

Espaço Projetivo e Variedades Projetivas

Gustavo Peres Filbrich

Julho de 2020

Resumo

O propósito deste trabalho é ampliar o dicionário entre Álgebra e Geometria já estabelecido através do *Teorema Nullstellensatz de Hilbert*. Para tal, construímos o *espaço projetivo* como forma de extensão ao *espaço afim* e nele estudamos as condições necessárias para que obtenhamos correspondências biunívocas entre *ideais* e *variedades projetivas*.

1. Precedentes

A construção do *espaço projetivo* surge como uma extensão à ideia do *espaço afim*. Recordemos que, fixados um corpo k e um inteiro $n > 0$, definimos o *espaço afim* de dimensão n sobre k da seguinte forma:

$$\mathbb{A}_k^n := \{\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in k \forall i = 1, \dots, n\}. \quad (1)$$

A partir deste, dado $S \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$, temos a *variedade afim* definida por S :

$$\mathbf{V}_a(S) := \{\mathbf{a} \in \mathbb{A}_k^n \mid f(\mathbf{a}) = 0 \forall f \in S\}. \quad (2)$$

Se temos $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ uma variedade afim, podemos construir um ideal de $k[x_1, \dots, x_n]$, o qual chamaremos de *ideal de X* :

$$\mathbf{I}_a(X) := \{f \in k[x_1, \dots, x_n] \mid f(\mathbf{a}) = 0 \forall \mathbf{a} \in X\}. \quad (3)$$

Podemos, então, estudar uma determinada variedade afim $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ através da passagem para o respectivo ideal $\mathbf{I}_a(X)$. Reciprocamente, dado um ideal $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$, definimos o conjunto

$$\mathbf{V}_a(I) := \{\mathbf{a} \in \mathbb{A}_k^n \mid f(\mathbf{a}) = 0 \forall f \in I\}. \quad (4)$$

Em [Dav15] §2.5 temos a garantia de que $\mathbf{V}(I)$ é, de fato, uma variedade afim. Para tal, fazemos o uso do *Teorema da Base de Hilbert*, o qual também está enunciado no capítulo.

Dessa forma, conseguimos encontrar correspondências entre *variedades afim* e *ideais*, $X \longrightarrow \mathbf{I}_a(X)$, e entre *ideais* e *variedades afim*, $I \longrightarrow \mathbf{V}_a(I)$. Apesar de um primeiro passo, ainda contamos com uma série de percalços – veremos a seguir alguns deles.

O mapa \mathbf{V}_a não é injetor: em $k[x]$, os ideais (x) e (x^2) , apesar de diferentes, são mapeados na mesma variedade $\mathbf{V}_a(x) = \mathbf{V}_a(x^2) = \{0\}$. O mapa \mathbf{I}_a não é nem injetor nem sobrejetor: em \mathbb{A}_k^1 , temos que $\mathbf{I}_a(\mathbb{Z}) = \mathbf{I}_a(\mathbb{A}_k^1) = (0)$ e o ideal $(x^2) \notin \text{Im } \mathbf{I}_a$.

Podemos, no entanto, contornar tais adversidades restringindo-nos a certos subconjuntos de ideais e de variedades afins. Com tais restrições, conseguimos que \mathbf{V}_a e \mathbf{I}_a se tornem mutuamente bijetivos.

Teorema 1.1. (Nullstellensatz de Hilbert). Se k é algebricamente fechado, então valem:

- (1) Todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subset k[x_1, \dots, x_n]$ tem a forma $\mathfrak{m} = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) = \mathbf{I}_a(\mathbf{a})$ para algum ponto $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_k^n$.
- (2) Se $J \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ é um ideal próprio, então $\mathbf{V}_a(J) \neq \emptyset$.
- (3) Para todo $J \subset k[x_1, \dots, x_n]$ ideal, temos que $\mathbf{I}_a(\mathbf{V}_a(J)) = \sqrt{J}$.

Demonstração.

(1)

Primeiramente, mostremos que todo ideal da forma $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ para $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_k^n$ é maximal. Para isso, consideremos o seguinte mapa:

$$\begin{aligned} k[x_1, \dots, x_n] &\longrightarrow k \\ f &\longmapsto f(\mathbf{a}) \end{aligned}$$

O núcleo desse mapa é justamente o conjunto dos polinômios que se anulam em \mathbf{a} , i.e. que são divisíveis por $x_i - a_i$ para algum i . Como o mapa é sobrejetor, temos o isomorfismo

$$\frac{k[x_1, \dots, x_n]}{(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)} \simeq k.$$

