Anéis de Jacobson

Ricardo Felipe Rosada Canesin

Neste material, abordaremos as propriedades básicas dos anéis de Jacobson. Nosso objetivo principal será provar uma generalização do Nullstellensatz de Hilbert (Teorema 4), mas também veremos outros resultados caracterizando tais anéis usando a localização e a topologia de Zariski, por exemplo. No final, comentaremos rapidamente sobre outro tópico relacionado a esse assunto.

1. Definição e exemplos

Para motivar a definição, relembremos duas versões do Nullstellensatz de Hilbert:

Teorema 1. Sejam k e K corpos. Se K é uma k-álgebra de tipo finito (isto é, finitamente gerada como k-álgebra), então K é uma k-álgebra finita (ou seja, finitamente gerada como k-módulo).

Teorema 2. Sejam k um corpo e I um ideal de uma k-álgebra R de tipo finito. Então o radical de I é a interseção de todos os ideais maximais de R que contêm I.

Esses Teoremas nos trazem alguns questionamentos: quais são os anéis que satisfazem as condições acima e quais são suas propriedades? Assim, fazemos a seguinte definição:

Definição 1. Seja R um anel. Dizemos que R é um *anel de Jacobson* se todo ideal radical de R é a interseção dos ideais maximais que o contêm.

Antes de prosseguir, compare o Teorema 2 com o Corolário 3 e o Teorema 1 com o Teorema 4. Como um pequeno exercício, tente ver como os resultados que provaremos aqui implicam as versões apontadas do Nullstellensatz de Hilbert.

Essa motivação através do Nullstellensatz até fez com que Oscar Goldman batizasse essa classe de anéis como "anéis de Hilbert", em seu artigo de 1951 ([1]). Porém, o nome que se estabeleceu foi dado por Wolfgang Krull, que estudou tais anéis independentemente de Goldman e na mesma época ([2]). O nome "Jacobson" é devido à relação desses anéis com o radical de Jacobson, que é a interseção dos ideais maximais num anel.

Para facilitar posteriormente, antes de dar exemplos, trazemos algumas equivalências da definição:

Lema 1. Seja R um anel. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) R é de Jacobson.

(ii) Todo ideal primo de R é a interseção dos ideais maximais que o contêm.

(iii) Para todo domínio de integridade R' que é imagem homomorfa de R, a interseção de seus ideais maximais é nula.

Demonstração. (i) $\implies$ (ii). Como todo ideal primo é radical, é imediato.

(ii) $\implies$ (i). Como todo ideal radical $I \subseteq R$ é a interseção dos ideais primos que o contêm, temos que:

$$I = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \\ \mathfrak{p} \supseteq I}} \mathfrak{p} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \\ \mathfrak{p} \supseteq I}} \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R \\ \mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{p}}} \mathfrak{m} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R \\ \mathfrak{m} \supseteq I}} \mathfrak{m},$$

ou seja, R é de Jacobson.

(ii) $\iff$ (iii). Lembre que toda imagem homomorfa de R é isomorfa a algum quociente de R. Em particular, um domínio de integridade que é imagem homomorfa de R é isomorfo a um quociente de R por um ideal primo. Pelo Teorema da Correspondência (que também preserva interseções), (ii) e (iii) são equivalentes. ■

Em alguns casos, usaremos livremente e sem menção o Lema 1, especialmente a caracterização (ii).

Como exemplo mais simples, observe que qualquer corpo é de Jacobson (se você fez o pequeno exercício do começo, você já deveria saber!). Todo anel Booleano também é de Jacobson, já que todo ideal primo é maximal. O mesmo argumento diz, mais geralmente, que qualquer anel de dimensão 0 é de Jacobson. Podemos estender este resultado para domínios de dimensão 1 sob algumas condições:

Proposição 1. Seja R um domínio de integridade de dimensão 1. Suponha que todo elemento não nulo de R pertence a apenas um número finito de ideais maximais. Então R é de Jacobson se e só se $\operatorname{Specm} R$ é infinito.

Demonstração. Se $\operatorname{Specm} R$ é finito, então podemos formar o produto de todos os ideais maximais. Note que esse é um ideal não nulo, já que R é domínio e (0) não é maximal. Segue então que a interseção de todos os ideias maximais é não nula (já que contém o produto deles). Isso nos diz que R não é de Jacobson, porque o ideal (0) é primo e não é a interseção dos ideais maximais que o contêm.

Reciprocamente, se $\operatorname{Specm} R$ é infinito, pela suposição do enunciado, a interseção de todos os ideais maximais é (0). Por outro lado, pela hipótese da dimensão, todo ideal primo não nulo é maximal e, trivialmente, é a interseção dos ideais maximais que o contêm. Concluímos que R é de Jacobson. ■

Observe que, sob as hipóteses da Proposição, a demonstração nos diz que $\operatorname{Specm} R$ é infinito se e só se o radical de Jacobson de R é nulo.

A suposição de que todo elemento não nulo pertence a apenas um número finito de ideais maximais não é tão restritiva quanto parece. Por exemplo, se R é Noetheriano e $x \in R$ é não nulo, podemos considerar a coleção de todos os ideais primos que contém x. Essa coleção tem uma quantidade finita de elementos minimais, mas, como R é domínio e $\dim R = 1$, então cada um desses ideais é maximal. Dessa forma, conseguimos concluir que um DIP (domínio de ideais principais) é de Jacobson se e só se contém infinitos elementos irredutíveis. Por exemplo, $\mathbb{Z}$ e qualquer anel de polinômios sobre um corpo são de Jacobson (para ver que o anel de polinômios tem infinitos elementos irredutíveis, adapte a prova de Euclides da infinitude dos primos em $\mathbb{Z}$).

Há outras formas de se obter novos anéis de Jacobson. Se R é de Jacobson e I é ideal de R, todo domínio que é imagem homomorfa de R/I também é imagem homomorfa de R, de onde obtemos pelo Lema 1 que R/I também é de Jacobson. Uma outra forma de ver esse resultado é usando o Teorema da Correspondência, que preserva ideais primos e maximais e também preserva interseções de ideais.

Ainda não temos ferramentas suficientes para apresentar novos anéis de Jacobson. Mas, nas próximas seções, veremos que, se R é de Jacobson e $f \in R$, então a localização R_f e o anel de polinômios $R[x]$ também são. Juntando esses resultados, já obtemos uma ampla gama de exemplos.

Posteriormente, veremos como anéis de Jacobson se comportam em extensões integrais e, como resultado, conseguiremos provar o Teorema 4, a generalização do Nullstellensatz de Hilbert.

