Álgebras de Banach
e
Transformadas de Gelfand

Gabriel dos Anjos Gavioli

Introdução

A teoria das álgebras de Banach é uma teoria matemática abstrata que sintetiza de muitos casos específicos de diferentes áreas da matemática.

Álgebras de Banach têm suas raízes no início do século XX, quando conceitos e estruturas abstratos foram introduzidos, transformando tanto a linguagem matemática quanto a prática. Na década de 1930, a topologia geral foi bastante desenvolvida. O teorema do limite uniforme, o teorema do gráfico fechado e o teorema do mapeamento aberto, todos eles são teoremas de Banach de 1932, cujo livro, "*Théorie des opérations linéaires*", influenciou profundamente a análise matemática de sua era.

Antes de Gelfand, que é o fundador da teoria de álgebras de Banach, houve alguns trabalhos que tratavam do estudo de uma multiplicação adicional em um espaço de Banach sem desenvolver uma teoria geral. Em sua tese de dissertação (1939), Gelfand reconheceu o papel central dos ideais maximais e, usando suas propriedades, criou a moderna teoria de álgebras de Banach. Em 1943, Gelfand e Naimark provaram os dois principais teoremas de representação, que formam o corpo principal da teoria de álgebras de Banach. O teorema de Mazur de 1938 foi uma contribuição importante para a teoria de Gelfand.

Álgebras de Banach

Será estudado o conceito de álgebra de Banach e algumas de suas propriedades, para isso deve-se iniciar com o conceito de álgebra:

Definição. Seja A um espaço vetorial sobre um corpo K, então A é uma álgebra se possui uma operação $\cdot : A \times A \to A$, que associa o par (a, b) ao elemento $a \cdot b$, satisfazendo as seguintes propriedades:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot b$$

$$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

$$\lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b)$$

Para todo $a, b \in A$, e para todo $\lambda \in K$.

Será denotado ab ao invés de $a \cdot b$. Diz-se que uma álgebra A possui unidade e, se para todo $a \in A$, satisfaz $ae = ea = a$, e neste caso denota-se $e = 1$. Em uma álgebra A

com unidade, diz-se que um elemento $a \in A$ tem inverso $b \in A$, se $ab = ba = 1$, e b será denotado por a^{-1}. O conjunto dos elementos inversíveis de A é representado por $U(A)$.

Um caso particular de álgebra, é a álgebra complexa:

Definição. Uma álgebra A é dita complexa se é uma álgebra sobre o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos, e também satisfaz a associatividade:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Para todo $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Definição. Seja A um espaço vetorial sobre o corpo K. Uma norma em A é uma aplicação $\| \cdot \| : A \to \mathbb{R}$ tal que:

(1) $\|x\| \geq 0, \forall\, x \in A$. E $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \forall\, x \in A$ e $\forall\, \lambda \in K$;
(3) (Desigualdade Triangular) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall\, x, y \in A$;

Se A é uma álgebra e $\| \cdot \|$ uma norma que satisfaz $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \forall\, x, y \in A$, então $\| \cdot \|$ é uma norma na álgebra A, e $(A, \| \cdot \|)$ é dita uma álgebra normada.

Exemplo. Seja $\mathbb{C}[x]$ álgebra dos polinômios com coeficientes complexos. E seja $p(x) \in \mathbb{C}[x]$, então $p(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x^i$, com $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Defina $\|p(x)\|_1 = \sum_{i=0}^{n} |\lambda_i|$. Portanto $\mathbb{C}[x]$ juntamente com $\| \cdot \|_1$ forma uma álgebra normada.

Pode-se ainda definir outras normas sobre a mesma álgebra. Seja $\|p(x)\|_2 = \sup_{x \in [0,1]} \{|p(x)|\}$. E então $\mathbb{C}[x]$ com a norma $\| \cdot \|_2$ forma outra álgebra normada.

Exemplo. Seja agora X um espaço topológico e $C(X)$ o conjunto das funções $f : X \to \mathbb{C}$ contínuas e limitadas . Então $C(X)$ com a operação $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $f, g \in C(X)$, é uma álgebra complexa. E mais ainda, definindo $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$, $C(X)$ se torna uma álgebra normada:

Se $f \in C(X)$, então f é limitada, logo $|f(x)| \in [0, +\infty)$, assim $\|f\| \geq 0$. Se $\|f\| = 0 \Leftrightarrow \sup_{x \in X} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0, \forall x \in X \Leftrightarrow f \equiv 0$.

Observe que

$$|\lambda f(x)| = |\lambda| \cdot |f(x)| \leq |\lambda| \sup_{x \in X} |f(x)| = |\lambda| \cdot \|f\|$$

Portanto $|\lambda| \cdot \|f\|$ é cota superior de $\{|\lambda f(x)| \ : \ x \in X\}$, então $\sup_{x \in X} |\lambda f(x)| \leq |\lambda| \cdot \|f\|$, assim $\|\lambda f\| \leq |\lambda| \cdot \|f\|$. Porem, quando $\lambda \neq 0$, tem-se

$$|f(x)| = |\lambda^{-1}| \cdot |\lambda| \cdot |f(x)| = |\lambda^{-1}| \cdot |\lambda f(x)| \leq |\lambda^{-1}| \cdot \|\lambda f\|$$

Tomando o supremo na desigualdade, encontra-se

$$\|f\| \leq |\lambda^{-1}| \cdot \|\lambda f\| \Rightarrow |\lambda| \cdot \|f\| \leq \|\lambda f\|$$

Portanto $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$.

