / \bigoplus_{i \in I}(J \cap S_i) \simeq \bigoplus_{i \in I} S_i/(J \cap S_i) \simeq \bigoplus_{i \in I}(S_i + J)/J$, pelo segundo teorema do isomorfismo. Para cada $i \in I$, considere $(S/J)_i$, a parte isomorfa a $(S_i + J)/J$ em S/J.

   Perceba que se $i, j \in I$, temos que $(S/J)_i (S/J)_j \subset (S/J)_{i+j}$, pois se $x \in (S/J)_i$ e $y \in (S/J)_j$, então, se f for o isomorfismo anterior, segue que $f(x) \in (S_i + J)/J$ e $f(y) \in (S_j + J)/J$. Logo, como $S_i S_j \subset S_{i+j}$, segue que $f(xy) = f(x)f(y) \in (S_{i+j} + J)/J$, logo $xy \in (S/J)_{i+j}$.

3. Se $I = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ então S_0 é um subanel de S e para todo $i \in I$, S_i é um S_0-módulo.

   Para mostrar todas essas coisas, basta mostrar que S_0 é um subanel de S, para isso, basta mostrar que $1 \in S_0$.

   Escreva $1 = \sum_{i \in I} x_i$ com x_i não nulo para um número finito de índices $i \in I$. Assim, para todo $j \in I$, temos:

   $$x_j = x_j \cdot 1 = x_j \cdot \left(\sum_{i \in I} x_i \right) = \sum_{i \in I} (x_j \cdot x_i)$$

   Como a soma é direta, segue que $x_j = x_j \cdot x_0$ para todo $j \in I$ Assim:

   $$x_0 = 1 \cdot x_0 = \left(\sum_{i \in I} x_i \right) \cdot x_0 = \sum_{i \in I} (x_i \cdot x_0) = \sum_{i \in I} x_i = 1$$

   Assim, $1 = x_0 \in S_0$.

Exemplo:
Se A é um anel (comutativo com 1) , o anel $S = A[x_1, ..., x_n]$ é um anel $\mathbb{N}$-graduado, onde S_l é o conjunto dos polinômios homogêneos de grau l.

Observação: A partir de agora vamos considerar somente aneis $\mathbb{Z}$-graduados. Se A é um anel com $S = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} S_n$ e $A_n = 0$ para todo $n < 0$, vamos nos referir à esse anel como graduado a graus não-negativos.

Definições:

- Seja S um anel-graduado com decomposição $S = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} S_n$. Se M é um S-módulo, dizemos que M é S-módulo graduado se para todo $n \in \mathbb{Z}$ existir M_n subgrupo abeliano de M tal que $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ e para todos $i,j \in \mathbb{Z}$, devemos ter $S_iM_j \subset M_{i+j}$. Um submódulo N de M é dito submódulo graduado se $N = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(N \cap M_n)$.

Se N é um submódulo graduado de um módulo graduado M, então M/N é um módulo graduado: $M/N = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n / \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(N \cap M_n) \simeq \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n/(N \cap M_n) \simeq \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(M_n + N)/N$, pelo segundo teorema do isomorfismo. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, considere $(M/N)_n$, a parte isomorfa a $(M_n + N)/N$ em M/N. Assim, se $x \in S_i$ e $y \in (M/N)_j$ e f for o isomorfismo anterior, segue que $f(y) \in (M_j + N)/N$. Logo, como $S_iM_j \subset M_{i+j}$, segue que $f(xy) = xf(y) \in (M_{i+j}+N)/N$, logo $xy \in (M/N)_{i+j}$.

Perceba que os ideais graduados são exatamente os submódulos graduados de S.

Além disso, nota-se que um módulo é submódulo graduado se e só se é gerado por elementos homogêneos. De fato, se um submódulo N for graduado, considere E, os elementos homogêneos de N. Seja $x \in N$, logo decompondo x como soma de elementos homogêneos, temos que esses elementos homogêneos são elementos de N, portanto, elementos de E. Logo x está no submódulo gerado por E. Por outro lado, se N é gerado por E, um conjunto de elementos homogêneos, então seja x um elemento de N. Escreva x como sendo combinação linear de elementos de E. $x = \sum_{z\in E} \alpha_z z$. Decompondo cada α_z como soma de elementos homogêneos, temos que x será uma soma de elementos de homogêneos de S multiplicados por elementos de E, portanto, se x for escrito como soma de elementos homogêneos, cada componente estará em N, pois é soma de múltiplos de elementos de E.

- Se S é um anel graduado com $S = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} S_n$ e M é um S-módulo graduado com $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$, temos que se $x \in M_n$ para algum $n \in \mathbb{Z}$, dizemos que x é um elemento homogêneo de grau n. Em particular, vendo S como S-módulo graduado, temos que se $x \in S_n$,para algum $n \in \mathbb{Z}$, dizemos que x é elemento homogêneo de S (de grau n).

  Além disso, se $m \in M$, $m = \sum_{n\in\mathbb{Z}} m_n$, m_n é dita componente homogênea de grau n de m.

Algumas notações:

Seja S um anel graduado a graus não-negativos. Assim denotamos por S_+ a soma direta dos S_n com $n > 0$ (i.e., os elementos parte homogênea de grau 0 nula).Perceba que S_+ é um ideal de S. Se M é um S-módulo graduado, considere M_n, sua parte homogênea de grau n.