2. Localização

Vamos relembrar um resultado importante sobre localizações. Seja R um anel e $S \subseteq R$ um subconjunto multiplicativamente fechado. Podemos definir o mapa de localização $\rho : R \to S^{-1}R$ que leva um elemento $r \in R$ em $r/1 \in S^{-1}R$. Isso induz um mapa entre espectros $\operatorname{Spec}\rho : \operatorname{Spec} S^{-1}R \to \operatorname{Spec} R$ que leva um ideal primo de $S^{-1}R$ em sua pré-imagem através de ρ. Recorde que $\operatorname{Spec}\rho$ é injetor com imagem

$$D(S) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}.$$

Além disso, a inversa $D(S) \to \operatorname{Spec} S^{-1}R$ leva um ideal primo $\mathfrak{p}$ de $D(S)$ em sua localização $S^{-1}\mathfrak{p}$. Observe que essa correspondência preserva inclusões.

Algo importante que utilizaremos é que a localização também preserva a interseção de primos em $D(S)$. De fato, relembre que, se $\mathfrak{p} \in D(S)$, então um elemento $r/s \in S^{-1}R$ está em $S^{-1}\mathfrak{p}$ se e só se $r \in \mathfrak{p}$. Com isso, se I é um conjunto de índices e $\{\mathfrak{p}_i\}_{i\in I}$ é uma família de elementos de $D(S)$, segue que

$$\frac{r}{s} \in \bigcap_{i\in I} S^{-1}\mathfrak{p}_i \iff r \in \bigcap_{i\in I} \mathfrak{p}_i \iff \frac{r}{s} \in S^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} \mathfrak{p}_i\right),$$

ou seja,

$$S^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} \mathfrak{p}_i\right) = \bigcap_{i\in I} S^{-1}\mathfrak{p}_i,$$

como desejado.

Nesse contexto, surgem duas perguntas pertinentes:

(1) Se R é de Jacobson, então $S^{-1}R$ também é?

(2) A correspondência acima preserva ideais maximais?

No caso de quocientes, o Teorema da Correspondência nos dá uma bijeção parecida que preserva inclusões/interseções e as perguntas análogas para esse caso têm ambas resposta afirmativa. Infelizmente, a resposta de (1) e (2) é não. Vamos mostrar com um exemplo.

Observe que um anel local é de Jacobson se e só se possui apenas um único ideal primo (que é o ideal maximal), porque essa é única forma de satisfazer a condição (ii) do Lema 1. Ademais, localizar um anel por um ideal primo $\mathfrak{p}$ (isto é, tomamos $S = R \setminus \mathfrak{p}$) nos retorna um anel local cujo único ideal maximal é a localização de $\mathfrak{p}$. Com essa ideia, é relativamente fácil produzir localizações que não são anéis de Jacobson e cuja correspondência entre ideais primos não preserva ideais maximais.

Por exemplo, vimos que $\mathbb{Z}$ é de Jacobson na primeira seção, mas a localização de $\mathbb{Z}$ por um ideal primo (p) possui dois ideais primos: o ideal nulo e a localização de (p). A discussão acima nos diz que essa localização não é de Jacobson e, portanto, (1) tem resposta negativa. Para (2), tome $R = k[x, y]$ com k corpo e considere o ideal primo $\mathfrak{p} = (x)$. Segue que $\mathfrak{p}$ corresponde a um ideal maximal em $R_\mathfrak{p}$ como vimos acima, mas $\mathfrak{p}$ não é maximal em R. Isso implica que a resposta para (2) é não, mesmo R sendo de Jacobson (isso seguirá do Corolário 3).

Felizmente, há um caso onde a resposta para (1) e (2) é sim. Dado $f \in R$, tome S como sendo o conjunto das potências de f. Tudo funciona para a localização R_f de R por S! Antes de provarmos isso, introduziremos uma notação. Nesse caso, o conjunto $D(S)$ da correspondência é precisamente

$$D(f) \coloneqq \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid f \notin \mathfrak{p}\},$$

já que estamos lidando com ideais primos. Além disso, denotaremos a localização de um ideal primo $\mathfrak{p}$ por $\mathfrak{p}R_f$. Estamos prontos:

Proposição 2. Sejam R um anel de Jacobson e $f \in R$. Então R_f é de Jacobson e o mapa de localização $\rho : R \to R_f$ induz uma bijeção entre os ideais maximais de R_f e os ideais maximais de R que não contêm f.

Demonstração. Vamos começar mostrando a bijeção entre os ideais maximais. Como a correspondência discutida no começo da seção preserva inclusões, ela estabelece uma bijeção entre os ideais maximais de R_f e os elementos maximais em $D(f)$ com respeito à inclusão. Note que esses elementos maximais de $D(f)$ não precisam ser, a princípio, ideais maximais de R, como no exemplo acima. No nosso caso, eles de fato serão ideais maximais por causa da hipótese de que R é de Jacobson. Com efeito, seja $\mathfrak{p}$ um elemento maximal de $D(f)$ com respeito à inclusão. Como R é de Jacobson,

$$\mathfrak{p} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R \\ \mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{p}}} \mathfrak{m}.$$

Assim, já que $f \notin \mathfrak{p}$, existe um ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R que contém $\mathfrak{p}$, mas não contém f. Portanto, $\mathfrak{m} \in D(f)$ e, da maximalidade de $\mathfrak{p}$, concluímos que $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ é ideal maximal.

Agora, vejamos que R_f também é de Jacobson. Seja $\mathfrak{p}R_f \in \operatorname{Spec} R_f$, localização de um ideal primo $\mathfrak{p} \in D(f)$. Sendo R anel de Jacobson, $\mathfrak{p}$ é a interseção dos ideais maximais que o contém. Não podemos imediatamente usar que a localização preserva interseções, uma vez que algum desses ideais maximais eventualmente pode não estar em $D(f)$. Vamos mostrar que podemos retirar os ideais que atrapalham:

$$\mathfrak{p} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R \\ \mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{p},\ f \notin \mathfrak{m}}} \mathfrak{m}.$$

A inclusão ($\subseteq$) é imediata. Para a outra, veja que, se g está na interseção acima, então fg está em

$$\bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R \\ \mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{p},\ f \notin \mathfrak{m}}} \mathfrak{m} \quad \cap \quad \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R \\ f \in \mathfrak{m}}} \mathfrak{m} \quad \subseteq \quad \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R \\ \mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{p}}} \mathfrak{m} = \mathfrak{p}$$

e, como $\mathfrak{p}$ é ideal primo que não contém f, temos que $g \in \mathfrak{p}$. Com isso, agora podemos aplicar que a correspondência da observação inicial preserva interseções:

$$\mathfrak{p}R_f = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R \\ \mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{p},\ f \notin \mathfrak{m}}} \mathfrak{m}R_f \quad = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m}' \in \operatorname{Specm} R_f \\ \mathfrak{m}' \supseteq \mathfrak{p}R_f}} \mathfrak{m}'.$$

A última igualdade decorre da bijeção que estabelecemos entre os ideais maximais de R_f e os ideais maximais de R que não contém f. Pelo item (ii) do Lema 1, R_f é anel de Jacobson. ■

Na próxima seção, veremos que o fato de R_f ser de Jacobson está relacionado com o fato de $D(f)$ ser aberto de $\operatorname{Spec} R$ na topologia de Zariski.