Por outro lado, seja $\mathfrak{m} \subset k[x_1, \dots, x_n]$ um ideal maximal. Assim, $k[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{m}$ é corpo. Além disso, $k[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{m}$ é uma k -álgebra finita, com geradores $x_i + \mathfrak{m}$, $i = 1, \dots, n$. O Teorema de Normalização de Noether ([Kla03] §1.1 e [Yur01] §1.4) nos garante que $k[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{m}$ é algébrico sobre o corpo k . Como inicialmente tomamos k algebricamente fechado, temos o seguinte isomorfismo:

$$\phi : k \hookrightarrow k[x_1, \dots, x_n] \xrightarrow{\pi} k[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{m}$$

Assim, se para cada $i = 1, \dots, n$ definirmos $a_i := \phi^{-1}(x_i + \mathfrak{m})$, então $x_i - a_i \in \text{Ker } \pi = \mathfrak{m}$. Dessa forma, $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \subseteq \mathfrak{m}$. Já vimos que $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ é um ideal maximal, o que nos permite concluir que $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) = \mathfrak{m}$.

(2)

Seja $J \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$. Como $k[x_1, \dots, x_n]$ é um anel noetheriano, então existe \mathfrak{m} ideal maximal com $J \subset \mathfrak{m}$ ([Yur01] §1.3). De acordo com o item anterior, existe $\mathbf{a} \in \mathbb{A}_k^n$ satisfazendo $\mathfrak{m} = \mathbf{I}_a(\mathbf{a})$. Com isso, $\{\mathbf{a}\} = \mathbf{V}_a(\mathbf{I}_a(\mathbf{a})) \subseteq \mathbf{V}_a(J) \implies \mathbf{V}_a(J) \neq \emptyset$.

(3)

O passo a passo descrito na demonstração deste item é denominado *Lema de Rabinovich* ([Kla03] §1.1 e [Yur01] §1.3). Sejam $J \subset k[x_1, \dots, x_n]$ um ideal e $f \in \mathbf{I}_a(\mathbf{V}_a(J))$. Definiremos o ideal $J_f := (J, f x_{n+1} - 1) \subset k[x_1, \dots, x_n, x_{n+1}]$. Assim,

$$\mathbf{V}_a(J_f) = \{(\mathbf{a}, a_{n+1}) \in \mathbb{A}_k^{n+1} \mid \mathbf{a} \in \mathbf{V}_a(J), f(\mathbf{a}) a_{n+1} = 1\}.$$

A projeção nas n primeiras coordenadas mapeia $\mathbf{V}_a(J_f)$ ao subconjunto de $\mathbf{V}_a(J)$ cujos elementos \mathbf{a} satisfazem $f(\mathbf{a}) \neq 0$. Como $f \in \mathbf{I}_a(\mathbf{V}_a(J))$, então $\mathbf{V}_a(J_f) = \emptyset$. De acordo com o item anterior, $J_f = k[x_1, \dots, x_n, x_{n+1}]$, o que nos implica que $1 \in J_f$ e, portanto, que existem $g_i \in k[x_1, \dots, x_n, x_{n+1}]$ e $f_i \in J$ com $i = 1, \dots, r$ tais que

$$1 = \sum_{i=1}^r g_i f_i(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) + g_{n+1} (f x_{n+1} - 1)(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in k[x_1, \dots, x_n, x_{n+1}].$$

Por termos uma igualdade polinomial, podemos substituir qualquer variável x_i por um elemento de qualquer k -álgebra – aqui, substituiremos x_{n+1} por 1.

Seja d o maior grau de x_{n+1} que aparece nos polinômios g_1, \dots, g_{n+1} . Ao multiplicarmos a igualdade anterior por f^d obtemos, para $\bar{g}_i := f^d g_i$,

$$f^d = \sum_{i=1}^r \bar{g}_i f_i(x_1, \dots, x_n, 1) + \bar{g}_{n+1} (f x_{n+1} - 1)(x_1, \dots, x_n, 1).$$

Ao tomarmos o quociente pelo ideal $(f x_{n+1} - 1)$, teremos a seguinte relação satisfeita:

$$f^d \equiv \sum_{i=1}^r \bar{g}_i f_i(x_1, \dots, x_n, 1) \pmod{(f x_{n+1} - 1)}.$$

Escrevendo $h_i(x_1, \dots, x_n) := \bar{g}_i(x_1, \dots, x_n, 1)$,

$$f^d \equiv \sum_{i=1}^r h_i f_i(x_1, \dots, x_n) \pmod{(f x_{n+1} - 1)}.$$

Por fim, sabemos que o seguinte mapa é injetor:

$$k[x_1, \dots, x_n] \hookrightarrow \frac{k[x_1, \dots, x_n, x_{n+1}]}{(f x_{n+1} - 1)},$$

o que nos garante que

$$f^d = \sum_{i=1}^r h_i f_i(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]$$

e, portanto, $f^d \in J$. □

Corolário 1.2. *Se k é algebricamente fechado, os mapas \mathbf{V}_a e \mathbf{I}_a induzem as seguintes bijeções:*

$$\begin{aligned} \{\text{ideais radicais em } k[x_1, \dots, x_n]\} &\xleftrightarrow{1:1} \{\text{variedades em } \mathbb{A}_k^n\} \\ \{\text{ideais maximais em } k[x_1, \dots, x_n]\} &\xleftrightarrow{1:1} \{\text{pontos em } \mathbb{A}_k^n\} \end{aligned}$$