Agora, se $x \in X$, e $f, g \in C(X)$, tem-se

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x)| + \sup_{x \in X} |g(x)| = \|f\| + \|g\|$$

Tomando mais uma vez o supremo na desigualdade:

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

Sejam $f, g \in C$

$$\|f \cdot g\| = \sup_{x \in X} |f(x)g(x)| = \sup_{x \in X} |f(x)| \cdot |g(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x)| \cdot \sup_{x \in X} |g(x) = \|f\| \cdot \|g\|$$

Conclui-se que $C(X)$ é uma álgebra normada.

Agora para continuar o estudo e definir espaços de Banach, deve-se entender o que são sequências de Cauchy.

Definição. Seja X um conjunto não vazio, e seja $d : X \times X \to [0, +\infty)$ uma aplicação que satisfaz, para todo $x, y, z \in X$:

(1) $d(x, y) \geq 0$, e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
(2) $d(x, y) = d(y, x)$;
(3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Então d é uma métrica e (X, d) é um espaço métrico.

Agora pode-se definir bolas, conjuntos abertos e fechado.

Definição. Seja X um espaço métrico. E sejam $r > 0$, $x \in X$, e $V \subseteq X$.

(1) $B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$ é chamado bola aberta de centro x e raio r;
(2) V é dito aberto se para todo $x \in V$, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq V$;
(3) V é dito fechado se o complementar de V é aberto.

Observação. É fácil verificar que o fecho de V, $\overline{V}$, é fechado, e que V é fechado se, e somente se, $\overline{V} = V$.

Definição. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em um espaço métrico X. Então tal sequência é dita de Cauchy, se para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon, \forall\, n, m > n_0$.

Observação. Nem toda sequência de Cauchy é convergente.

Se X é um conjunto com norma $\|\cdot\|$, então X é um espaço normado. Mas também X é um espaço métrico, com a métrica induzida pela norma: $d(x, y) = \|x - y\|$. Então faz sentido em dizer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em um espaço normado.

Definição. Seja X um espaço normado. Diz-se que X é um espaço de Banach se toda sequência de Cauchy em X é convergente em X.

Exemplo. Pelos conhecimentos de Análise Real, sabe-se que no espaço real $\mathbb{R}$, com a norma usual, toda sequência de Cauchy é convergente. Portanto o espaço normado $\mathbb{R}$ é um espaço de Banach.

Seja $\mathbb{R}^p$, com a norma euclidiana $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_p^2}$. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^p$, então $x_n = (x_1^{(n)}, \ldots, x_p^{(n)}) \in \mathbb{R}^p$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, para todo $\varepsilon > 0$, então existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que sempre que $m, n > N_0$ tem-se:

$$\|x_n - x_m\| = \sqrt{(x_1^{(n)} - x_1^{(m)})^2 + \cdots + (x_p^{(n)} - x_p^{(m)})^2} < \varepsilon$$

Particularmente, para todo $i = 1, \ldots, p$ tem-se $|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}| < \varepsilon$, quando $m, n > N_0$. Logo cada $(x_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$, então converge para todo $i = 1, \ldots, p$. Assim $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge em $\mathbb{R}^p$. Portanto $\mathbb{R}^p$ é um espaço de Banach.

Exemplo. Considere $C(X) = \{f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ é contínua e limitada}\}$ com a norma definida anteriormente. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $C(X)$, ou seja, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que sempre que $m, n > N_0$, tem-se:

$$\|f_n - f_m\| = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Pelo exemplo anterior, cada sequência $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, com x fixo em X, é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Logo, para cada $x \in X$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge em $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ para um α_x. Seja $g : X \to \mathbb{C}$, $g(x) = \alpha_x$. Então se $x \in X$, e $m, n > N_0$, tem-se:

$$|f_n(x) - g(x)| = |f_n(x) - f_m(x) + f_m(x) - g(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - g(x)| <$$
$$< \|f_n(x) - f_m(x)\| + |f_m(x) - g(x)| < \varepsilon + |f_m(x) - g(x)|$$

Fazendo $m \to \infty$, então $|f_m(x) - g(x)| \to 0$. Assim $|f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$, e portanto $\sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$. Agora basta mostra que $g \in C(X)$.

Seja $x_0 \in X$, e seja $\varepsilon_0 = \dfrac{\varepsilon}{3}$. Como provado anteriormente, $|f_n(x) - g(x)| < \varepsilon_0$, para todo $x \in X$. Como $f_n \in C(X)$, então existe um aberto $U_{\varepsilon_0} \ni x_0$ tal que $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon_0, \forall\, x \in U_{\varepsilon_0}$. Logo

$$|g(x) - g(x_0)| = |g(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - g(x_0)| \leq$$
$$\leq |g(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - g(x_0)| < \varepsilon_0 + \varepsilon_0 + \varepsilon_0 = \varepsilon$$

Portanto g é contínua.