Também podemos dar uma nova caracterização através da localização:

Proposição 3. Um anel R é de Jacobson se e somente se, para todo ideal primo $\mathfrak{p} \subseteq R$ e $f \notin \mathfrak{p}$, vale

$$\mathfrak{p}R_f \text{ é maximal} \implies \mathfrak{p} \text{ é maximal}.$$

Demonstração. A ida segue da Proposição 2 através da bijeção entre os ideais maximais de R_f e os ideais maximais de R que não contém f.

Vamos provar a volta. Suponha que a propriedade do enunciado esteja satisfeita. Seja I um ideal radical de R. A inclusão

$$I \subseteq \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R \\ \mathfrak{m} \supseteq I}} \mathfrak{m}$$

é imediata. Agora, seja $f \in R$ tal que $f \notin I$. Mostremos que existe um ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R que contém I mas não contém f, o que prova a inclusão contrária. Como I é radical, nenhuma potência de f está em I, implicando que $(R/I)_{\overline{f}}$ não é nulo e, assim, existe um ideal maximal $\mathfrak{n}$ em $(R/I)_{\overline{f}}$. Ele corresponde a um ideal primo $\mathfrak{m}/I$ de R/I não contendo $\overline{f}$ que, por sua vez, corresponde a um ideal primo $\mathfrak{m}$ de R que contém I mas não contém f.

A fim de aplicar a propriedade do enunciado, mostraremos que $\mathfrak{m}R_f$ é maximal, o que nos dará que $\mathfrak{m}$ é maximal, como queremos. Como $f \notin \mathfrak{m}$, vemos que $\mathfrak{m}R_f$ é ideal primo de R_f. Dessa foram, ele está contido no ideal maximal $\mathfrak{m}'R_f$, localização de um ideal primo $\mathfrak{m}'$ de R que contém $\mathfrak{m}$, mas não contém f. Projetando em R/I, $\mathfrak{m}'/I$ é ideal primo que contém $\mathfrak{m}/I$, mas não contém $\overline{f}$. Pela maximalidade de $\mathfrak{n}$ e pela correspondência entre os ideais primos de um anel e os ideais primos de sua localização, devemos ter que $\mathfrak{m}/I = \mathfrak{m}'/I$. Por fim, concluímos que $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}'$ e, portanto, $\mathfrak{m}R_f = \mathfrak{m}'R_f$ é maximal. ■

3. Topologia de Zariski

Sempre podemos munir o espectro de um anel da topologia de Zariski. Mostraremos que há uma nova caracterização para anéis de Jacobson usando essa topologia. Como aplicação, veremos outra demonstração (com uma notação menos carregada de interseções) de que se R é de Jacobson e $f \in R$ então R_f é de Jacobson. Antes, algumas definições:

Definição 2. Sejam X um espaço topológico e $Y \subseteq X$ um subconjunto.

(i) Chamamos Y de *localmente fechado* se Y é a interseção de um aberto com um fechado; equivalentemente, se Y é aberto no seu fecho $\overline{Y}$; equivalentemente, se Y é fechado num aberto que o contém.

(ii) Chamamos Y de *muito denso* se Y intersecta todo subconjunto localmente fechado não vazio de X.

(iii) Dizemos que X é *de Jacobson* se o seu conjunto de pontos fechados é muito denso.

Como é de se esperar pela nomenclatura acima, temos o seguinte resultado:

Proposição 4. Sejam R um anel, $X := \operatorname{Spec} R$ munido da topologia de Zariski e X_0 o conjunto de pontos fechados de X. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) R é de Jacobson.

(ii) X é de Jacobson.

(iii) Se $x \in X$ é um ponto tal que $\{x\}$ é localmente fechado, então $x \in X_0$.

Demonstração. (i) $\implies$ (ii). Lembre que, se $\mathfrak{p} \in X$, então

$$\overline{\{\mathfrak{p}\}} = V(\mathfrak{p})$$

e, assim,

$$\mathfrak{p} \in X_0 \iff \mathfrak{p} \text{ é maximal.}$$

Logo, devemos mostrar que o conjunto dos ideais maximais intersecta qualquer subconjunto localmente fechado não vazio de X. Como os fechados em X são da forma $V(I)$, com I ideal de R, temos que um subconjunto localmente fechado Y é da forma

$$Y = V(I) \cap (X \setminus V(J)),$$

com I e J ideais de R. Se $Y \neq \emptyset$, existe um ideal primo $\mathfrak{p}$ tal que

$$\mathfrak{p} \supseteq I \text{ e } \mathfrak{p} \not\supseteq J.$$

Como R é de Jacobson, vale que

$$\mathfrak{p} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R \\ \mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{p}}} \mathfrak{m}$$

e, portanto, existe um ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R que contém $\mathfrak{p}$ e, consequentemente, contém I, mas não contém J. Segue que $\mathfrak{m} \in Y$ e $X_0 \cap Y \neq \emptyset$. Isso mostra que X_0 é muito denso e concluímos que X é de Jacobson.

(ii) $\implies$ (iii). Se $\{x\}$ é localmente fechado, então esse conjunto intersecta X_0, pois X é de Jacobson. Logo, devemos ter que $x \in X_0$.

(iii) $\implies$ (i). Vamos utilizar a Proposição 3. Sejam $\mathfrak{p} \in X$ e $f \notin \mathfrak{p}$ quaisquer. Relembre/verifique que a correspondência entre $D(f)$ e $\operatorname{Spec} R_f$ comentada na seção anterior é também um homeomorfismo, se consideramos esses conjuntos munidos da topologia de Zariski. Com isso, se $\mathfrak{p}R_f$ é maximal, segue que $\mathfrak{p}R_f$ é ponto fechado de $\operatorname{Spec} R_f$ e, pelo homeomorfismo, $\mathfrak{p}$ é ponto fechado de $D(f)$. Por outro lado, $D(f)$ é aberto de X, de onde obtemos que $\{\mathfrak{p}\}$ é localmente fechado. Pela hipótese, temos que $\mathfrak{p} \in X_0$, ou seja, $\mathfrak{p}$ é maximal. Pela Proposição 3, R é de Jacobson. ■

É interessante ressaltar que podemos dar uma demonstração direta de (ii) $\implies$ (i) sem a Proposição 3. De fato, se X é de Jacobson, para mostrar que R é de Jacobson, basta verificarmos que, se $\mathfrak{p}$ é ideal primo de R, então

$$\mathfrak{p} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R \\ \mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{p}}} \mathfrak{m}.$$

A inclusão ($\subseteq$) é imediata. Para a outra, seja $f \notin \mathfrak{p}$ e mostremos que há um ideal maximal de R que contém $\mathfrak{p}$ e não contém f. Note que $V(\mathfrak{p}) \cap D(f)$ é um subconjunto localmente fechado de X que contém $\mathfrak{p}$. Logo, como X é de Jacobson, existe $\mathfrak{m}$ maximal em $V(\mathfrak{p}) \cap D(f)$, como queríamos.