2. O Plano Projetivo

Como continuação ao nosso *dicionário* entre álgebra e geometria, aumentaremos o espaço afim \mathbb{A}_k^n adicionando o que chamaremos de *pontos no infinito*. Assim, teremos o denominado *espaço projetivo* n -dimensional sobre k , \mathbb{P}_k^n . Partiremos, no entanto, de um exemplo mais simples e concreto para, depois, generalizarmos os conceitos estudados. Por enquanto, tomaremos o corpo $k = \mathbb{R}$ e $n = 2$.

Notemos que em \mathbb{R}^2 , duas retas interceptam-se em um ponto, exceto se forem paralelas. Uma possível alternativa a essa exceção é considerar que duas retas paralelas se encontram em *algum ponto do infinito*.

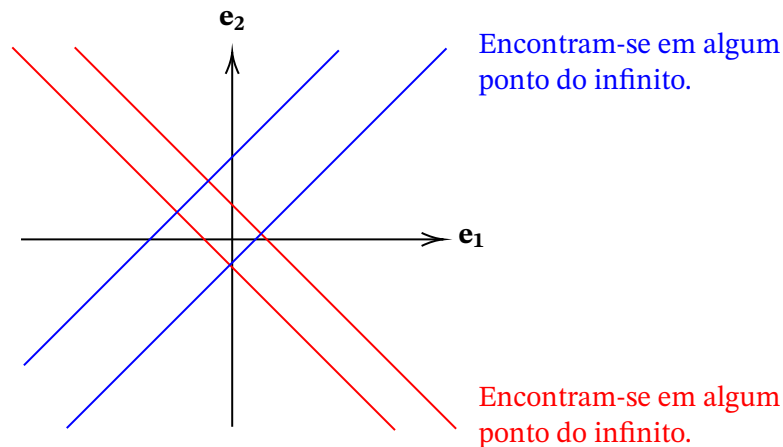


Figura 1: Representação esquemática do plano \mathbb{R}^2 com pares de retas paralelas. Segundo nossa construção, cada par deve se encontrar em algum *ponto no infinito*.

Intuitivamente, podemos visualizar essa ideia ao olharmos dois trilhos paralelos e retilíneos de uma estrada de ferro plana. Temos a impressão visual de que os trilhos se aproximam e, eventualmente, se encontram em um lugar no horizonte, o qual chamamos de *ponto de fuga*. Constatamos, também, que trilhos de vias férreas não-paralelas encontram-se em diferentes *pontos de fuga*. Isso nos induz a considerar diferentes *pontos no infinito*, a depender da direção das retas.

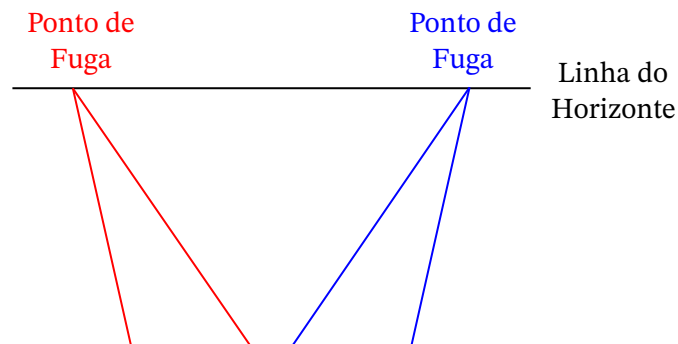


Figura 2: Exemplo esquemático da construção proposta com enfoque nos diferentes *pontos de fuga* sobre a *linha do horizonte*.

Para uma melhor formulação, consideraremos a seguinte relação de equivalência: dadas r_1 e r_2 retas do plano \mathbb{R}^2 , diremos que $r_1 \sim r_2$ se forem paralelas. Denotaremos por $[r]$ a classe de equivalência de todas as retas paralelas a r .

Assim, introduziremos um *ponto no infinito* para cada classe de equivalência $[r]$, o qual denotaremos por $[r]_\infty$, e definiremos o *plano projetivo* $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, ainda que de maneira informal, como a união do plano \mathbb{R}^2 com o conjunto de todos os *pontos no infinito*. Cabe, aqui, uma observação importante: de acordo com a **Figura 2**, percebemos que as retas paralelas ao horizonte não possuem um *ponto no infinito* correspondente.