Como $|f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$, seja n fixado e $\varepsilon = 1$, então $|f_n(x) - g(x)| < 1, \forall\, x \in X$. Assim

$$|g(x)| = |g(x) - f_n(x) + f_n(x)| \leq |g(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| < 1 + \|f_n(x)\|$$

Então g é limitada, e portanto $g \in C(X)$. Conclui-se que $C(X)$ é um espaço de Banach.

Proposição 0.0.1. *Sejam X um espaço de Banach, e S subespaço fechado de X. Então S também é espaço de Banach. E reciprocamente, todo subespaço de Banach de um espaço normado é fechado.*

Demonstração. Seja $(x_n)_n$ uma sequência de Cauchy em S, portanto $(x_n)_n$ é de Cauchy em X, e X é espaço de Banach, então $(x_n)_n$ converge para $x \in X$. Logo $x \in \overline{S}$, mas S é fechado, isto implica que $x \in S$, e portanto S é espaço de Banach.

Seja agora S espaço de Banach contido em X, um espaço normado. Seja $x \in \overline{S}$, então existe uma sequência $(x_n)_n \subseteq S$ que converge em x. Toda sequência convergente é de Cauchy, então $(x_n)_n$ é de Cauchy, e como S é espaço de Banach, $(x_n)_n$ converge em S, logo $x \in S$ e $\overline{S} = S$, portanto S é fechado. □

Exemplo. Seja agora X um espaço topológico e $C_0(X) \subseteq C(X)$ o conjunto das funções contínuas e limitadas $f : X \to \mathbb{C}$ que se anulam no infinito, ou seja, para todo $\varepsilon > 0$, existe um conjunto compacto $K \subseteq X$ tal que $|f(x)| < \varepsilon, \forall\, x \notin K$.

Se f é a função identicamente nula, então $f \in C_0(x)$. Sejam $f \in C_0(X)$ e $\lambda \neq 0$ um escalar, seja $\varepsilon > 0$ e considere $\dfrac{\varepsilon}{|\lambda|} > 0$. Como $f \in C_(X)$, existe K compacto tal que $|f(x)| < \varepsilon, \forall x \notin K$, então $|\lambda| \cdot |f(x)| < |\lambda| \cdot \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|} \Rightarrow |\lambda f(x)| < \varepsilon, \forall x \notin K$, e portanto $\lambda f \in C_0(X)$. Sejam $f, g \in C_0(X)$, e $\varepsilon > 0$. Então existem K_1, K_2 compactos tais que $|f(x)| < \varepsilon, \forall x \notin K_1$, e $|g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}, \forall x \notin K_2$. Considere $K = K_1 \cap K_2$ compacto, então $|(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| < \varepsilon, \forall \notin K$, então $f + g \in C_0(X)$. Assim $C_0(X)$ é subespaço de $C(X)$.

Agora sejam $f \in \overline{C_0(X)}$ e $\varepsilon > 0$, então existe uma sequência $(f_n)_n$ em $C_0(X)$ convergente a f, ou seja, $\|f(x) - f_n(x)\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Assim para todo n, existe também K_n, todos compactos, tais que $|f_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}, \forall x \notin K$. Seja $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ compacto. Para todo $x \notin K$

$$|f(x)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \leq \|f_n - f\| + |f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Logo $f \in C_0(X)$, e portanto $C_0(X)$ é fechado, e pela proposição anterior, $C_0(X)$ é subespaço fechado de $C(X)$ que é de Banach, então $C_0(X)$ é espaço de Banach.

Definição. Sejam A uma álgebra complexa, e $\|\cdot\|$ uma norma sobre A. Se a álgebra normada $(A, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach como espaço vetorial, diz-se que $(A, \|\cdot\|)$ é uma álgebra de Banach

Exemplo. Os conjuntos $C(X)$ e $C_0(X)$ são álgebras de Banach com a norma $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Exemplo. Sejam A um espaço de Banach com unidade, e $x \in A$ não nulo tal que $\|x\| < 1$. Então $1 - x$ é inversível em A.

Seja $y_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$. Então $(1-x) \cdot y_n = 1 - x^{n+1}$ e $y_n \cdot (1-x) = 1 - x^{n+1}$ para todo n. Como $\|x\| < 1$, então $\lim_{n \to \infty} x^{n+1} = 0$. Considerando a sequência $(y_n(_{n \in \mathbb{N}}$ em A, que é uma sequência de Cauchy, conclui-se que $(y_n(_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $y \in A$. Calculando o limite de

$$\lim_{n \to \infty} (1-x) \cdot y_n = (1-x) \cdot y \Rightarrow (1-x) \cdot y = 1$$
$$\lim_{n \to \infty} y_n \cdot (1-x) = y \cdot (1-x) \Rightarrow y \cdot (1-x) = 1$$

Portanto $1 - x$ é inversível quando $\|x\| < 1$.