O item (iii) parece um pouco deslocado. Resolvemos colocá-lo pois, além de ser uma aplicação da Proposição 3, é a versão geométrica da seguinte caracterização:

Proposição 5. Um anel R é de Jacobson se e somente se todo ideal primo não maximal de R é a interseção dos ideais primos que o contêm propriamente.

Essa nova caracterização é, de certa forma, bastante interessante, já que nos diz que, se todo ideal primo não maximal é a interseção dos primos que o contêm propriamente, então podemos considerar nessa interseção apenas os ideais maximais, não há diferença no final.

Demonstração. Pela Proposição 4, basta provarmos que o item (iii) dessa Proposição e a propriedade acima são equivalentes, como comentado acima. É possível dar uma prova um pouco mais curta, mas procederemos desse jeito para realçar que um resultado é a versão geométrica do outro.

Primeiramente, suponha que (iii) vale e, dado $\mathfrak{p}$ ideal primo não maximal de R, mostremos que

$$\mathfrak{p} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R \\ \mathfrak{q} \supsetneq \mathfrak{p}}} \mathfrak{q}.$$

Como sempre, a inclusão ($\subseteq$) é imediata. Para a outra, seja $f \notin \mathfrak{p}$ e mostremos que há um ideal primo de R que contém estritamente $\mathfrak{p}$ e não contém f. Como $\mathfrak{p}$ não é maximal, $\{\mathfrak{p}\}$

não é fechado e, por (iii), segue que esse conjunto não é localmente fechado. Portanto, o conjunto $V(\mathfrak{p}) \cap D(f)$, que é localmente fechado, não pode consistir apenas do ponto $\mathfrak{p}$, ou seja, existe um ideal primo $\mathfrak{q}$ que contém $\mathfrak{p}$ estritamente e não contém f, como queríamos.

Para a outra implicação, suponha que R tenha a propriedade acima. Seja $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ tal que $\{\mathfrak{p}\}$ não é fechado. Assim, $\mathfrak{p}$ não é maximal e, por hipótese, é a interseção dos ideais primos que o contêm estritamente. Com isso, se I e J são ideais de R tais que $I \subseteq \mathfrak{p}$ e $J \not\subseteq \mathfrak{p}$, segue que existe um ideal primo contendo $\mathfrak{p}$ estritamente (e, consequentemente, contendo I) que não contém J. Como todo conjunto localmente fechado de $\operatorname{Spec} R$ é da forma $V(I) \cap (\operatorname{Spec} R \setminus V(J))$, isso nos diz que qualquer conjunto localmente fechado que contém $\mathfrak{p}$ deve conter ao menos mais um outro ponto. Em particular, $\{\mathfrak{p}\}$ não é localmente fechado, provando (iii). ■

Como prometido, a Proposição 4 nos permite dar uma outra prova para o fato de que, se R é de Jacobson e $f \in R$, então R_f é de Jacobson (primeira metade da Proposição 2):

Lema 2. Sejam X um espaço topológico e $Y \subseteq X$ um subespaço. Se X é de Jacobson e Y é aberto, fechado ou localmente fechado, então Y é de Jacobson.

Demonstração. Seja Z um subconjunto localmente fechado de Y. Note que, como Y é aberto, fechado ou localmente fechado, Z também é subconjunto localmente fechado de X. Assim, se $Z \neq \emptyset$, há um ponto fechado de X em Z. Por estar em Y, tal ponto é ponto fechado de Y também. Concluímos que o conjunto dos pontos fechados de Y intersecta qualquer subconjunto localmente fechado não vazio de Y, ou seja, Y é de Jacobson. ■

Corolário 1. Se R é um anel de Jacobson e $f \in R$, então R_f é de Jacobson.

Demonstração. Como observado na demonstração da Proposição 4, $\operatorname{Spec} R_f$ é homeomorfo a $D(f)$. Por essa Proposição, $\operatorname{Spec} R$ é de Jacobson e, pelo Lema 2, como $D(f)$ é aberto de $\operatorname{Spec} R$, vemos que $D(f)$ também é de Jacobson. Concluímos que $\operatorname{Spec} R_f$ é de Jacobson e, novamente pela Proposição 4, R_f é de Jacobson. ■

Note que um dos ponto cruciais da demonstração acima é o fato de $D(f)$ ser aberto. O mesmo argumento não funciona para outras localizações porque nem sempre $D(S)$ é aberto em $\operatorname{Spec} R$ para um subconjunto multiplicativamente fechado S qualquer.

4. Extensões integrais

Começamos com um lembrete:

Lema 3. Seja $R \subseteq R'$ uma extensão integral de anéis. Então,

(i) dado $\mathfrak{p}$ ideal primo de R, existe um ideal primo $\mathfrak{p}'$ de R' tal que $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap R$.

(ii) se R e R' são domínios e I é ideal de R', vale que

$$I \cap R = 0 \iff I = 0.$$

(iii) se R e R' são domínios, então

$$R \text{ é corpo} \iff R' \text{ é corpo.}$$

(iv) se $\mathfrak{p}'$ é ideal primo de R', vale que

$$\mathfrak{p}' \text{ é ideal maximal de } R' \iff \mathfrak{p}' \cap R \text{ é ideal maximal de } R.$$

Demonstração. (i). Essa é a propriedade de "Lying Over" para extensões integrais, cuja prova omitimos.

(ii). Seja I ideal de R' tal que $I \cap R = 0$. Mostremos que $I = 0$. Suponha que existe $i \in I$ com $i \neq 0$. Seja

$$p(x) = x^n + r_{n-1}x^{n-1} + \cdots + r_1 x + r_0 \in R[x]$$

de grau mínimo tal que $p(i) = 0$. Dessa forma, como I é ideal de R', vemos que $r_0 \in I \cap R$ e, assim, $r_0 = 0$. Mas, como R' é domínio e $i \neq 0$, podemos então cancelar i da equação $p(i) = 0$, contrariando a minimalidade de p. Portanto, $I = 0$.

(iii). Inicialmente, suponha que R é corpo e tome $\mathfrak{m}'$ ideal maximal de R'. Temos que $\mathfrak{m}' \cap R$ é ideal próprio de R e, como R é corpo, $\mathfrak{m}' \cap R = 0$. Pelo item (ii), $\mathfrak{m}' = 0$ e R' é corpo.

Reciprocamente, suponha que R' é corpo e tome $\mathfrak{m}$ ideal maximal de R. Como todo ideal maximal é primo, pelo item (i), existe $\mathfrak{m}'$ ideal primo de R' tal que $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' \cap R$. Sendo R' corpo, $\mathfrak{m}' = 0$, de onde segue que $\mathfrak{m} = 0$ e, portanto, R é corpo.

(iv). Observe que $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap R$ é ideal primo de R e aplique o item (iii) para a extensão integral $R/\mathfrak{p} \hookrightarrow R'/\mathfrak{p}'$ de domínios. ■

Pelos itens (i) e (iv), vemos que os ideais maximais numa extensão integral se relacionam bem. Com isso, é de se esperar que:

Corolário 2. Seja $R \subseteq R'$ uma extensão integral de anéis. Então R é de Jacobson se e somente se R' é de Jacobson.