Agora que contamos com uma visão mais concreta e intuitiva acerca do *plano projetivo*, podemos dar um passo a frente em relação à formalização matemática do conceito. Migraremos para o espaço \mathbb{R}^3 – o porquê ficará claro com as interpretações que daremos para as considerações seguintes.

Dados dois pontos $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, estabeleceremos a seguinte *relação de equivalência*: $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$ se existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$.

Definição 2.1. Chamamos de plano projetivo, denotado por $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, o conjunto das classes de equivalência sob \sim descrita anteriormente:

$$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 := (\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}) / \sim . \quad (5)$$

Dado um ponto $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)$, denotaremos sua classe de equivalência $a \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ por $a = (a_1 : a_2 : a_3)$ e chamaremos $(a_1 : a_2 : a_3)$ de coordenadas homogêneas de a .

Definição 2.2. Dados $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ não todos nulos, diremos que o conjunto

$$\{a \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \mid a = (a_1, a_2, a_3) \text{ com } \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 = 0\} \quad (6)$$

é uma reta projetiva em $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$.

Observemos que se a equação $\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 = 0$ vale para um determinado conjunto de *coordenadas homogêneas* $(a_1 : a_2 : a_3)$ de $a \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, então ela vale para todas as *coordenadas homogêneas* de a : dadas $(b_1 : b_2 : b_3)$ outras *coordenadas homogêneas* de a , existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $(b_1 : b_2 : b_3) = \lambda(a_1 : a_2 : a_3)$. Assim, $\alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 = \alpha \lambda a_1 + \beta \lambda a_2 + \gamma \lambda a_3 = \lambda(\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3) = 0$.

Precisamos agora mostrar que essas nossas definições mais precisas coincidem, de fato, com o conceito intuitivo que estabelecemos anteriormente. Para isso, consideraremos o seguinte mapa:

$$\begin{aligned} i_3 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \\ (a_1, a_2) &\longmapsto (a_1 : a_2 : 1) \end{aligned} \quad (7)$$

Proposição 2.3. O mapa i_3 é injetor e o complemento de sua imagem é a reta projetiva $H_\infty := \{a \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \mid a = (a_1 : a_2 : 0)\}$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} i_3(a_1, a_2) = i_3(b_1, b_2) &\implies (a_1 : a_2 : 1) = (b_1 : b_2 : 1) \\ &\implies \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ tal que } (b_1 : b_2 : 1) = \lambda(a_1 : a_2 : 1) \\ &\implies \lambda = 1 \\ &\implies b_1 = a_1 \text{ e } b_2 = a_2 \implies (a_1, a_2) = (b_1, b_2) \end{aligned}$$

Seja $a = (a_1 : a_2 : a_3) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Se $a_3 = 0$, então a está na reta projetiva determinada por $a_3 = 0$. Se $a_3 \neq 0$, $(a_1 : a_2 : a_3) = (a_1 a_3^{-1} : a_2 a_3^{-1} : 1) = i_3(a_1 a_3^{-1}, a_2 a_3^{-1})$. Pela própria construção de i_3 , notamos que $\text{Im } i_3 \cap H_{\infty} = \emptyset$. \square

Com a **Proposição 2.3**, podemos fazer a identificação $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 = \mathbb{R}^2 \sqcup H_{\infty}$, a qual vai ao encontro da descrição informal que havíamos feito anteriormente.

Cabe aqui uma interpretação geométrica dos pontos no plano projetivo pois, de início, não parece muito direta a relação do espaço \mathbb{R}^3 com o dito *plano* projetivo.

Dado um ponto $a = (a_1 : a_2 : a_3) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, todas as outras coordenadas homogêneas possíveis para a têm a forma $\lambda(a_1 : a_2 : a_3)$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Olhando em \mathbb{R}^3 , isso corresponde aos pontos com a forma $\lambda(a_1, a_2, a_3)$, os quais pertencem todos a uma mesma reta que passa pela origem.

Reciprocamente, dada uma reta r em \mathbb{R}^3 que passa pela origem, qualquer ponto $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in r \setminus \{(0, 0, 0)\}$ nos fornece um ponto $a = (a_1 : a_2 : a_3) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ unicamente determinado – qualquer outro ponto em $r \setminus \{(0, 0, 0)\}$ é múltiplo de \mathbf{a} , o que corresponde à mesma classe de equivalência a .

Assim, temos uma correspondência biunívoca entre os pontos em $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ e as retas em \mathbb{R}^3 que passam pela origem.