PROPOSIÇÃO 0.0.2. *Seja A uma álgebra de Banach comutativa com unidade. Então $U(A)$ é conjunto aberto.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $x \in U(A)$, e considere a bola $B(0, \frac{1}{\|x^{-1}\|})$. Seja $a \in B(0, \frac{1}{\|x^{-1}\|})$. Então $\|a\| < \frac{1}{\|x^{-1}\|} \Rightarrow \|ax^{-1}\| \leq \|a\| \cdot \|x^{-1}\| < 1$, logo $1 - ax^{-1}$ é inversível. Assim $x - a$ é inversível, e portanto $B(x, \frac{1}{\|x^{-1}\|}) \subseteq U(A)$. Concluindo que $U(A)$ é aberto. $\square$

DEFINIÇÃO. Sejam A e B duas álgebras complexas, e seja $\varphi : A \to B$ uma função. Então φ é um homomorfismo complexo se

(1) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \forall x, y \in A$;
(2) $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x), \forall x \in A, \forall \lambda \in \mathbb{C}$;
(3) $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y), \forall x, y \in A$.

OBSERVAÇÃO. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ e 1 é a unidade de A, então $\lambda \cdot 1 \in A$, e será denotado apenas por λ.

DEFINIÇÃO. Se A é uma álgebra complexa comutativa com unidade, então $J \subseteq A$, $J \neq \emptyset$, é dito ideal de A, se $J \cdot A \subseteq J$. E J é ideal próprio se $J \neq A$ e $J \neq 0$. E também J é ideal maximal se não existir nenhum ideal próprio entre J e A.

OBSERVAÇÃO (1). Se I é ideal próprio de A, então I não possui elementos inversíveis. Caso contrário, se $a \in I$ é inversível, então $a^{-1}a = 1 \in I$, e portanto $I = A$.

OBSERVAÇÃO (2). Se M é ideal maximal de A, então A/M é corpo.

DEFINIÇÃO. Seja A uma álgebra de Banach comutativa com unidade. Denota-se por:

i) Δ, conjunto do todos os homomorfismos complexos $\varphi : A \to \mathbb{C}$ não nulos;
ii) $\mathcal{M}$, conjuntos de todos os ideais maximais de A.

TEOREMA 0.0.3. *Seja A uma álgebra de Banach comutativa com unidade. Então todo ideal maximal de A é fechado.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja M um ideal maximal de A. Sejam $x, y \in \overline{M}$ e $a \in A$, então existem sequências $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ em M, nas quais convergem para x e y respectivamente. Logo $(x_n + y_n)_n$ é uma sequência em M que converge para $x + y$. E $(ax_n)_n$ é outra sequência em M convergente para ax. Portanto $\overline{M}$ é ideal de A.

Como visto anteriormente, M é ideal, então não possui elementos inversíveis, assim $M \cap U(A) = \emptyset$. Sendo $U(A)$ aberto, tem-se $U(A)$ e $\overline{M}$ disjuntos, e portanto $\overline{M} \subsetneq A$, e é ideal que contém M. Assim $M \subseteq \overline{M} \subsetneq A$, sendo M maximal, conclui-se $M = \overline{M}$, e portanto fechado. $\square$

TEOREMA 0.0.4. *Seja A uma álgebra de Banach comutativa com unidade. Então $\mathfrak{J} : \Delta \to \mathcal{M}$, definida como $\mathfrak{J}(h) = \ker h$, é um homomorfismo bijetivo.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $h \in \Delta$. Já é sabido que $\ker h$ é ideal de A, falta mostrar que é ideal maximal. Suponha $\ker h \subsetneq M_0 \subsetneq A$, com M_0 ideal de A. Seja $x \in M_0$ tal que $x \notin \ker h$.

$$h(h(x)\cdot 1 - x) = h(h(x)\cdot 1) - h(x) = h(x)\cdot h(1) - h(x\cdot 1) = h(x)\cdot h(1) - h(x)\cdot h(1) = 0$$

Então $h(x)\cdot 1 - x \in \ker h \subseteq M_0$, como $x \in M_0$, tem-se $h(x)\cdot 1 \in M_0$. Como $x \notin \ker h$, então $h(x) \neq 0$, logo conclui-se que $1 \in M_0$, assim $M_0 = A$, uma contradição. Portanto $\ker h$ é maximal. Assim $\mathfrak{J}$ está bem definida.

Como M é ideal maximal, então A/M é corpo. Seja $\varphi : A/M \to \mathbb{C}$, definida como $\varphi(a + M) = \varphi(\overline{a}) = \lambda_{\overline{a}}$, onde $\lambda_{\overline{a}} - a$ não é inversível. Então φ está bem definida, pois se $\gamma_{\overline{a}} = \varphi(a) = \lambda_{\overline{a}}$, então $\gamma_{\overline{a}} - a$ e $\lambda_{\overline{a}} - a$ não são inversíveis, ou seja, $\gamma_{\overline{a}} - a = 0 = \lambda_{\overline{a}} - a \Rightarrow \lambda_{\overline{a}} = \gamma_{\overline{a}}$. Portanto $\varphi(a+M) = \lambda_{\overline{a}}$, onde $\lambda_{\overline{a}}$ é o único escalar tal que $\lambda_{\overline{a}} - a$ não é inversível, e é fácil ver que φ é isomorfismo. Seja agora $\pi : A \to A/M, \pi(a) = a + M = \overline{a}$ a projeção de a em A/M. Defina $h : A \to \mathbb{C}$, como $h = \varphi \circ \pi$. Logo $h \in \Delta$. Como $\ker \pi = M$, e φ é bijeção, tem-se $\ker h = M$. Portanto $\mathfrak{J}$ é sobrejetora.