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Seja D' um domínio que é imagem homomorfa de R'. Pelo Lema 1, basta mostrarmos que

$$\bigcap_{\mathfrak{m}' \in \operatorname{Specm} D'} \mathfrak{m}' = 0.$$

Sejam I a interseção acima e D a imagem de R em D'. Observe que $D \subseteq D'$ é extensão integral de domínios. Segue de (i) e (iv) do Lema 3 que os ideais maximais de D são precisamente da forma $\mathfrak{m}' \cap D$ com $\mathfrak{m}'$ ideal maximal de D'. Logo,

$$I \cap D = \bigcap_{\mathfrak{m}' \in \operatorname{Specm} D'} (\mathfrak{m}' \cap D) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} D} \mathfrak{m} = 0.$$

Na última igualdade, utilizamos que R é de Jacobson e o item (iii) do Lema 1. Pelo item (ii) do Lema 3, concluímos que $I = 0$, como queríamos.

($\Longleftarrow$) Seja $\mathfrak{p}$ um ideal primo de R e mostremos que $\mathfrak{p}$ é a interseção dos ideais maximais que o contêm. Por (i) do Lema 3, existe um ideal primo $\mathfrak{p}'$ de R' tal que $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap R$. Como R' é de Jacobson, vale que

$$\mathfrak{p}' = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m}' \in \operatorname{Specm} R' \\ \mathfrak{m}' \supseteq \mathfrak{p}'}} \mathfrak{m}'.$$

Intersectando a igualdade acima por R, obtemos que

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap R = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m}' \in \operatorname{Specm} R' \\ \mathfrak{m}' \supseteq \mathfrak{p}'}} (\mathfrak{m}' \cap R).$$

Pelo item (iv) do Lema 3, cada $\mathfrak{m}' \cap R$ na interseção acima é um ideal maximal de R. Com isso, mostramos que $\mathfrak{p}$ é interseção de ideais maximais de R e concluímos que $\mathfrak{p}$ é a interseção dos ideais maximais que o contêm. ■

Daremos uma outra prova interessante para a implicação ($\Longrightarrow$) acima. Ela é essencialmente a demonstração que vimos, mas dessa vez olhamos diretamente para os ideais primos de R', ao invés de considerar as imagens homomorfas. Para isso, lembre das seguintes propriedades, que são consequência de (i) e (ii) do Lema 3:

Lema 4. Sejam $R \subseteq R'$ um extensão integral de anéis, $\mathfrak{p}$ ideal primo de R e $\mathfrak{p}'$ ideal primo de R' tal que $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap R$.

(i) ("Going Up") Dado $\mathfrak{q}$ ideal primo de R contendo $\mathfrak{p}$, existe um ideal primo $\mathfrak{q}'$ de R' contendo $\mathfrak{p}'$ tal que $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}' \cap R$.

(ii) ("Incomparabilidade") Se $\mathfrak{q}'$ é ideal de R' contendo $\mathfrak{p}'$ tal que $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}' \cap R$, então $\mathfrak{q}' = \mathfrak{p}'$. (Repare que $\mathfrak{q}'$ **não** precisa ser primo.)

Demonstração alternativa da implicação. Vamos usar o critério (ii) do Lema 1. Seja $\mathfrak{p}'$ ideal primo de R'. Então $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap R$ é ideal primo de R e, como R é de Jacobson,

$$\mathfrak{p} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R \\ \mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{p}}} \mathfrak{m}.$$

Agora, dado $\mathfrak{m}$ ideal maximal de R contendo $\mathfrak{p}$, pelo "Going Up", existe $\mathfrak{m}'$ ideal primo de R' contendo $\mathfrak{p}'$ tal que $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' \cap R$. Pelo item (iv) do Lema 3, $\mathfrak{m}'$ é ideal maximal de R'. Repare que

$$R \;\cap \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R \\ \mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{p}}} \mathfrak{m}' = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R \\ \mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{p}}} (\mathfrak{m}' \cap R) = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R \\ \mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{p}}} \mathfrak{m} = \mathfrak{p}$$

Pela construção dos $\mathfrak{m}'$,

$$\mathfrak{p}' \subseteq \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R \\ \mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{p}}} \mathfrak{m}'$$

e, pela “Incomparabilidade”, vale a igualdade na inclusão acima. Como cada $\mathfrak{m}'$ é maximal em R', concluímos que

$$\mathfrak{p}' = \bigcap_{\substack{\mathfrak{n}' \in \operatorname{Specm} R' \\ \mathfrak{n}' \supseteq \mathfrak{p}'}} \mathfrak{n}',$$

como queríamos. ∎

Para terminar essa seção, provaremos um Lema que será usado na demonstração do Nullstellensatz de Hilbert generalizado.

Lema 5. Seja $R \subseteq K$ uma extensão de anéis, com R domínio de Jacobson e K corpo. Se existe $f \in R$ não nulo tal que $R_f \subseteq K_f$ é integral (resp. finita), então $R \subseteq K$ é integral (resp. finita) e, em particular, R é corpo.

Demonstração. Como os anéis considerados são domínios e $f \neq 0$, podemos considerar que $R \subseteq R_f$ e $K \subseteq K_f$. Como K é corpo, o mapa de localização é na verdade um isomorfismo e temos a igualdade $K = K_f$. Como a extensão $R_f \subseteq K_f = K$ é integral, K é corpo e R_f é domínio, segue que R_f também é corpo pelo item (iii) do Lema 3. Então (0) é ideal maximal de R_f e, pela Proposição 2, também é ideal maximal de R. Logo, R é corpo e vale a igualdade $R = R_f$, de onde segue que a extensão $R \subseteq K$ é igual à extensão $R_f \subseteq K_f$. ∎

5. “Teorema da Base de Jacobson”

Nosso próximo passo será mostrar um análogo do Teorema da Base de Hilbert: se R é de Jacobson, então $R[x]$ é de Jacobson. Para isso, precisamos de dois lemas técnicos:

Lema 6. Sejam $R \subseteq R'$ domínios, com R de Jacobson. Se existe $f \in R$ não nulo tal que a extensão $R_f \subseteq R'_f$ é integral, então

$$\bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R'} \mathfrak{m} = 0.$$

Demonstração. Inicialmente, como R e R' são domínios e f é não nulo, os mapas de localização são injetores, de modo que, através deles, podemos considerar que $R \subseteq R_f$ e $R' \subseteq R'_f$. A inclusão $R_f \subseteq R'_f$ é obtida localizando a inclusão $R \hookrightarrow R'$. Além disso, R_f e R'_f também são domínios de integridade.