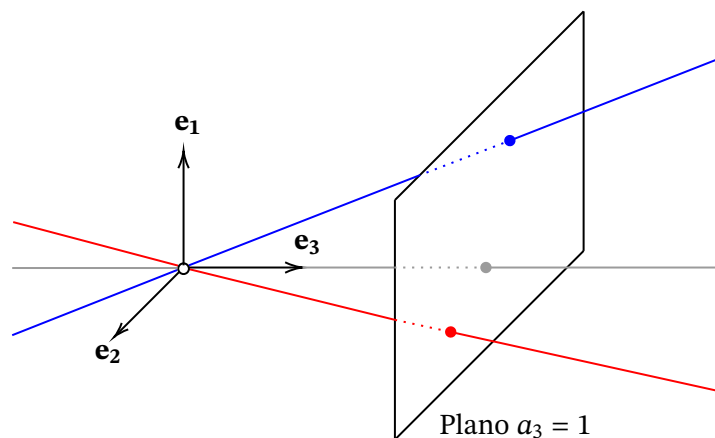


Figura 3: Representação esquemática do espaço \mathbb{R}^3 e o plano $a_3 = 1$. Notamos, aqui, a correspondência entre as retas que passam pela origem e os pontos no *plano projetivo* $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$.

Todo ponto $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ pode ser identificado com o ponto $\mathbf{a} = (a_1, a_2, 1)$ no plano $a_3 = 1$; este, por sua vez, determina unicamente uma reta que passa pela origem e um ponto $a = (a_1 : a_2 : 1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, o qual está na imagem do mapa i_3 definido em (7). Como vimos na **Proposição 2.3**, tal mapa não é sobrejetor: as retas contidas no *plano* $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$ não imprimem pontos no plano $a_3 = 1$; os pontos de tais retas são justamente os que têm coordenada $a_3 = 0$ e, portanto, correspondem à reta projetiva H_{∞} .

3. O Espaço Projetivo

Munidos de uma visão concreta, podemos partir para a construção do *espaço projetivo*, o qual consiste, essencialmente, na generalização do *plano projetivo*. A partir de agora, consideraremos fixados k um corpo qualquer e $n \geq 1$.

Dados $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_0, \dots, b_n) \in k^{n+1}$, diremos que $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$ se existir $\lambda \in k \setminus \{0\}$ tal que $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$. Verifica-se que \sim é, de fato, uma relação de equivalência em k^{n+1} .

Definição 3.1. Chamamos de espaço projetivo n -dimensional sobre o corpo k , e denotamos por \mathbb{P}_k^n , o conjunto das classes de equivalência sob \sim descrita acima em $k^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$:

$$\mathbb{P}_k^n := (k^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\})/\sim \quad (8)$$

Dado $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_n) \in k^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$, denotamos sua classe de equivalência $a \in \mathbb{P}_k^n$ por $(a_0 : \dots : a_n)$ e diremos que $(a_0 : \dots : a_n)$ são as coordenadas homogêneas de a .

Assim como o no caso particular anterior, o espaço projetivo \mathbb{P}_k^n pode ser decomposto em uma parte afim e em outra parte projetiva. Para isso, consideremos os seguintes subconjuntos de \mathbb{P}_k^n :

$$\begin{aligned} U_r &:= \{a = (a_0 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}_k^n \mid a_r \neq 0\} \\ H_r &:= \{a = (a_0 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}_k^n \mid a_r = 0\} \end{aligned} \quad (9)$$

Proposição 3.2. H_r pode ser identificado com $\mathbb{P}^{n-1}(k)$ e U_r pode ser identificado com \mathbb{A}_k^n . Assim, $\mathbb{P}_k^n \simeq \mathbb{A}_k^n \sqcup \mathbb{P}^{n-1}(k)$.

Demonstração.

Consideremos o seguinte mapa:

$$\begin{aligned} i_r : \mathbb{A}_k^n &\longrightarrow U_r \\ (a_1, \dots, a_n) &\longmapsto (a_1 : \dots : a_{r-1} : 1 : a_r : \dots : a_n) \end{aligned} \quad (10)$$

Analogamente à demonstração da **Proposição 2.3**, verificamos que i_r é injetor. Com isso, temos a correspondência $U_r \simeq \mathbb{A}_k^n$.

Ainda sob a luz da **Proposição 2.3**, notamos que i_r não é sobrejetor e que o complementar de sua imagem é o conjunto H_r . Este, por sua vez, pode ser identificado com $\mathbb{P}^{n-1}(k)$ ao desconsiderarmos a r -ésima componente de seus pontos. \square

Fixado r , é comum denominarmos U_r como a *parte afim* de \mathbb{P}_k^n e H_r como *hiperplano no infinito*. Os pontos em H_r são chamados de *pontos no infinito* e consistem na generalização em dimensões maiores para os *pontos de fuga* propostos na **Figura 2**.