Para todo $d > 0$ inteiro, nós detonamos por $S^{(d)}$ a soma direta das partes homogêneas múltiplas de d. Pelas propriedades de anel graduado, segue que $S^{(d)}$ é um anel graduado de modo trivial. Assim, sendo k um inteiro com $0 \le k \le d-1$, vamos denotar por $M^{(d,k)}$, a soma direta das partes homogêneas congruentes à k módulo(d), isto é, a soma direta dos M_{nd+k} ($n \in \mathbb{Z}$). Aqui denotaremos por $M^{(d)}$, o módulo $M^{(d,0)}$.

Proposição :

Seja n_0 um inteiro, $n_0 > 0$. Considere, para cada $n \ge n_0$, um subgrupo aditivo p_n de S_n. Existir um ideal primo graduado p de S tal que $p \cap S_n = p_n$, para todo $n \ge n_0$ equivale às seguintes condições:

1. $S_m p_n \subset p_{m+n}$, para todo $m \ge 0$ e $n \ge n_0$
2. Sejam m e n inteiros maiores ou iguais a n_0 e $f \in S_m, g \in S_n$. Assim $fg \in p_{m+n} \Rightarrow (f \in p_m$ ou $g \in p_n)$.
3. $p_n \neq S_n$, para pelo menos algum $n \ge n_0$.

Além disso, o ideal p é o único que satisafaz isso.

Demonstração :

$(\Rightarrow)$:

1 ocorre: Se $f \in S_m$ e $g \in p_n$, com $m \geq 0$ e $n \geq n_0$, temos que $g \in p_n \subset S_n$. Logo $fg \in S_{m+n}$. Mas $g \in p_n \subset p$, logo $fg \in p$. Assim, $fg \in S_{m+n} \cap p$. Como $m \geq 0$, segue que $m + n \geq n \geq n_0$, segue que $fg \in p_{m+n}$.

2 ocorre: Sejam $m,\ n \geq n_0$ e $f \in S_m$, $g \in S_n$, tal que $fg \in p_{m+n}$. Assim $fg \in p$ que é um ideal primo, logo, $f \in p$ ou $g \in p$, isto é $f \in p_m$ ou $g \in p_n$.

3 ocorre: Como $S_+ \not\subset p$, então existe $k > 0$ tal que $S_k \not\subset p$. Considere $n > 0$ tal que $nk \geq n_0$ e $f \in S_k$ com $f \notin p$. Assim $f^n \in S_{nk}$, mas $f^n \notin p$, pois p é um ideal primo. Logo $p_{nk} = S_{nk} \cap p \neq S_{nk}$ e $nk \geq n_0$.

$(\Leftarrow)$:

Vejamos inicialmente a unicidade. Para isso, como tal ideal primo p é graduado devemos ter que $p = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} p \cap S_n$. Vamos ver o que deverá ser $p \cap S_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ e p será unicamente determinado. Primeiramente considere $f \in S_d \setminus p$ com $d \geq n_0$ (tal f existe pela propriedade 3).

Seja p um ideal primo graduado de S que não contenha S_+ e que satisfaça as condições 1, 2 e 3. Considere para cada n com $0 \leq n < n_0$, o conjunto p_n, onde dado $x \in S_n$, $x \in p_n \Leftrightarrow fx \in p_{n+d}$. Perceba $n + d \geq d \geq n_0$, assim, faz sentido falar de p_{n+d}. É fácil ver que $p \cap S_n = p_n$. Logo, vale a unicidade.

Vejamos agora que $p = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n$ satisfaz as condições do enunciado. Perceba que para $m \geq n_0$, o conjunto p_m também pode ser definido de maneira análoga ao que foi feito no caso em que $m < n_0$, pela propriedade 2, isto é, dado $x \in S_m$, $x \in p_m \Leftrightarrow fx \in p_{m+d}$. Vejamos inicialmente que p é um ideal de S. p é fechado por soma pois é a soma de conjuntos fechados pela soma. Para ver que p é um ideal, vejamos que as partes homogêneas dos elementos de p multiplicados por elementos homogêneos estão em p, e o caso geral segue por indução. Sejam $g \in S_m$ e $x \in p_n$, assim $gx \in S_{m+n}$. Perceba que $fx \in p_{d+n}$ e que $d + n \geq d \geq n_0$. Pela propriedade 1, segue que $fgx = fxg \in p_{d+n+m}$, ou seja $gx \in p_{n+m}$. Logo p é um ideal de S, portanto ideal graduado de S, pela definição de p.

Falta ver que p é um ideal primo. Sejam $x, y \in S$ tal que $xy \in p$. Suponha que $x \notin p$ e $y \notin p$. Escreva $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ e $y = \sum_{n \in \mathbb{N}} y_n$. Tome $j_1 = \min\{i \geq 0 : x_i \notin p_i\}$ e $j_2 = \min\{i \geq 0 : y_i \notin p_i\}$. Assim a componente homogênea de ordem $j_1 + j_2$ de xy será $x_0 y_{j_1+j_2} + ... + x_{j_1} y_{j_2} + ... + x_{j_1+j_2} y_0 \in p$, pois p é um ideal graduado, logo, todas as componentes homogêneas de elementos de p estão em p. Assim, se $k < j_1$, então $x_k \in p_k$, logo $x_k y_{j_1+j_2-k} \in p$. De modo análogo, se $j_1 + j_2 - k < j_2$, (isto é $j_1 < k$) temos que $x_k y_{j_1+j_2-k} \in p$. Logo $x_{j_1} y_{j_2} \in p$. Assim $f^2 x_{j_1} y_{j_2} \in p$ Temos que $fx_{j_1} \in S_{d+j_1}$ e $fy_{j_2} \in S_{d+j_2}$. Pela propriedade 2, segue que $fx_{j_1} \in p_{d+j_1}$ ou $fy_{j_2} \in p_{d+j_2}$. Mas isso, pela definição dos p_j, implica que $x_{j_1} \in p_{j_1}$ ou $y_{j_2} \in p_{j_2}$, uma contradição. Logo p é primo.