A ideia será mostrar que, se $\mathfrak{m}'$ é ideal maximal de R'_f, então $\mathfrak{m}' \cap R'$ é ideal maximal de R'. Com isso, seguirá que

$$\bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R'} \mathfrak{m} \subseteq \bigcap_{\mathfrak{m}' \in \operatorname{Specm} R'_f} (\mathfrak{m}' \cap R') \subseteq \bigcap_{\mathfrak{m}' \in \operatorname{Specm} R'_f} \mathfrak{m}'.$$

Agora, pela Proposição 2 (ou pelo Corolário 1), R_f é de Jacobson. Como $R_f \subseteq R'_f$ é integral, pelo Corolário 2, R'_f também é de Jacobson. Como R'_f é domínio, concluímos que a terceira interseção acima é nula, provando o Lema.

Assim, provemos que, se $\mathfrak{m}'$ é ideal maximal de R'_f, então $\mathfrak{m}' \cap R'$ é ideal maximal de R'. Pelo item (ii) do Lema 3, $\mathfrak{m}' \cap R_f$ é ideal maximal de R_f. Aplicando a correspondência entre ideais maximais da Proposição 2, segue que $\mathfrak{m}' \cap R = \mathfrak{m}' \cap R_f \cap R$ é ideal maximal de R (aqui, observe que, pela identificação que fizemos no começo, a correspondência leva um ideal maximal de R_f em sua interseção com R).

Compondo a inclusão com a projeção, obtemos um homomorfismo $R \to R_f/(\mathfrak{m}' \cap R_f)$ cujo núcleo é $\mathfrak{m}' \cap R$. Afirmamos que o homomorfismo injetor induzido $\varphi : R/(\mathfrak{m}' \cap R) \to R_f/(\mathfrak{m}' \cap R_f)$ é isomorfismo. Note que $R/(\mathfrak{m}' \cap R)$ é corpo, pois $\mathfrak{m}' \cap R$ é maximal em R. Assim, dado $\overline{r/f^n}$ no contradomínio, note que $f^n \notin \mathfrak{m}' \cap R$, já que f^n é inversível em R'_f, de onde temos que $\overline{f^n}$ é inversível no domínio de φ. Com isso,

$$\varphi\left(\overline{r} \cdot \overline{f^n}^{-1}\right) = \varphi(\overline{r}) \cdot \varphi\left(\overline{f^n}\right)^{-1} = \overline{r} \cdot \overline{f^n}^{-1} = \overline{r} \cdot \overline{\frac{1}{f^n}} = \overline{\frac{r}{f^n}},$$

mostrando que φ é de fato sobrejetor.

É possível mostrar que φ é isomorfismo de outra forma. Através do isomorfismo

$$\frac{R_f}{\mathfrak{m}' \cap R_f} \cong \left(\frac{R}{\mathfrak{m}' \cap R}\right)_f,$$

podemos ver φ como o mapa de localização de $R/(\mathfrak{m}' \cap R)$ em sua localização por f. Como esse quociente já é corpo e a projeção de f é não nula, a localização “não altera nada”, de modo que temos um isomorfismo.

Como $R_f \subseteq R'_f$ é integral, a extensão

$$\frac{R_f}{\mathfrak{m}' \cap R_f} \hookrightarrow \frac{R'_f}{\mathfrak{m}'}$$

é integral e de corpos. Também temos a a extensão

$$\frac{R}{\mathfrak{m}' \cap R} \hookrightarrow \frac{R'}{\mathfrak{m}' \cap R'},$$

que ainda não sabemos se é integral. Observe que $\mathfrak{m}' \cap R'$ é ideal primo de R' pela correspondência entre ideais primos de R' e da sua localização R'_f. Juntando tudo isso, temos o seguinte diagrama comutativo, com mapas injetores:

$$\begin{tikzcd}
\frac{R}{\mathfrak{m}' \cap R} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi"'] & \frac{R'}{\mathfrak{m}' \cap R'} \arrow[d, hook] \\
\frac{R_f}{\mathfrak{m}' \cap R_f} \arrow[r, hook, "\text{integral}"] & \frac{R'_f}{\mathfrak{m}'}
\end{tikzcd}$$

Disso, segue que $R'/(\mathfrak{m}' \cap R')$ é domínio entre uma extensão integral de corpos. Concluímos pelo item (iii) do Lema 3 que $R'/(\mathfrak{m}' \cap R')$ é corpo, ou seja, $\mathfrak{m}' \cap R'$ é ideal maximal de R', como queríamos. ■

Lema 7. Se R é um anel tal que

$$\bigcap_{\mathfrak{m}\,\in\,\operatorname{Specm} R} \mathfrak{m} \ = 0,$$

então

$$\bigcap_{\mathfrak{m}'\,\in\,\operatorname{Specm} R[x]} \mathfrak{m}' \ = 0.$$

Demonstração. Se $\mathfrak{m}R[x]$ denota o ideal dos polinômios com coeficientes em $\mathfrak{m}$, a hipótese nos dá que

$$\bigcap_{\mathfrak{m}\,\in\,\operatorname{Specm} R} \mathfrak{m}R[x] \ = 0.$$

Assim, é suficiente mostrar que, para cada ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R,

$$\bigcap_{\substack{\mathfrak{m}'\,\in\,\operatorname{Specm} R[x] \\ \mathfrak{m}R[x]\,\subseteq\,\mathfrak{m}'}} \mathfrak{m}' \ = \mathfrak{m}R[x],$$

uma vez que

$$\bigcap_{\mathfrak{m}'\,\in\,\operatorname{Specm} R[x]} \mathfrak{m}' \ \subseteq \bigcap_{\mathfrak{m}\,\in\,\operatorname{Specm} R} \ \bigcap_{\substack{\mathfrak{m}'\,\in\,\operatorname{Specm} R[x] \\ \mathfrak{m}R[x]\,\subseteq\,\mathfrak{m}'}} \mathfrak{m}'.$$

Como $R[x]/\mathfrak{m}R[x] \cong (R/\mathfrak{m})[x]$, pelo Teorema da Correspondência, basta provarmos que

$$\bigcap_{\mathfrak{m}''\,\in\,\operatorname{Specm}(R/\mathfrak{m})[x]} \mathfrak{m}'' \ = 0.$$

Isso segue da Proposição 1 (e do comentário após a sua demonstração), pois $R/\mathfrak{m}$ é corpo e, consequentemente, $(R/\mathfrak{m})[x]$ é um domínio de Jacobson. ■

Finalmente:

Teorema 3. Se R é de Jacobson, então $R[x]$ é de Jacobson.

Demonstração. Seja D um domínio que é imagem homomorfa de $R[x]$. Pelo item (iii) do Lema 1, basta mostrarmos que

$$\bigcap_{\mathfrak{m}\,\in\,\operatorname{Specm} D} \mathfrak{m} \ = 0. \tag{1}$$

Considere R' como sendo a imagem de R em D. A ideia é analisar o comportamento da extensão $R' \subseteq D$. Como veremos, ou ela será da forma $D \cong R'[x]$, e então poderemos aplicar o Lema 7, ou ela será integral (após uma possível localização), e nesse caso poderemos aplicar o Lema 6.