Sejam $f, g \in \Delta$, tais que $\mathfrak{J}(f) = \mathfrak{J}(g) \Rightarrow \ker f = \ker g$. Então se $a \in A$, $f(a)\cdot 1 - a \in \ker f = \ker g \Rightarrow g(f(a)\cdot 1 - a) = 0 \Rightarrow f(a) = g(a), \forall a \in A$. Logo $f = g$, e portanto $\mathfrak{J}$ é injetiva. □

Transformadas de Gelfand

Definição. Sejam A uma álgebra de Banach comutativa com unidade, e $a \in A$. Define-se a função $\widehat{a} : \Delta \to \mathbb{C}$, $\widehat{a}(\varphi) = \varphi(a)$, como a transformada de Gelfand em a.

Seja $(\widehat{a})_{a\in A}$ uma família de funções de Δ em $\mathbb{C}$. Considere τ a topologia mais grossa tal que cada função da sequência $(\widehat{a})_{a\in A}$ é contínua.

Definição. Seja A uma álgebra de Banach comutativa com unidade. A função

$$\begin{aligned} \Gamma : A &\to C(\Delta) \\ a &\mapsto \widehat{a} \end{aligned}$$

é chamada Transformada de Gelfand.

Teorema 0.0.5. *Seja A uma álgebra de Banach comutativa com unidade. Então a transformada de Gelfand $\Gamma : A \to C(\Delta)$ é homomorfismo complexo contínuo, e além disso,* $\|\Gamma\| = 1$.

Demonstração. Sejam $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \Gamma(a + \lambda b)(\varphi) = \widehat{a + \lambda b}(\varphi) = \varphi(a + \lambda b) = \varphi(a) + \lambda\varphi(b) = \\ = \widehat{a}(\varphi) + \lambda\widehat{b}(\varphi) = (\widehat{a} + \lambda\widehat{b})(\varphi) = (\Gamma(a) + \lambda\Gamma(b))(\varphi) \end{aligned}$$

$$\Gamma(a\cdot b)(\varphi) = \widehat{a\cdot b}(\varphi) = \varphi(a\cdot b) = \varphi(a)\cdot\varphi(b) = \widehat{a}(\varphi)\cdot\widehat{b}(\varphi) = \Gamma(a)(\varphi)\cdot\Gamma(b)(\varphi)$$

Portanto Γ é homomorfismo complexo.

Se $a \in A$ tem-se

$$\|\Gamma(a)\| = \|\widehat{a}\| = \sup_{\varphi\in\Delta} |\widehat{a}(\varphi)| = \sup_{\varphi\in\Delta} |\varphi(a)| \leq \|a\|$$

Portanto Γ é contínua. Como $\|\Gamma(1)\| = 1$, então $\|\Gamma\| = 1$ □

Para prosseguir o estudo de transformadas de Gelfand, deve entender um pouco sobre C^*-álgebras.

Definição. Seja A uma álgebra complexa. Define-se a função $* : A \to A$, que associa cada a em a^*, satisfazendo as seguintes propriedades

(1) $(a + \lambda b)^* = a^* + \overline{\lambda} b^*, \forall a, b \in A$ e $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, onde $\overline{\lambda}$ é o conjugado do número complexo λ;
(2) $(a \cdot b)^* = b^* \cdot a^*, \forall a, b \in A$;
(3) $(a^*)^* = a, \forall a \in A$.

Então A é dita uma álgebra com involução. Se $a \in A$ satisfaz

(1) $a^* = a$, então a é dito auto-adjunto;
(2) $a^* \cdot a = a \cdot a^*$, então a é dito normal;
(3) $a^* \cdot a = a \cdot a^* = 1$, então a é dito unitário.

Definição. Seja A uma álgebra de Banach com involução. Então A é dita C^*-álgebra se para todo $a \in A$

$$\|a \cdot a^*\| = \|a\|^2$$

Propriedades. Sejam A uma C^*-álgebra.

(1) $\|a^*\| = \|a\|, \forall a \in A$;
(2) Os elementos $1, a + a^*, i(a - a^*)$ e $a \cdot a^*$ são elementos auto-adjuntos;
(3) a é inversível se, e somente se, a^* é inversível, e neste caso, $(a^{-1})^* = (a^*)^{-1}$.

Demonstração. (1) Seja $a \in A$, então

$$\|a\|^2 = \|a \cdot a^*\| \leq \|a\| \cdot \|a^*\| \Rightarrow \|a\| \leq \|a^*\|$$

Então $\|(a^*)\| \leq \|(a^*)^*\| = \|a\|$.
Logo $\|a\| = \|a^*\|$

(2) $1 \cdot 1^* = 1 \cdot (1 \cdot 1)^* = 1 \cdot (1^* \cdot 1^*) = (1 \cdot 1^*) \cdot 1^*$, então 1^* é elemento identidade em A, como a identidade é única, então $1^* = 1$.

$$(a + a^*)^* = a^* + (a^*)^* = a^* + a = a + a^*$$

$$[i(a - a^*)]^* = \overline{i}(a^* - (a^*)^*) = -i(a^* - a) = i(a - a^*)$$

$$(a \cdot a^*)^* = a^* \cdot (a^*)^* = a^* \cdot a = a \cdot a^*$$

(3) Se a é inversível, então $a^* \cdot (a^{-1})^* = (a \cdot a^{-1})^* = 1^* = 1$, então a^* é inversível. Se a^* é inversível, então $1 = 1^* = [a^* \cdot (a^*)^{-1}]^* = (a^*)^* \cdot ((a^*)^{-1})^* = a \cdot ((a^*)^{-1})^*$, então a é inversível.