Assim, se S é um anel graduado a graus não-negativos, definimos que um subconjunto L de S_+ é um ideal de S_+, se L é um ideal de S e é dito ser um ideal primo graduado se L é a interseção de S_+ com um ideal primo graduado de S que não contenha $S+$ com S_+ (pela proposição anterior, tal ideal primo graduado da interseção será único). Assim, se L é um ideal de S_+, o radical de L é definido e denotado por: $\sqrt[+]{L} = \sqrt{L} \cap S_+$. Denotamos por $Proj(S)$, o conjunto dos ideais primos graduados de S_+. $Proj(S)$ é chamado de espectro primário homogêneo de S.

Definimos para um subconjunto E de S, $V_+(E)$ o conjunto dos ideais primos graduados de S que não contem S_+. Assim, temos que $V_+(E) = V(E) \cap Proj(S)$. Assim temos:

$V_+(0) = V(0) \cap Proj(S) = Spec(S) \cap Proj(S) = Proj(S)$;

$V_+(S) = V(S) \cap Proj(S) = \emptyset \cap Proj(S) = \emptyset$;

$V_+(\cup_{\lambda\in\Delta} E_\lambda) = V(\cup_{\lambda\in\Delta} E_\lambda) \cap Proj(S) = (\cap_{\lambda\in\Delta} V(E_\lambda)) \cap Proj(S) = \cap_{\lambda\in\Delta} (V(E_\lambda) \cap Proj(S)) = (\cap_{\lambda\in\Delta} V_+(E_\lambda))$

$V_+(EE^{'}) = V(EE^{'}) \cap Proj(S) = (V(E) \cup V(E^{'})) \cap Proj(S) = (V(E) \cap Proj(S)) \cup (V(E^{'}) \cap Proj(S)) = V_+(E) \cap V_+(E^{'})$

Assim, os conjuntos $V_+(E)$ são os fechados de uma topologia de $Proj(S)$. Pela definção, é fácil ver que essa topologia é a topologia induzida de $Spec(S)$.

Defina para cada $f \in S$ elemento homogêneo de grau > 0, o subconjunto de $Proj(S)$, $D_+(f) = \{p \in Proj(S) | f \notin p\}$. Assim, esses elementos formam uma base para a topologia definida em $Proj(S)$, por causa do seguinte lema:

Lema : Seja S um anel graduado a graus não-negativos, $S = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} S_n$. Assim, temos que:

1. $D_+(f)$ é aberto de $Proj(S)$.
2. $D_+(ff^{'}) = D_+(f) \cap D_+(f^{'})$
3. Seja $g \in S$, $g = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$, onde $g_i \in S_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Assim $D(g) \cap Proj(S) = (D(g_0) \cap Proj(S)) \cup \cup_{i\geq 1} D_+(g_i)$.
4. Seja $g_0 \in S_0$. Portanto, $D(g_0) = \cup_{f\in S_d, d\geq 1} D_+(g_0 f)$.

Demonstração:

1. Como $D_+(f) = D(f) \cap Proj(S)$, segue que $D_+(f)$ é aberto em $Proj(S)$.
2. De modo análogo ao anterior, temos que $D_+(ff^{'}) = D(ff^{'}) \cap Proj(S) = (D(f) \cap D(f^{'})) \cap Proj(S) = (D(f) \cap Proj(S)) \cap (D(f^{'}) \cap Proj(S)) = D_+(f) \cap D_+(f^{'})$.
3. Temos que $D(g) \cap Proj(S) = (\cup_{i\in\mathbb{N}} D(g_i)) \cap Proj(S) = \cup_{i\in\mathbb{N}} (D(g_i) \cap Proj(S)) = (D(g_0) \cap Proj(S)) \cup \cup_{i\geq 1} D(g_i) \cap Proj(S) = (D(g_0) \cap Proj(S)) \cup \cup_{i\geq 1} D_+(g_i)$.
   A única igualdade que temos que verificar dessas todas é a primeira. Seja p um ideal primo graduado de S. Vejamos que $p \in D(g) \Leftrightarrow p \in D(g_i)$ para algum $i \in \mathbb{N}$. Se $p \notin D(g)$, então $g \in p$. Como p é homogêneo, segue que todas as componentes de g estão em p, isso é $g_i \in p$ para todo $i \in \mathbb{N}$.Logo $p \notin D(g_i)$. Por outro lado, se $p \notin D(g_i)$, para todo $i \in \mathbb{N}$, então $g_i \in p$ para todo $i \in \mathbb{N}$, assim $g = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n \in p$. Portanto $p \not{i}nD(g)$.
4. ($\supset$): Seja $f \in S_d$, para algum $d \geq 1$. Vejamos que $D_+(g_0 f) \subset D(g_0)$. Seja $p \in D_+(g_0 f)$. Logo, p é um ideal primo graduado, e $g_0 f \notin p$. Se $g_0 \in p$, então $g_0 f \in p$, pois p é um ideal. Portanto, devemos ter que $p \in D(g_0) \cap Proj(S)$.

   ($\subset$): Seja $p \in D(g_0) \cap Proj(S)$. Logo $g_0 \notin p$. Suponha que $g_0 f \in p$ para todo $f \in S_d$ com $d \geq 1$. Vejamos que $S_+ \subset p$, nesse caso. Mas isso ocorre, pois cada S_d com $d \geq 1$ está contido em p, dado que p é primo e se $f \in S_d$, então $g_0 f \in p$, mas $g \notin p$. Contradição. Logo, existe algum $f \in S_d$, para algum $d \geq 0$ tal que $g_0 f \notin p$. Portanto, para tal f, teriamos que $p \in D_+(g_0 f)$.