Seja d a imagem da variável x em D. Podemos definir o homomorfismo $\varphi : R'[x] \to D$ levando R' em R' e a variável x em d. Como $D = R'[d]$ (é o menor subanel de D contendo R' e d), vemos que φ é sobrejetor. Suponha, para esse caso, que φ é isomorfismo. Como R'

é domínio e imagem homomorfa de R, que é de Jacobson, pelo item (iii) do Lema 1, segue que

$$\bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R'} \mathfrak{m} = 0.$$

Usando que $D \cong R'[x]$, (1) segue do Lema 7.

Agora, suponha que φ não é isomorfismo, ou seja, suponha que φ não é injetor. Logo, há $p(x) \in R'[x]$ não nulo tal que $p(d) = 0$. Seja $f \neq 0$ o coeficiente líder de p. Localizando, note que $D_f = R'_f[d/1]$. Além disso, $d/1$ é integral sobre R'_f, pois satisfaz o polinômio mônico $p_f(x) \in (R'_f)[x]$ obtido a partir de $p(x)$ dividindo todos os coeficientes por f. Segue que a extensão $R'_f \subseteq D_f$ é finita e, em particular, integral. Como R' é imagem homomorfa de R, R' é anel de Jacobson e podemos aplicar o Lema 6 para concluir (1). ∎

Corolário 3. Se R é de Jacobson, então qualquer R-álgebra de tipo finito é de Jacobson.

Demonstração. Com uma indução, o Teorema 3 nos dá que o anel de polinômios $R[x_1, \ldots, x_n]$ em n variáveis é de Jacobson, para todo n inteiro positivo. O Corolário segue lembrando que qualquer R-álgebra de tipo finito é quociente de algum anel de polinômios em $n \geq 1$ variáveis. ∎

Observe que o Corolário 3 imediatamente implica a versão do Nullstellensatz no Teorema 2.

6. "Nullstellensatz de Jacobson"

Finalmente, estamos prontos para provar a generalização do Nullstellensatz de Hilbert:

Teorema 4. Se R é um anel de Jacobson e K uma R-álgebra de tipo finito que é corpo, então K é uma R-álgebra finita. Reciprocamente, qualquer anel R que satisfaz essa condição é de Jacobson.

Demonstração. Vamos provar a primeira parte por indução no número de geradores de K. Lembre que K é gerado por $n \geq 1$ elementos se e somente se K é isomorfo a $R[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{m}$ para algum ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $R[x_1, \ldots, x_n]$ (o ideal é maximal, pois estamos supondo que K é corpo). Consideraremos que K é gerado por 0 elementos se pudermos trocar o anel de polinômios por R apenas.

Se K é gerado por 0 elementos, o resultado é imediato, pois $K \cong R/\mathfrak{m}$ é gerado por $\overline{1}$ como R-módulo. Agora, suponha que o resultado vale para $n-1$ geradores, $n \geq 1$, e considere $K = R[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{m}$. A inclusão $R[x_1, \ldots, x_{n-1}] \subseteq R[x_1, \ldots, x_n]$ nos dá a injeção

$$\frac{R[x_1, \ldots, x_{n-1}]}{\mathfrak{m} \cap R[x_1, \ldots, x_{n-1}]} \hookrightarrow \frac{R[x_1, \ldots, x_n]}{\mathfrak{m}} = K.$$

Seja R' o primeiro quociente acima, visto como subanel de K. Veja que $K = R'[\overline{x_n}]$. Se $\overline{x_n} = 0$, então trivialmente satisfaz um polinômio não nulo com coeficientes em R'. Se $\overline{x_n} \neq 0$, então ele é inversível e, assim, existe $p \in R[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $\overline{x_n} \cdot \overline{p} = \overline{1}$, de onde obtemos que $\overline{x_n}$ também satisfaz um polinômio não nulo com coeficientes em R'. Assim, podemos argumentar como no final da demonstração do Teorema 3 para obter $f \in R'$ não nulo tal que $R'_f \subseteq K_f$ é finita. Pelo Corolário 3, R' é de Jacobson e, pelo Lema 5, R' é corpo e a extensão $R' \subseteq K$ é finita. Note que R' é gerado por $n-1$ elementos como R-álgebra, logo, por hipótese de indução, R' é R-álgebra finita. Segue que K é R-álgebra finita também, já que $R' \subseteq K$ é finita.

Vamos provar a recíproca. Seja R um anel tal que toda R-álgebra de tipo finito que é corpo é na verdade uma R-álgebra finita. Mostremos que R é de Jacobson. Se provarmos que qualquer quociente de R tem essa mesma propriedade, pelo item (iii) do Lema 1, então basta assumirmos que R é domínio e provarmos que

$$\bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R} \mathfrak{m} = 0.$$

Com efeito, se I é ideal de R e K é uma R/I-álgebra de tipo finito que é corpo, então K também é uma R-álgebra, restringindo escalares através da projeção $R \to R/I$. Como essa projeção é sobrejetora, vale que

$$K \text{ é } R\text{-álgebra de tipo finito} \iff K \text{ é } R/I\text{-álgebra de tipo finito}$$

e

$$K \text{ é } R\text{-álgebra finita} \iff K \text{ é } R/I\text{-álgebra finita},$$

de onde segue que K é R/I-álgebra finita pela propriedade de R.

Assim, suponha que R é domínio e possui a condição do enunciado. Vamos provar que a interseção acima é nula. Equivalentemente, vamos mostrar que, se $f \in R$ é não nulo, então existe um ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R que não contém f. Como $f \neq 0$, R_f é um anel não nulo que contém R (pois R é domínio). Tome $\mathfrak{m}'$ um ideal maximal de R_f. Note que R_f é R-álgebra de tipo finito, gerada por $1/f$, então $R_f/\mathfrak{m}'$ é R-álgebra de tipo finito que é corpo. Pela propriedade de R, vemos que $R_f/\mathfrak{m}'$ é R-álgebra finita, de onde segue que a extensão

$$\frac{R}{\mathfrak{m}' \cap R} \hookrightarrow \frac{R_f}{\mathfrak{m}'}$$

é finita. Pelo item (iii) do Lema 3, como o primeiro anel é domínio e o segundo é corpo, vale que $R/(\mathfrak{m}' \cap R)$ é corpo e $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' \cap R$ é ideal maximal de R. Além disso, pela correspondência entre ideais primos do anel e de sua localização (que nesse caso se dá através da interseção, já que vemos R como subanel de R_f), $\mathfrak{m}$ não contém f e é o ideal maximal procurado. ∎

Como todo corpo é de Jacobson, o Teorema 4 implica diretamente a versão do Nullstellensatz de Hilbert no Teorema 1. Temos outros corolários:

Corolário 4. Sejam R um anel de Jacobson e R' uma R-álgebra de tipo finito. Se $\mathfrak{m}'$ é ideal maximal de R', então a contração $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{m}'$ em R é ideal maximal e a extensão $R/\mathfrak{m} \hookrightarrow R'/\mathfrak{m}'$ é finita.