□

Exemplo. Seja $M_n(\mathbb{C})$ o conjunto de todas as matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$. Então $M_n(\mathbb{C})$ é uma álgebra complexa com a operação usual de multiplicação de matrizes. Existem muitas normas que fazem com que $M_n(\mathbb{C})$ seja uma álgebra normada. Uma norma importante de se considerar é

$$\|A\| = \sup_{v \in \mathbb{C}^n \text{ e } \|v\|_{Euc} \leq 1} \|A \cdot v\|_{Euc}$$

Sendo $\| \cdot \|_{Euc}$ a norma euclidiana conhecida.

Portanto $M_n(\mathbb{C})$ com a norma acima e involução $*$ sendo a operação conjugado, ou seja, $A^* = {a_{ij}}^* = \overline{a_{ij}} = \overline{A}$, é uma C^*-álgebra.

Exemplo. Seja a álgebra de Banach $C_0(X)$, e considere a involução de conjugação ponto a ponto, ou seja, $f^*(x) = \overline{f(x)}$. Então $C_0(X)$ com esta involução é uma C^*-álgebra.

Observação. Se A é uma álgebra complexa com involução, e se $a \in A$, então a pode ser escrito, de maneira única, da forma $a = u + iv$, onde $u, v \in A$ são auto-adjuntos.

Como u e v são auto-adjuntos, tem-se $a^* = u - iv$. Sim encontra-se

$$u = \frac{a + a^*}{2} \qquad v = \frac{a - a^*}{2}$$

Portanto se u e v são únicos que representam a, então eles possuem a forma acima. Como visto anteriormente, fica fácil ver que u e v dados pelas fórmulas acima, são auto-adjuntos, e portanto representam a na forma $u + iv$.

Proposição 0.0.6. *Seja A uma C^*-álgebra com unidade, $a \in A$ e seja $\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - a$ não é inversível$\}$. Se a é auto-adjunto, então $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja $x \in A$ auto-adjunto. Suponha que $x + i\,(= x + i \cdot 1)$ não seja inversível. Se multiplicar por um escalar, continua não inversível, então $-i(x+i) = i(-x-i)$ não é inversível. Para todo $\xi > 0$, $(\xi+1) \cdot 1_A - (\xi \cdot 1_A + ix) = 1_A - ix = i(-x-i)$ que não é inversível, então $\xi + 1 \in \sigma(\xi \cdot 1_A + ix)$. Então

$$|\xi + 1|^2 \leq \|\xi \cdot 1_A + ix\|^2 = \|(\xi \cdot 1_A + ix)^* \cdot (\xi \cdot 1_A + ix)\| = \|(\xi \cdot 1_A)^2 + x^2\| \leq \xi^2 + \|x\|^2$$

Logo, para todo $\xi > 0$, $2\xi + 1 \leq \|x\|^2$, que é um absurdo. Portanto se x é auto-adjunto, $x + i$ é inversível.

Agora, seja $a \in A$ auto-adjunto, e seja $\lambda \in \sigma(a)$. Então $\lambda \in \mathbb{C}$, logo existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\lambda = \alpha + i\beta$. Suponha $\beta \neq 0$, então

$$\lambda \cdot 1_A - a = \alpha \cdot 1_A - i\beta \cdot 1_A - a = \beta \left(\frac{\alpha \cdot 1_A - a}{\beta} + i \cdot 1_A \right)$$

É fácil ver que $\frac{\alpha \cdot 1_A - a}{\beta}$ é auto-adjunto, então, como provado acima, $\beta \left(\frac{\alpha \cdot 1_A - a}{\beta} + i \cdot 1_A \right)$ é inversível, mas $\lambda \cdot 1_A - a$, por hipótese, não é inversível, que leva a uma contradição, ou seja, $\beta = 0$. Conclui-se que $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$, se a é auto-adjunto. □

Teorema 0.0.7. *Seja A uma álgebra de Banach comutativa com unidade. Então para todo $a \in A$ tem-se $\sigma(a) = \{\varphi(a) : \varphi \in \Delta\}$.*

Demonstração. Seja $\lambda \in \sigma(a)$ e considere o conjunto $J_0 = (\lambda - a)A := \{(\lambda - a)b : b \in A\}$.Como A é comutativa, então J_0 é um ideal de A. Sendo que $\lambda - a$ não é inversível, então $1 \notin J_0$ de onde J_0. Usando o lema de Zorn, tome um ideal maximal próprio J contendo J_0, logo J também contém $\lambda - a$.

Como J é maximal, pelo Teorema 0.0.3, J é fechado. Seja $B = A/J$, isto é, o quociente de A por J. Colocando em B a norma quociente, ou seja, $\|a + J\| = \inf_{x \in J} \|a + x\|$, então B é uma álgebra de Banach comutativa.