Vejamos que os conjuntos da forma $D_+(f)$ formam uma base de $Spec(S)$. Seja U um aberto de $Spec(S)$. Logo $U = V \cap Proj(S)$, onde V é um aberto de $Spec(S)$. Como os conjuntos da forma $D(a)$ formam uma base de $Spec(S)$, segue que $V = \cup_{i\in I} D(a_i)$.

Assim $U = V \cap Proj(S) = (\cup_{i\in I} D(a_i)) \cap Proj(S) = \cup_{i\in I}(D(a_i) \cap Proj(S))$. Assim, basta mostrar que um elemento da forma $D(a_i) \cap Proj(S)$ é uma união de conjuntos da forma $D_+(f)$. Se $a \in S$, escreva $a = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$, pela parte 3 do lema, temos que $D(a) \cap Proj(S) = (D(a_0) \cap Proj(S)) \cup \cup_{i\geq 1} D_+(a_i) = \cup_{f\in S_d, d\geq 1} D_+(a_0 f) \cup \cup_{i\geq 1} D_+(a_i)$

Vamos falar brevemente da localização de um anel graduado (a graus não-negativos). Seja S um anel graduado a graus não-negativos e seja $f \in S$, um elemento homogêneo de grau $d > 0$. Considerando assim, a localização de S por f, vamos denota-lo por S. Esse anel $S^{'}$ será $\mathbb{Z}$-graduado , onde $S^{'}_n$ é o conjunto dos elementos da forma x/f^k com $x \in S_{n+kd}$. Vejamos isso:

Inicialmente, vejamos que $S^{'}_n$ é um subgrupo aditivo de $S^{'}$. Sejam $x/f^{k_1}, y/f^{k_2} \in S^{'}_n$. Assim, vamos supor sem perda de generalidade que $x \in S_{n+k_1 d}$ e $y \in S_{n+k_2 d}$. Assim $\dfrac{x}{f^{k_1}} + \dfrac{y}{f^{x_2}} = \dfrac{xf^{k_2} + yf^{k_1}}{f^{k_1+k_2}}$. Temos que $xf^{k_2} \in S_{n+k_1 d+k_2 d} = S_{n+(k_1+k_2)d}$ e de modo análogo $yf^{k_1} \in S_{n+(k_1+k_2)d}$. Logo $xf^{k_2} + yf^{k_1} \in S_{n+(k_1+k_2)d}$. Logo $\dfrac{xf^{k_2} + yf^{k_1}}{f^{k_1+k_2}} \in S^{'}_n$.

Em seguida, vejamos que $S^{'} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} S^{'}_n$. Dado $y/f^k \in S^{'}$, onde $y \in S$, escreva $y = \sum_{n\in\mathbb{N}} y_n$. Logo $y/f^k = (\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n)/f^k = \sum_{n\in\mathbb{N}}(y_n/f^k)$. Portanto, para verificar que $y/f^k \in \sum_{n\in\mathbb{N}} S^{'}_n$ podemos supor que y é homogêneo (de grau m), tome $n = m - kd$ e temos $\frac{y}{f^k} \in S^{'}_n$, pois $y \in S_{n+kd}$.

Vejamos que essa soma é direta. Para isso, basta ver que não tem como escrever 0 como soma de elementos de $S^{'}_n$ que não seja de forma trivial. Escreva $0 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n$, com $x_n \in S^{'}_n$. Assim escreva $x_n = \dfrac{y_n}{f^{k_n}}$, onde $y_n \in S_{n+k_n d}$. Considere $\{n_1, ..., n_t\} \subset \mathbb{Z}$ com $0 = x_{n_1} + ... + x_{n_t}$. Assim $0 = \dfrac{y_{n_1} f^{k_{n_2}+...+k_{n_t}} + ... + y_{n_t} f^{k_{n_1}+...+k_{n_{t-1}}}}{f^{k_{n_1}+...+k_{n_t}}}$. Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y_{n_1} f^{k_{n_2}+...k_{n_t}+n} + ... + y_{n_t} f^{k_{n_1}+...+k_{n_{t-1}}+n} = f^n \cdot (y_{n_1} f^{k_{n_2}+...k_{n_t}} + ... + y_{n_t} f^{k_{n_1}+...+k_{n_{t-1}}}) = 0$. Sabemos que cada uma das parcelas dessa soma é homogêneo (pois é produto de elementos homogêneos). Assim, a i-ésima parcela é homogênea de grau $n_i + k_{n_i} d + (k_{n_1} + ... + k_{n_{i-1}} + k_{n_{i+1}} + ... + k_{n_t})d = n_i + (k_{n_1} + ... + k_{n_t})d$. Como $n_i \neq n_j$ se $i \neq j$, segue que cada uma das parcelas tem grau homogêneo diferente. Como o anel é graduado e a soma deu 0 segue que cada uma das parcelas é 0. Assim para todo $i \in \{1, ..., t\}$, temos $y_{n_i} f^{n+k_{n_1}+...+k_{n_{i-1}}+k_{n_{i+1}}+...+k_{n_t}} = 0$. Assim, em $S^{'}$, teremos que $\dfrac{y_{n_i}}{1} = 0 \Rightarrow \dfrac{y_{n_i}}{f^{k_{n_i}}} = 0$. Logo a soma é direta.

Denotaremos por $S_{(f)}$ o subanel dos elementos homogêneos de grau 0.