4. Variedades Projetivas

Nosso próximo passo na extensão do espaço afim para o projetivo será considerarmos variedades em \mathbb{P}_k^n . Em (2) vimos que qualquer subconjunto $S \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ define uma *variedade afim* $\mathbf{V}_a(S)$. Já em \mathbb{P}_k^n , veremos que não desfrutamos de tal liberdade.

Consideremos o polinômio $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_2 \in \mathbb{R}[x_1, x_2]$. Observamos que o ponto $a = (a_0 : a_1 : a_2) = (1 : 2 : 2) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ satisfaz a equação $f(a_1, a_2) = 0$. Substituindo, temos $2^2 - 2 \cdot 2 = 0$. No entanto, os pontos de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ são classes de equivalência, de forma que $(2 : 4 : 4) = (1 : 2 : 2)$, mas $4^2 - 2 \cdot 4 = 8 \neq 0$.

Para contornarmos tal adversidade, faremos uma restrição ao conjunto dos polinômios com os quais trabalharemos.

Definição 4.1. Um polinômio $f(x_0, \dots, x_n) = \sum_i c_i x_0^{d_0} \dots x_n^{d_n} \in k[x_0, \dots, x_n]$ é dito homogêneo de grau total d se todos os seus monômios têm o mesmo grau $d = d_0 + \dots + d_n$.

Proposição 4.2. Seja $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ um polinômio homogêneo. Se f se anula em algum conjunto de coordenadas homogêneas de $a = (a_0 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}_k^n$, então f se anula em todos os conjuntos de coordenadas homogêneas de a .

Demonstração.

Suponhamos que $f(a_0, \dots, a_n) = 0$ e consideremos $a = (a_0 : \dots : a_n) = (\lambda a_0 : \dots : \lambda a_n)$ conjuntos de coordenadas homogêneas de $a \in \mathbb{P}_k^n$.

Se f é homogêneo de grau total d , então todos os termos de f têm a forma $c_i x_0^{d_0} \dots x_n^{d_n}$, com $d = d_0 + \dots + d_n$.

Substituindo x_i por λa_i , temos que

$$\begin{aligned} c_i x_0^{d_0} \dots x_n^{d_n} &= c_i (\lambda a_0)^{d_0} \dots (\lambda a_n)^{d_n} \\ &= c_i \lambda^{d_0} a_0^{d_0} \dots \lambda^{d_n} a_n^{d_n} \\ &= c_i \lambda^{d_0 + \dots + d_n} a_0^{d_0} \dots a_n^{d_n} \\ &= \lambda^d c_i a_0^{d_0} \dots a_n^{d_n} \end{aligned}$$

Dessa forma, λ^d aparece em todos os termos de f e pode ser colocado em evidência. Com isso, $f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = \lambda^d f(a_0, \dots, a_n) = 0$. □

Definição 4.3. Dado um subconjunto de polinômios homogêneos $T \subset k[x_0, \dots, x_n]$, chamamos de variedade projetiva definida por T o subconjunto de \mathbb{P}_k^n

$$\mathbf{V}(T) := \{a = (a_0 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}_k^n \mid f(a_0, \dots, a_n) = 0 \forall f \in T\}. \quad (11)$$

5. Versão Projetiva do Dicionário entre Álgebra e Geometria

Nosso intuito nesta seção será estudar a versão projetiva das correspondências obtidas no **Corolário 1.2**. Já vimos que foi preciso cuidado na hora de se definir *variedades projetivas*: tivemos que nos limitar a polinômios homogêneos para defini-las. Veremos que também certa prudência deverá ser tomada para o caso de ideais.

Dados dois polinômios homogêneos $f_1, f_2 \in k[x_0, \dots, x_n]$, se os graus totais de f_1 e f_2 forem diferentes, a soma $f_1 + f_2$ não mais será um polinômio homogêneo. No entanto, temos observações importantes a fazer.

Proposição 5.1. Sejam $f_1, \dots, f_r \in k[x_0, \dots, x_n]$ polinômios homogêneos. Todo elemento do ideal $I = (f_1, \dots, f_r)$ se anula em todas as coordenadas homogêneas de cada ponto da variedade $X = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_r)$.

Demonstração.

Um elemento $f \in I$ tem a forma $f = \sum_{i=1}^r g_i f_i$ para $g_i \in k[x_0, \dots, x_n] \forall i = 1, \dots, r$.

Dado $a = (a_0 : \dots : a_n) \in X$, temos que $f_i(a_0, \dots, a_n) = 0 \forall i = 1, \dots, r$.

$$\implies f(a_0, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^r g_i(a_0, \dots, a_n) f_i(a_0, \dots, a_n) = 0.$$

A **Proposição 4.2** nos garante o mesmo resultado para qualquer conjunto de coordenadas homogêneas de a . \square

Definição 5.2. Um ideal $I \subset k[x_0, \dots, x_n]$ é dito homogêneo se para cada $g \in I$, as componentes homogêneas g_i de g pertencem a I .