Seja $b \in B$, e seja $\mu \in \sigma(b)$, ou seja, $\mu - b$ não é inversível. Como J é maximal, então B é corpo, logo todo elemento não nulo é inversível, logo $b = \mu = \mu \cdot 1$. Portanto $B = \mathbb{C} \cdot 1$.

Assim, como $B = \mathbb{C}$, a projeção $\pi : A \to A/J = \mathbb{C}$ é um homomorfismo complexo, ou seja, um elemento de Δ. Tendo $\lambda - a \in J = \ker \pi$ tem-se que $\pi(a) = \lambda$. Segue que $\sigma(a) = \{\varphi(a) : \varphi \in \Delta\}$. $\square$

Teorema 0.0.8. *Seja A uma C^*-álgebra com unidade, e seja $\varphi : A \to \mathbb{C}$ um homomorfismo complexo. Então, para todo $a \in A$*

$$\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$$

Demostração. Supondo primeiro que a é elemento auto-adjunto, pelos Teoremas 0.0.7 e 0.0.6, $\varphi(a) \in \sigma(a)$ então $\varphi(a) \in \mathbb{R}$. Logo $\varphi(a^*) = \varphi(a) = \overline{\varphi(a)}$.

Generalizando, pela observação anterior, existem unicos $u, v \in A$ auto-adjuntos tais que $a = u + iv$, então

$$\varphi(a^*) = \varphi((u + iv)^*) = \varphi(u - iv) = \varphi(u) - i\varphi(v) = \overline{\varphi(u) + i\varphi(v)} = \overline{\varphi(a)}$$

$\square$

Teorema 0.0.9. *Seja A uma C^*-álgebra comutativa com unidade. Então a transformada de Gelfand $\Gamma : A \to C(\Delta)$ preserva involução e norma, ou seja, valem as igualdades $\Gamma(a^*) = \Gamma(a)^*$ e $\|\Gamma(a)\| = \|a\|$ para todo $a \in A$.*

Demonstração. Seja $a \in A$ auto-adjunto. Observando a demonstração do Teorema 0.0.8, $\varphi(a) \in \mathbb{R}$, para todo $\varphi \in \Delta$, logo a função $\widehat{a}$ assume apenas valores reais, ou seja, $\widehat{a}^* = \widehat{a}$, ou melhor $\Gamma(a^*) = \Gamma(a)$, assim $\widehat{a}$ é elemento auto-adjunto em $C(\Delta)$.

Generalizando, se $a \in A$, então existem $u, v \in A$ auto-adjuntos tais que $a = u + iv$, então

$$\Gamma(a)^* = \Gamma(u + iv)^* = \Gamma(u)^* - i\Gamma(v) = \Gamma(u) - i\Gamma(v) = \Gamma(u - iv) = \Gamma(u^* - iv^*) = \Gamma(a^*)$$

Portanto Γ preserva involução.

Seja $a \in A$. Como A é comutativo, encontra-se pelo Teorema 0.0.14 (ver Apêndice), que $\|a\| = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|$.

$$\|\Gamma(a)\| = \|\widehat{a}\| = \sup_{\varphi\in\Delta} |\varphi(a)| = \sup_{\lambda\in\sigma(a)} |\lambda| = \|a\|$$

Logo Γ preserva norma. $\square$

TEOREMA 0.0.10 (Gelfand-Naimark). *Seja A uma C^*-álgebra comutativa com unidade. Então a transformada de Gelfand $\Gamma : A \to C(\Delta)$ é um isomorfismo isométrico.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $a \in A$, pelo Teorema 0.0.9, Γ preserva norma, então Γ é isométrico. Sejam $a, b \in A$, tal que $\Gamma(a) = \Gamma(b) \Rightarrow \widehat{a} = \widehat{b} \Rightarrow \widehat{a}(\varphi) = \widehat{b}(\varphi), \forall\varphi \in \Delta \Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b), \forall\varphi \in \Delta \Rightarrow a = b$, logo Γ é injetora.

Agora observe que $\Gamma(A)$ é subálgebra de $C(\Delta)$ e é fechada para a involução, também pelo Teorema 0.0.9 com unidade igual a $\widehat{1}$.

Sejam $\varphi, \psi \in \Delta$ distintos. Portanto existe $a \in A$ tal que $\varphi(a) \neq \psi(a)$, ou seja, $\widehat{a}(\varphi) \neq \psi(a)$, e assim $\Gamma(A)$ preserva pontos. Pelo Teorema de Stone-Weierstrass (ver Apêndice), tem-se que $\Gamma(A)$ é denso em $C(\Delta)$, ou seja, $\Gamma(A) = C(\Delta)$.