De modo análogo, se p é um ideal primo homogêneo, considere T o conjunto dos elementos homogêneos que não estão em p. Defina $(S_p)_n = \{\dfrac{f}{g} : f \in S_k, g \in S_m \cap T$ e $m + n = k\}$. Prova-se que esse anel é graduado dessa forma. Vamos denotar $S_{(p)} = (S_p)_0$.

Vamos ver o que é um esquema, e assim, faremos $Proj(S)$, um esquema, para S um anel graduado a graus não-negativos.

Definições :

- **Pré-feixe**: Seja X um espaço topológico. Um pré-feixe F de aneis consiste de:
  - Para cada aberto U de X, um anel $F(U)$.
  - Se U e V são abertos de X tal que $V \subset U$ temos um homomorfismo de aneis $\phi_{UV} : F(U) \to F(V)$.
  - $F(\emptyset) = 0$

- $\phi_{UU} = Id_{F(U)}$
- Se W , V e U são abertos de X tais que $W \subset V \subset U$, então: $\phi_{UW} = \phi_{VW} \circ \phi_{UV}$

Observação: Se $s \in F(U)$ e V é um aberto que está contido em U, denotamos por $s|_V$ o elemento $\phi_{UV}(s)$, pois essas $\phi^{'}$s têm uma certa semelhança com restrição de funções.

- **Feixe** : Um feixe de aneis é um pré-feixe de aneis F no espaço topológico X tal que:
  - Se U é um aberto com $\{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de U e $s \in F(U)$ é tal que $s|_{U_i} = 0$ para todo $i \in I$, então $s = 0$.
  - Se U é um aberto com $\{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de U. Suponha que para cada $i \in I$, tenhamos um elemento $s_i \in F(U_i)$. Se para cada par $i, j \in I$, tivermos $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$, então existe $s \in F(U)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$ para todo $i \in I$.

  Observe que s obtido na segunda propriedade é único pela primeira propriedade. De fato, se existir $s^{'}$ com a mesma propriedade, teriamos que $(s^{'} - s)|_{U_i} = s^{'}|_{U_i} - s|_{U_i} = 0$ para todo $i \in I$, logo $s^{'} - s = 0 \Rightarrow s^{'} = s$.

  Obs.: Se U é um aberto não-vazio de X, podemos fazer um feixe de aneis em U com a topologia de subespaço, da seguinte maneira:

  Se V é um aberto de U, então é um aberto de X, definindo G, como $G(V) = F(V)$ e as restrições iguais à da F. Isso fará de G um feixe de aneis em U.

- **Limite direto de aneis**: Seja $< I, \leq >$ um conjunto direcionado, (isto é: $\leq$ é uma relação binária em I que é reflexiva e transitiva tal que dados 2 elementos de $x_1, x_2 \in I$, existe um elemento $y \in I$ tal que $x_1 \leq y$ e $x_2 \leq y$). Para cada $i \in I$, considere um anel A_i. Para cada par $i, j \in I$, com $i \leq j$ tenhamos um morfismo $f_{ij} : A_i \to A_j$ que satisfazem:
  - f_{ii} é a identidade para todo $i \in I$.
  - Se $i \leq j \leq k$, então $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$.

  Sendo assim, construímos o limite direto desses aneis. Antes disso, considere $\sqcup_{i \in I} A_i$, a união disjunta dos A_i. Nesse conjunto, considere a seguinte relação de equivalência: se $x_i \in A_i$ e $x_j \in A_j$, dizemos que $x_i \sim x_j \Leftrightarrow$ existe $k \in I,\ i, j \leq k$ com $f_{ik}(x_i) = f_{jk}(x_j)$.

  $\sim$ é de equivalência:
  - dado $x_i \in A_i$, $i \leq i$ e $f_i(x_i) = f_i(x_i)$.
  - a definição dada torna a simétrica trivial.
  - se x_{i_k}, com $k = 1, 2, 3$ são tais que $x_{i_k} \in A_{i_k}$ e tais que $x_{i_1} \sim x_{i_2}$ e $x_{i_2} \sim x_{i_3}$, então existem $j_1, j_2 \in I$ tais que $f_{i_1 j_1}(x_{i_1}) = f_{i_2 j_1}(x_{i_2})$ e $f_{i_2 j_2}(x_{i_2}) = f_{i_3 j_2}(x_{i_3})$ Seja $j \in I$ tal que $j_1, j_2 \leq j$. Assim $f_{i_1 j}(x_1) = f_{j_1 j} \circ f_{i_1 j_1}(x_{i_1}) = f_{j_1 j} \circ f_{i_2 j_1}(x_{i_2}) = f_{i_2 j}(x_{i_2}) = f_{j_2 j} \circ f_{i_2 j_2}(x_{i_2}) = f_{j_2 j} \circ f_{i_3 j_2}(x_{i_3}) = f_{i_3 j}(x_{i_3})$. Logo $x_{i_1} \sim x_{i_3}$.

  Assim o limite direto será $\sqcup_{i \in I} A_i / \sim$, que será denotado por $\varinjlim A_i$ Temos além disso, para cada $j \in I$, as funções $\phi_j : A_j \to \varinjlim A_i$, que leva cada elemento em sua classe de equivalência. Definimos uma estrutura de anel em $\varinjlim A_i$, da seguinte maneira:

Sejam $x_1, x_2 \in \sqcup_{i\in I} A_i$, $x_k \in A_{i_k}$, $k = 1, 2$. Tome $j \in I$ uma cota superior de $\{i_1, i_2\}$. Assim, defina a soma e o produto da classe x_1 com a classe x_2 como sendo a classe da soma e o produto $f_{i_1 j}(x_1) + f_{i_2 j}(x_2)$ e $f_{i_1 j}(x_1) \cdot f_{i_2 j}(x_2)$. Perceba que não importa a cota superior j que escolhemos. Além disso, verifique que a soma independe dos representantes das classes. Perceba que isso torna $\varinjlim A_i$ um anel e as funções ϕ_j são homomorfismos (verifique).