Teorema 5.3. Seja $I \subseteq k[x_0, \dots, x_n]$. São equivalentes:

- (1) I é um ideal homogêneo.
- (2) $I = (f_1, \dots, f_r)$ para f_1, \dots, f_r polinômios homogêneos.

Demonstração.

$$(1) \implies (2)$$

Seja I um ideal homogêneo. O *Teorema da Base de Hilbert* ([Dav15] §2.5) nos garante que existem $g_1, \dots, g_r \in k[x_0, \dots, x_n]$, não necessariamente homogêneos, tais que $I = (g_1, \dots, g_r)$. Assim como proposto anteriormente, podemos expandir cada g_i na soma de suas componentes homogêneas: $g_i = \sum_{j=1}^d g_{ij}$.

Chamemos $J = (g_{11}, \dots, g_{1d}, \dots, g_{r1}, \dots, g_{rd})$. Como cada g_i é a soma de geradores de J , temos que $I \subseteq J$. Por outro lado, I homogêneo \implies todos os g_{ij} estão em I . Assim, todas as componentes de g_i pertencem a I para cada $i = 1, \dots, r$. Com isso, $g_i \in I$ e $J \subseteq I$. Dessa forma, $I = J$.

$$(2) \implies (1)$$

Suponha $I = (f_1, \dots, f_r)$ para f_1, \dots, f_r homogêneos. Todo $f \in I$ tem a forma $f = \sum_{i=1}^r g_i f_i$ e cada g_i pode ser escrito como a soma de suas componentes homogêneas $g_i = \sum_{j=1}^d g_{ij}$. Juntando tudo, temos que $f = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^d g_{ij} f_i$.

Cada um dos termos $g_{ij} f_i$ é homogêneo e I é um ideal $\implies g_{ij} f_i \in I$, o que coincide com a definição de I ideal homogêneo. \square

Definição 5.4. Seja $I \subset k[x_0, \dots, x_n]$ um ideal homogêneo. Definimos o subconjunto de \mathbb{P}_k^n

$$\mathbf{V}(I) := \{a \in \mathbb{P}_k^n \mid f(a) = 0 \forall f \in I\}. \quad (12)$$

A caracterização de ideais homogêneos apresentada no **Teorema 5.3** nos assegura que $\mathbf{V}(I)$ é uma variedade projetiva e, se $I = (f_1, \dots, f_r)$ para f_1, \dots, f_r homogêneos, então $\mathbf{V}(I) = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_r)$.

No sentido contrário da definição anterior, estabeleceremos agora um mapa correspondendo variedades projetivas a ideais:

Proposição 5.5. *Sejam $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ e*

$$\mathbf{I}(X) := \{f \in k[x_0, \dots, x_n] \mid f(a_0, \dots, a_n) = 0 \forall (a_0 : \dots : a_n) \in X\}. \quad (13)$$

Se k é infinito, então $\mathbf{I}(X)$ é um ideal homogêneo em $k[x_0, \dots, x_n]$.

Demonstração.

Dados dois polinômios $f, g \in \mathbf{I}(X)$, para todo ponto $a = (a_0 : \dots : a_n) \in X$, temos que $f(a_0, \dots, a_n) = g(a_0, \dots, a_n) = 0$. Com isso, $(f+g)(a_0, \dots, a_n) = 0$. Se tomarmos outro polinômio $h \in k[x_0, \dots, x_n]$, ainda assim teremos que $(h \cdot f)(a_0, \dots, a_n) = 0$. Dessa forma, $\mathbf{I}(X)$ é um ideal de $k[x_0, \dots, x_n]$.

Precisamos, agora, mostrar que $\mathbf{I}(X)$ é homogêneo. Já vimos no **Teorema 5.3** que podemos escrever f como soma de suas componentes homogêneas $f = \sum_{j=1}^d f_j$. Em uma argumentação análoga à feita na **Proposição 4.2**, qualquer outro conjunto de coordenadas homogêneas para a tem a forma $(\lambda a_0 : \dots : \lambda a_n)$ para $\lambda \in k \setminus \{0\}$. Substituindo, temos

$$\begin{aligned} f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) &= \sum_{j=1}^d f_j(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) \\ &= \sum_{j=1}^d \lambda^j f_j(a_0, \dots, a_n). \end{aligned}$$

Como, por hipótese, f se anula em a (para todas as coordenadas homogêneas possíveis) então cada f_j também se anula em a e, portanto, pertence a $\mathbf{I}(X)$. Dessa forma, $\mathbf{I}(X)$ é um ideal homogêneo. \square

Por fim, voltamos nossas atenções para a *versão projetiva* do **Teorema 1.1** (*Nullstellensatz de Hilbert*) – mais uma vez, é preciso cuidado na passagem do *afim* para o *projetivo*. No caso *afim*, a contrapositiva do item (3) nos garantia que, para k algebricamente fechado, dado $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ um ideal, se $\mathbf{V}_a(J) = \emptyset$, então $J = k[x_1, \dots, x_n]$.