Conclui-se que atransformada de Gelfand Γ é um isomorfismo isométrico. $\square$

Apêndice

TEOREMA 0.0.11. *Se $a \in A$ é inversível e $\|a - b\| < \|a^{-1}\|^{-1}$, então b também é inversível e*

$$b^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}(a-b))^n a^{-1}$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $x = a^{-1}(a - b)$ e observe que $b = a(1 - x)$. Para provar que b é inversível, basta provar que $1 - x$ é inversível. Observando que por hipótese

$$\| \; \| \leq \|a^{-1}\| \cdot \|a - b\| < \|a^{-1}\| \cdot \|a^{-1}\|^{-1} = 1$$

tem-se que a série infinita $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ é absolutamente convergente (e portanto convergente pois A é espaço de Banach). Seja y a sua soma. Então

$$(1 - x)y = (1 - x)\left(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N}\right) = \lim_{N\to\infty} 1 - x^{N+1} = 1$$

já que $\|x^{N+1}\| \leq \|x\|^{N+1} \to 0$, quando $N \to \infty$. Verificando por meios similares que também $y(1 - x) = 1$, conclui-se que y é o inverso de $1 - x$ como desejado. Segue-se que

$$b^{-1} = (1 - x)^{-1}a^{-1} = ya^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n a^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}(a - b))^n a^{-1}$$

$\square$

TEOREMA 0.0.12. *Se $x \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ é tal que $|\lambda| > \|x\|$ então $\lambda - x$ é inversível e*

$$(\lambda - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x^n$$

DEMONSTRAÇÃO. Pondo $a = \lambda$ e $b = \lambda - x$, note que

$$\|a - b\| = \|x\| < \|\lambda\| = \|\lambda^{-1}\|^{-1}$$

O resultado segue imediatamente o Teorema 0.0.11. $\square$

TEOREMA 0.0.13. *Dado $a \in A$, seja $r(a) = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|$. Então*

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\lambda \in \sigma(a)$. Dado $n \in \mathbb{N}$, então

$$\lambda^n - a^n = (\lambda - a)(\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}a + \cdots + \lambda a^{n-2} + a^{n-1}) = (\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}a + \cdots + \lambda a^{n-2} + a^{n-1})(\lambda - a)$$

e portanto $\lambda^n - a^n$ não é inversível (se o fosse $\lambda - a$ também seria). Segue portanto que $\lambda^n \in \sigma(a^n)$ de onde $|\lambda^n| \leq \|a^n\|$ pelo Teorema 0.0.12 ou, equivalentemente, $|\lambda| \leq \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Tomando o supremo para $\lambda \in \sigma(a)$ e o ínfimo para $n \in \mathbb{N}$ conclui-se que $r(a) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Dado λ com $|\lambda| > r(a)$, é fácil ver que $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n}a^n$ converge e, em particular, $\lim_{n\to\infty} \lambda^{-n}a^n = 0$. Portanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$ tem-se $\|\lambda^{-n}a^n\| < 1$, ou seja

$$\|a^n\|^{\frac{1}{n}} < |\lambda|$$

Tomando o limite superior em n e o ínfimo para $||\lambda| > r(a)$, conclui-se que

$$\lim_{n\to\infty} \sup \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(a)$$

Resultando em

$$\lim_{n\to\infty} \sup \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(a) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \leq \lim_{n\to\infty} \inf_{n\in\mathbb{N}}$$

Concluindo o resultado. $\square$

TEOREMA 0.0.14. *Sejam A uma C^*-álgebra com unidade e $a \in A$ um elemento auto-adjunto. Então $r(a) = \|a\|$.*

DEMONSTRAÇÃO. Note que $\|a\|^2 = \|a^*a\| = \|a^2\|$ de onde, por indução finita, encontra-se $\|a\|^{2n} = \|a^{2n}\|$. Pelo Teorema 0.0.13, segue que

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^{2n}\|^{\frac{1}{2^{2n}}} = \|a\|$$

$\square$

TEOREMA 0.0.15 (Stone-Weierstrass). *Seja X um espaço compacto de Hausdorff, seja ainda $A \subseteq C(X)$ uma subálgebra fechada com a topologia da norma, tal que A seja fechado para involução, isto é, $f^* \in A$ sempre que $f \in A$, e que possua a unidade, ou seja, $1 \in A$. Se A separa pontos, isto é, para todos $x, y \in X$ distintos, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$, então A é um subconjunto denso em $C(X)$ na topologia da norma.*

A demonstração deste Teorema pode ser encontrada na referência [8].

Referências

[1] Exel, Ruy. UMA INTRODUÇÃO AS C^*-ÁLGEBRAS. Universidade Federal de Santa Catarina.

[2] Germano, Geilson F. Uma Introdução a Álgebras de Banach e C^*-álgebras. Universidade Federal da Paraíba. 2014.

[3] Pellegrini, Leonardo. Notas de Aula. Espaços de Banach IME-USP. 2011.

[4] Petrakis, Sifis. INTRODUCTION TO BANACH ALGEBRAS AND THE GELFAND-NAIMARK THEOREMS. ARISTOTLE UNIVERSITY OF THESSALONIKI. 2008.

[5] Bell, Jordan. The Gelfand transform, positive linear functionals, and positive-definite functions. University of Toronto. 2015.

[6] Grilliette, Will. Connecting Topology and Analysis The Gelfand Transform. Texas State University. 2017.

[7] Barata, JCA. Espaços Métricos. IF-USP.

[8] Lopes, Wanda A. O Teorema de Stone-Weierstrass e Aplicações. Universidade Federal de Uberlândia, 2009

[9] Wolfram Math World. Disponível em: <https://mathworld.wolfram.com/GelfandTransform.h Acesso em 2020-09-04.

[10] Remling, Christian. Commutative Banach algebras. University of Oklahoma.

[11] Santos, José C. Introdução à Topologia. Universidade do Porto. 2017.