- **Espiga** : Se F é um pré-feixe de aneis do espaço topológico X e $x \in X$, definimos a espiga F_x de X em x como sendo o limite direto dos aneis $F(U)$ com U aberto contendo x, através dos $\phi^{'}$s. (Perceba que aqui temos todas as condições para fazer o limite direto).

- **Espaço (localmente) anelado**: Um espaço anelado é um par $(X,\ O_X)$, onde O_X é um feixe de aneis sobre o espaço topológico X. Um espaço localmente anelado é um espaço anelado $(X,\ O_X)$, onde para todo p ponto de X, a espiga $O_{X,p}$ é um anel local.

- **Morfismo de espaços anelados**: Sejam $(X,\ O_X)$ e $(Y,\ O_Y)$ dois espaços anelados. Um morfismo entre $(X,\ O_X)$ e $(Y,\ O_Y)$ consiste de:

  - uma função contínua $f : X \to Y$
  - uma coleção de homomorfismos de aneis $\phi_U : O_Y(U) \to O_X(f^{-1}(U))$ para cada aberto U de Y que comuta com as restrições.
  - se os espaços forem localmente anelados, para termos um morfismo de espaços localmente anelados, pedimos também mais uma coisa:

    Para cada $x \in X$, as ϕ induzem um morfismo dos aneis $f : O_{X,p} \to O_{Y,f(p)}$

    Assim, a coisa a mais que devemos ter é que a pré-imagem do ideal maximal de $O_{Y,f(p)}$ deverá ser o ideal maximal de $O_{X,p}$.

  Dois espaços anelados são isomorfos se existir um morfismo inverso, isto é se f for um homeomorfismo e se os morfismos ϕ_V forem isomorfismos para todo V aberto de Y.

- **Esquema afim**: Se A é um anel, podemos definir um feixe de aneis em que o espaço topológico é $Spec(A)$ com a topologia de Zariski. Se $p \in Spec(A)$, denotamos por A_p a localização de A por p. Assim, para cada aberto U de $Spec(A)$ defina o anel $O(U)$ como sendo o conjunto das funções $s : U \to \sqcup_{p\in U} A_p$, onde $s(p) \in p$, para todo $p \in U$. Definimos a soma e o produto de dois elementos s_1, s_2 da seguinte maneira : $(s_1 + s_2)(p) = s_1(p) + s_2(p)$ e $(s_1 s_2)(p) = s_1(p)s_2(p)$. É de fácil verificação que isso torna esse conjunto um anel. (Obs. : Se $U = \emptyset$, então poderiamos simplesmente considerar o anel nulo associado à ele, ou perceber que dado um conjunto como contra-domínio, existe uma única função que tenha como domínio o vazio e contra-domínio esse conjunto escolhido, fazendo assim viável a construção.)

  Sejam agora U, V abertos de $Spec(A)$ tal que $V \subset U$. O mapa restrição $O(V) \to O(U)$ será a restrição, isso é dado $s : U \to \sqcup_{p\in U} A_p$ sua restriçao será $s|_V : V \to \sqcup_{p\in V} A_p$, onde $s|_V(p) = s(p)$ para todo $p \in p$. Isso está bem definido, pois para cada $p \in U$, $s(p) \in A_p$, assim, se $p \in V$, então $s|_V(p) \in A_p$. Além disso, é um homomorfismo de aneis.

  Vejamos que dessa forma, temos um feixe de aneis definido em $Spec(A)$. É fácil verificar que pelo menos, temos um pré-feixe em $Spec(A)$. Vejamos que trata-se na verdade de um feixe. Seja U um aberto de $Spec(A)$ e $\{U_i\}_{i\in I}$ uma cobertura aberta de U. Vejamos que vale duas coisas:

- Seja $s \in O(U)$ tal que $s|_{U_i} = 0$ para todo $i \in I$. Dado $p \in U$, vejamos que $s(p) = 0 \in A_p$. Como $p \in U$, segue que existe $j \in I$ tal que $p \in U_j$. Assim, $s(p) = s|_{U_j}(p) = 0 \in A_p$, portanto $s = 0 \in O(U)$.
- Considere para cada $i \in I$ um elemento $s_i \in O(U_i)$ tal que se $i, j \in I$, então $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$. Vamos achar um $s \in O(U)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$ para todo $i \in I$. Para isso, para cada $p \in U$, exite $k \in I$ tal que $p \in U_k$. Assim, defina $s(p) = s_k(p)$. Pela condição dos s_i, segue que essa definição independe do k escolhido, e é de fácil verificação que esse s satisfaz as propriedades desejadas.

Em [1], terá uma demonstração de que esse espaço é localmente anelado. Definimos como esquema afim, um espaço localmente anelado que é isomorfo como espaço anelado localmente anelado ao espectro de algum anel com a estrutura de espaço localmente anelado definido acima.

- **Esquema**: Um esquema é um feixe de aneis (X, F) tal que existe uma cobertura aberta $\{X_i\}_{i\in I}$ de X onde cada X_i é um esquema afim através das restrições de X como espaço anelado, como foi visto na descrição de feixes.