Demonstração. Seja $\varphi : R \to R'$ o homomorfismo de anéis que torna R' uma R-álgebra. Quando dizemos que "$\mathfrak{m}$ é a contração de $\mathfrak{m}'$", consideramos que $\mathfrak{m} = \varphi^{-1}(\mathfrak{m}')$. Como R' é R-álgebra de tipo finito, $R'/\mathfrak{m}'$ também é e, pelo Teorema 4, é na verdade finita. Com isso, a extensão de anéis $R/\mathfrak{m} \hookrightarrow R'/\mathfrak{m}'$ é finita. Além disso, como $R'/\mathfrak{m}'$ é corpo e $R/\mathfrak{m}$ é domínio ($\mathfrak{m}$ é ideal primo, pois é pré-imagem de ideal primo), concluímos de (iii) do Lema 3 que $R/\mathfrak{m}$ é corpo, ou seja, $\mathfrak{m}$ é maximal. ∎

Corolário 5. Se R é um anel de Jacobson e $\varphi : R \to R'$ é um homomorfismo de tipo finito (isto é, R' é uma R-álgebra de tipo finito), então podemos restringir $\operatorname{Spec}\varphi$ a uma função contínua $\operatorname{Spec}\varphi : \operatorname{Specm} R' \to \operatorname{Specm} R$.

Demonstração. É essencialmente a primeira parte do Corolário 4. ■

Lembrando que os ideais maximais são os pontos fechados do espectro, o Corolário acima nos diz que $\operatorname{Spec}\varphi$ leva pontos fechados em pontos fechados.

Corolário 6. Se R é uma $\mathbb{Z}$-álgebra de tipo finito e $\mathfrak{m}$ é um ideal maximal de R, então $R/\mathfrak{m}$ é um corpo finito.

Demonstração. Como vimos na primeira seção, $\mathbb{Z}$ é anel de Jacobson. Pelo Corolário 4, $R/\mathfrak{m}$ é extensão finita de um corpo que é quociente de $\mathbb{Z}$. Como todo quociente não trivial de $\mathbb{Z}$ é finito, segue que $R/\mathfrak{m}$ é um corpo finito. ■

Corolário 7. Sejam $f, f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$. Suponha que para todo corpo finito K e $a = (a_1, \ldots, a_n) \in K^n$ vale

$$f_1(a) = 0, \ldots, f_r(a) = 0 \implies f(a) = 0.$$

Então f está no radical do ideal gerado por $f_1, \ldots, f_r$ em $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$.

Demonstração. Antes de tudo, lembre que todo anel é uma $\mathbb{Z}$-álgebra naturalmente. Assim, no enunciado acima, faz sentido avaliar os polinômios sobre corpos finitos.

Suponha que f não está nesse radical. Como $\mathbb{Z}$ é de Jacobson, o anel de polinômios $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ também é pelo Corolário 3. Isso nos diz que há um ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ contendo o radical em questão tal que $f \notin \mathfrak{m}$. Tome $K = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{m}$. Pelo Corolário 6, K é corpo finito. Entretanto, $f_1, \ldots, f_r$ se anulam em $(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}) \in K^n$, pois estão em $\mathfrak{m}$, enquanto f não, contradizendo a hipótese. ■

Compare o último Corolário acima com a versão geométrica usual do Nullstellensatz de Hilbert.

7. Domínios de Goldman e Anéis de Hilbert

Já completamos nosso objetivo principal de provar o Teorema 4, a generalização do Nullstellensatz. Nessa última seção, comentaremos brevemente uma outra forma de abordar os anéis de Jacobson. Apenas vamos expor alguns resultados, não iremos demonstrá-los. Para maiores informações, veja [3] e [4].

Lema 8. Sejam R um domínio e K seu corpo de frações. Então são equivalentes:

(i) K é R-álgebra de tipo finito.

(ii) Existe $f \in K$ tal que $K = R[f]$.

A partir desse Lema, temos as seguintes definições:

Definição 3. Sejam R um anel e $\mathfrak{p}$ um ideal primo de R.

(i) Dizemos que R é um *domínio de Goldman* se é um domínio e satisfaz as condições do Lema 8.

(ii) Chamamos $\mathfrak{p}$ de *ideal de Goldman* se $R/\mathfrak{p}$ é um domínio de Goldman.

Observe que um ideal de Goldman é mais geral que um ideal maximal (pois todo corpo é domínio de Goldman), mas é mais restrito que um ideal primo. Temos dois resultados interessantes:

Proposição 6. Suponha que R seja um anel de Jacobson e um domínio de Goldman. Então R é um corpo.

Proposição 7. Sejam R um anel e I um ideal de R. Então:

(i) O nilradical de R é a interseção dos ideais de Goldman de R.

(ii) O radical de I é a interseção dos ideais de Goldman que contêm I.

Já conseguimos ver algumas relações entre as novas definições e anéis de Jacobson. Nesse contexto, chegamos na seguinte definição:

Definição 4. Seja R um anel. Dizemos que R é um *anel de Hilbert* se todo ideal de Goldman é maximal.

Não é difícil usar as Proposições acima para mostrar que as definições de anel de Jacobson e anel de Hilbert são equivalentes. Então por que demos outro nome? Quisemos realçar que podemos abordar os anéis de Jacobson de outra maneira, obtendo novos resultados e novas demonstrações para teoremas antigos. Nas referências apresentadas para esse tema, por exemplo, podem ser encontradas vários outros resultados sobre domínios de Goldman e anéis de Hilbert que não abordamos, o que nos dá uma visão diferente a respeito dos anéis de Jacobson e verifica mais uma vez como esse é um tema interessante e rico.

Referências

[1] O. Goldman, "Hilbert rings and the hilbert nullstellensatz.," *Mathematische Zeitschrift*, vol. 54, pp. 136–140, 1951.

[2] W. Krull, "Jacobsonsche ringe, hilbertscher nullstellensatz, dimensionstheorie.," *Mathematische Zeitschrift*, vol. 54, pp. 354–387, 1951.

[3] P. Clark, *Commutative Algebra.* `http://math.uga.edu/~pete/integral2015.pdf`. Acesso em 2020-06-17.

[4] I. Kaplansky, *Commutative Rings* (Revised ed.). University of Chicago Press, 1974.

[5] A. Altman and S. Kleiman, *A Term of Commutative Algebra.* `http://web.mit.edu/18.705/www/13Ed.pdf`. Acesso em 2020-06-17.

[6] M. Atiyah and I. MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra*. Westview Press, 1969.

[7] N. Bourbaki, *Algèbre Commutative - Chapitres 5 à 7*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

[8] M. Emerton, *Jacobson Rings*. https://www.math.uchicago.edu/~emerton/pdffiles/jacobson.pdf. Acesso em 2020-06-17.

[9] *Jacobson rings*. The Stacks project - Chapter 10, Section 34 (00FZ), https://stacks.math.columbia.edu/tag/00FZ. Acesso em 2020-06-17.