Observemos, no entanto, o seguinte exemplo para $k = \mathbb{C}$. Ao tomarmos o ideal $I = (x_0, \dots, x_n) \subseteq \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$, a *variedade afim* $\mathbf{V}(I) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ é definida pelo conjunto de equações

$$x_0 = \dots = x_n = 0. \quad (14)$$

No entanto, os pontos de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ não podem ter coordenadas homogêneas todas nulas, resultando que $\mathbf{V}(I) = \emptyset$.

A fim de fazermos as devidas alterações na *versão projetiva* do nosso dicionário, precisaremos da seguinte projeção

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{A}_k^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} &\longrightarrow \mathbb{P}_k^n \\ (x_0, \dots, x_n) &\longmapsto (x_0 : \dots : x_n) \end{aligned} \quad (15)$$

Definição 5.6. *Dada $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ variedade projetiva, definimos o cone afim de X*

$$\mathbf{C}_a(X) := \pi^{-1}(X) \cup \{\mathbf{0}\} \quad (16)$$

Proposição 5.7. *Dado $I \subset k[x_0, \dots, x_n]$ ideal homogêneo, $\mathbf{C}_a(\mathbf{V}(I)) = \mathbf{V}_a(I)$.*

Demonstração.

$$\mathbf{a} \in \mathbf{C}_a(\mathbf{V}(I)) \iff f(\mathbf{a}) = 0 \forall f \in I \iff \mathbf{a} \in \mathbf{V}_a(I)$$

\square

Teorema 5.8. (Nullstellensatz Projetivo) Se k é algebricamente fechado e $J \subset k[x_0, \dots, x_n]$ é um ideal homogêneo, então valem:

$$(1) \mathbf{V}(J) = \emptyset \iff (x_0, \dots, x_n) \subset \sqrt{J}.$$

$$(2) \mathbf{V}(J) \neq \emptyset \implies \mathbf{I}(\mathbf{V}(J)) = \sqrt{J}.$$

Demonstração.

(1)

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(J) = \emptyset &\iff \pi^{-1}(\mathbf{V}(J)) = \emptyset \\ &\iff \mathbf{C}_a(\mathbf{V}(J)) = \emptyset \text{ ou } \{\mathbf{0}\} \\ &\iff \mathbf{C}_a(\mathbf{V}(J)) \subseteq \{\mathbf{0}\} \\ &\iff \mathbf{V}_a(J) \subseteq \{\mathbf{0}\} \\ &\iff (x_0, \dots, x_n) = \mathbf{I}_a(\{\mathbf{0}\}) \subseteq \mathbf{I}_a(\mathbf{V}_a(J)) = \sqrt{J} \end{aligned}$$

(2)

Suponhamos $\mathbf{V}(J) \neq \emptyset$.

$$\begin{aligned} f \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(J)) &\iff f \in \mathbf{I}(\mathbf{C}_a(\mathbf{V}(J))) \\ &\iff \exists r \geq 1 \text{ tal que } f^r \in J \\ &\iff f \in \sqrt{J}. \end{aligned}$$

Na última implicação, aplicamos a versão afim do **Teorema 1.1 (Nullstellensatz de Hilbert)**, seguindo o esquema proposto por [Kla03] §2.2 e [Rux] §1.1. \square

Corolário 5.9. Se k é algebricamente fechado, os mapas $J \mapsto \mathbf{V}(J)$ e $X \mapsto \mathbf{I}(X)$ nos dão a seguinte bijeção:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ideais radicais homogêneos} \\ J \subseteq k[x_0, \dots, x_n] \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{l} \text{variedades projetivas} \\ X \subset \mathbb{P}_k^n \end{array} \right\}$$

Referências

- [Yur01] **Yuriy Drozd.** *Introduction to Algebraic Geometry.* Kiev University Publishers, 2001.
- [Kla03] **Klaus Hulek.** *Elementary Algebraic Geometry.* Student Mathematical Library. American Mathematical Society, 2003.
- [Dav15] **David A. Cox, John Little, Donal O’Shea.** *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra.* 4ª ed. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 2015.
- [Rux] **Ruxandra Moraru.** *Projective Varieties.* URL: <http://www.math.uwaterloo.ca/~moraru/764ProjectiveVarieties.pdf>. (acesso em 08/07/2020).