Vejamos que $Proj(S)$ é o espaço topológico associado a um esquema quando S é um anel graduado a graus não-negativos. Já sabemos que $Proj(S)$ é um espaço topológico. Vamos definir um feixe de aneis nele. Para cada $p \in Proj(S)$, relembre que $S_{(p)}$ é o subanel de S_p dos elementos homogêneos de grau 0. Para cada aberto $U \subset Proj(S)$, defina o anel $O(U)$ como sendo o conjunto das funções $s : U \to \sqcup_{p\in U} S_{(p)}$.
Assim feito, a verificação de que isso é um feixe é análogo ao feito em $Spec(R)$. Além disso, a verificação de que $Proj(S)$ é um esquema pode ser encontrada em [1].

Espaço projetivo:

De acordo com a geometria sintética,um espaço projetivo é uma terna (P, L, I), onde P é o conjunto dos pontos L, conjunto das linhas e I é a relação de incidência, isto é, diz se um ponto pertence à uma reta ou não (denotamos por PIg ou por gIP, caso P seja um ponto de g). Além disso, deve satisfazer os seguintes axiomas:

- Dados A e B pontos distintos de P, existe uma única reta de L incidente à ambas. (denotaremos essa reta por AB).
- Sejam A, B, C e D pontos distintos 2 a 2 de P tal que as retas AB e CD se intersectam. Logo, as retas AC e BD também se intersectam.
- Qualquer reta é incidente à pelo menos 3 pontos.

Se além disso tudo, L possuir pelo menos 2 elementos, dizemos que o plano projetivo é não-degenerado.

Exemplo :

Seja k um corpo e k^{n+1}, com $n \geq 1$ espaço vetorial. Defina P como sendo o conjunto dos subespaços de dimensão 1 e L, como sendo os subespaços de dimensão 2, e I, como gIQ se $Q \subset g$. Assim a terna (P, L, I) é um espaço projetivo. Se $n \geq 2$, então é não-degenerado:

- Sejam A, $B \in P$. Logo existem $v_1 \in A$ e $v_2 \in B$ geradores. Assim, sendo $g = < v_1, v_2 >$, temos que gIA e gIB. Além disso, se $h \in L$ tal que hIA e hIB, então $v_1, v_2 \in h$, logo $g \subset h$. Como ambos possuem dimensão 2, segue que $h = g$.

- Vamos considerar que os pontos Q, Q_1, P_1 e P_2 sejam dois a dois distintos e as retas QP_2 e P_0Q_1 se intersectam em P_1. Vejamos que as retas QQ_1 e P_0P_2 se intersectam.

  Chame $g_1 = P_0P_1$ e $g_2 = P_0P_2$. Se $g_1 = g_2$, então, sendo $g = g_1$, temos que gIP_0, gIP_1, gIP_2. Além disso $P_0Q_1IP_1$, $P_0Q_1IP_0$, logo, pela unicidade que foi provada no item anterior, temos que $P_0Q_1 = g$. De modo análogo, $QP_2 = g$. Assim, temos que gIQ e gIQ_1. Portanto qualquer um dos pontos dentre os 5 está na interseção de QQ_1 com P_0P_2, dado que $QQ_1 = g = P_0P_2$.

  Suponha então que $g_1 \neq g_2$. Escolha vetores v_0, v_1, v_2 tal que v_i gera P_i, com $i = 0, 1, 2$. Considere $V' =< v_0, v_1, v_2 >$. Vejamos que $\{v_0, v_1, v_2\}$ é LI. Suponha que não seja. Sabemos que $\{v_0, v_2\}$ é LI, pois $P_0 \neq P_2$. Assim, teriamos que $\dim V' = 2$. Logo $P_0, P_1, P_2 \subset h \Rightarrow hIP_0, hIP_1, hIP_2$, e isso implicaria que $g_1 = g_2$. Assim $\{v_0, v_1, v_2\}$ é LI e base de V'. Considere $w \in Q, w_1 \in Q_1$ geradores. Assim, temos que $w_1 \in< v_0, v_1 >\subset V'$. De modo análogo, temos que $w \in V'$. Assim QQ_1 é um subespaço de dimensão 2 de V'. Assim $g_2 + QQ_1 \subset V'$, pois ambos os subespaços são subespaços de V'. Mas $g_2 \neq QQ_1$, logo $\dim g_2 + QQ_1 > \min\{\dim g_2, \dim QQ_1\} = 2$. Logo, vale que $< g_2, QQ_1 >= V'$, pois $\dim V' = 3$. Logo, temos que $\dim(g_2 \cap QQ_1) = \dim g_2 + \dim QQ_1 - dim(g_2 + QQ_1) = 2 + 2 - 3 = 1$. Assim $g_2 = P_0P_2$ intersecta QQ_1 em um espaço de dimensão 1. Esse espaço é um ponto que é incidente às duas retas.

- Se $< v_1, v_2 >$ é uma reta, então ela é incidente aos seguintes pontos: $< v_1 >$, $< v_2 >$, $< v_1 + v_2 >$. Perceba que esses 3 pontos incidentes à reta são de fato distintos.

- Suponha que a dimensão de V seja maior do que 2. Considere 3 vetores LI v_0, v_1 e v_2. Assim temos as seguintes retas distintas $< v_0, v_1 >$ e $< v_0, v_2 >$.

Entretanto, definimos o espaço n-projetivo sobre um anel A, como sendo $Proj(A[x_0, ..., x_n])$. Não necessariamente temos que esse espaço é um espaço projetivo de acordo com a geometria sintética. Entretanto quando k é um corpo algébricamente fechado, pelo Nullstellensatz temos uma certa correspondência.

Espaço projetivo complexo : Se considerarmos em $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, a ação do grupo multiplicativo $\mathbb{C}^*$, como sendo a multiplicação por escalar, isto é, dado $x \in \mathbb{C}^*$ e $(y_0, ..., y_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, a ação faz $x \cdot (y_0, ...y_n) = (xy_0, ..., xy_n)$. Perceba que a ação está bem definida, isto é, $x \cdot (y_0, ..., y_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Em particular, isso define uma relação de equivalência em $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, onde 2 elementos são equivalentes se e só se estão na mesma órbita. Intuitivamente, dois elementos estão na mesma órbita se um é múltiplo escalar do outro. Denotamos o conjunto das órbitas por $\mathbb{CP}^n$, e ele é chamado de espaço projetivo complexo de dimensão n.

Para facilitar a nossa compreensão do espaço projetivo complexo, vamos ver quem são elementos de $\mathbb{CP}^n$. Seja $(y_0, ..., y_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Assim, considere m o menor inteiro 0 e n com $y_m \neq 0$. Assim, $(y_0, ..., y_n)$ está na órbita de $(\frac{y_0}{y_m}, ..., 1, ...\frac{y_n}{y_m}) = (0, ..., 1, ..., \frac{y_n}{y_m}$. Fazendo essa identificação, dois elementos estão na mesma órbita se e só se elas possuem a mesma identificação. Perceba que, assim temos uma certa identificação $\mathbb{CP}^{n+1}$ " = " $\mathbb{CP}^n \cup \mathbb{C}^{n+1}$. De fato, pois em $\mathbb{CP}^{n+1}$, se usarmos a classificação anterior, temos dois casos para um certo elemento dele:

Primeiro caso: $m = 0$. Nesse caso $(1, \frac{y_1}{y_0}, ..., \frac{y_{n+1}}{y_0})$ será visto como $(\frac{y_1}{y_0}, ..., \frac{y_{n+1}}{y_0}) \in \mathbb{C}^n$.

Segundo caso: $m > 0$. Nesse caso $(0, ..., 1, ..., \frac{y_{n+1}}{y_m})$ será visto como $(0, ..., 1, ..., \frac{y_{n+1}}{y_m})$ elemento de $\mathbb{CP}^n$, retirando o 0 inicial.

Exemplo:

A esfera de Riemann é o plano complexo com um ponto no infinito, isto é $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. Na esfera de Riemann, conseguimos estender um pouco a soma e a multiplicação definindo:

$z+\infty=\infty$ para todo $z\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ e $z\cdot\infty=\infty$, para todo $z\neq 0$. Entretanto, não está definido $0\cdot\infty$. Além disso, é usual definir $\dfrac{z}{0}=\infty$ e $\dfrac{z}{\infty}=0$. Definir as operações dessa forma faz com que a esfera de Riemann com essas operações possua propriedades boas como associatividade da soma, comutatividade da soma, etc...

A esfera de Riemann pode ser vista como o espaço projetivo de dimensão 1. De fato, se utilizarmos a identificação, chegariamos que $\mathbb{CP}^1$ é o conjunto dos elementos da forma $(1,z)$ com $z\in\mathbb{C}$ (esse será o conjunto $\mathbb{C}$) e o $(0,1)$ (que será o ponto no infinito).

Podemos definir a topologia de Zariski no espaço projetivo complexo. Para isso, considere o anel de polinômios $\mathbb{C}[z_0,...,z_n]$. Perceba que é bem definido se um certo $x\in\mathbb{CP}^n$ é solução de um polinômio homogêneo, isto é independe do representante. De fato, se $p\in\mathbb{C}[z_0,...,z_n]$ é um polinômio homogêneo de grau k e $(x_0,...,x_n)\in\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ e $\lambda\in\mathbb{C}^*$, temos: $p(\lambda\cdot(x_0,...,x_n))=p(\lambda x_0,...,\lambda x_n)=\lambda^k p(x_0,...,x_n)$. Assim $p(\lambda\cdot(x_0,...,x_n))=0\Leftrightarrow p(x_0,...,x_n)=0$. Assim, dado um ideal de homogêneo I de $\mathbb{C}[z_0,...,z_n]$ e $S\subset\mathbb{CP}^n$, definimos:

$V_{\mathbb{CP}^n}(I)=\{x\in\mathbb{CP}^n\ :f(x)=0$ para todo $f\in I\}$ e $I_{\mathbb{CP}^n}(S)=\{f\in(\mathbb{C}[z_0,...,z_n])_+\ :\ f(x)=0$ para todo $x\in S\}$.

Denotaremos por $(a_0:...:a_n)$ a classe de equivalência de $(a_0,...a_n)$.

Essa ideia pode ser generalizada para um corpo arbitrário, isto é, podemos trocar $\mathbb{C}$ por um corpo k e obter assim um outro espaço projetivo. Denotaremos por P^n_k, o espaço projetivo de dimensão n, sobre o corpo k.

Nullstelensatz projetivo: Seja k um corpo algebricamente fechado. Temos assim que $I_{P^n_k}(V_{P^n_k}(I))=\sqrt{I}$, para todo ideal I homogêneo de $k[x_0,...,x_n]$ com $I\subset(k[x_0,...,x_n])_+$, pelo Nullstelensatz já conhecido.

Assim, existe uma correposdência biunívoca entre os ideais radicais de $Proj(k[x_0,...,x_n])$ e os subconjuntos de P^n_k da forma $V_{P^n_k}(I)$, dado por $V_{P^n_k}$, pois $V_{P^n_k}$ e $I_{P^n_k}$ são um o inverso do outro, visto que a outra composição dar a identidade é válida sempre.

Referências:

[1] Robin Hartshorne. Algebraic geometry. Springer, 1977.

[2] Alexander Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique : II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes. Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1961.

[3] Albretch Beuteulspacher, Ute Rosembaum. Projective Geometry: from foundations to applications. Cambridge University Press, 1998.

[4] The Stacks Project : https://stacks.math.columbia.edu