Dualidade de Gelfand

Thiago Landim

Traduzir-se uma parte
na outra parte
– que é uma questão
de vida ou morte –
será arte?

Ferreira Gullar

1 Resumo da Ópera

Em geral, objetos algébricos costumam ser descobertos de maneira concreta, e apenas após algumas décadas se extrai os axiomas corretos para se construir uma teoria abstrata. Um exemplo clássico é a Teoria dos Grupos. O grupo de permutações começou sendo estudado no século XVIII na busca de soluções de equações polinomiais por Lagrange, Abel, Galois, entre outros (e também do ponto de vista da Teoria dos Números por Euler e Gauss), o que culminou em Jordan, com seu *Tratado de Substituições* em 1870. Foi apenas em 1854 que um grupo foi definido como um conjunto dotado de uma certa operação satisfazendo algumas propriedades, por Arthur Cayley. Não obstante, era necessário saber se esses axiomas eram realmente as propriedades que desejamos que grupos possuam. Somente em 1878, Cayley enunciou o que hoje conhecemos como

Teorema de Cayley: Todo grupo finito de ordem n pode ser visto como um subgrupo de S_n.

Mais ainda, isso é verdade para grupos infinitos: se $\mathrm{S}(X)$ denota o conjunto das permutações do conjunto X, então todo grupo G é isomorfo a um subgrupo de $\mathrm{S}(X)$ para algum conjunto X.

Isso nos diz que os axiomas para um grupo são exatamente os axiomas que nós desejamos usar para estudar de maneira abstrata as permutações.

Da mesma forma, uma C^*-álgebra foi, a princípio, definida de maneira concreta. Enquanto tentava descrever a mecânica quântica com o devido formalismo matemático, von Neumann começou o estudo dos operadores limitados em espaços de Hilbert. O conjunto de todos os operadores formam uma C^*-álgebra denotada por $B(\mathcal{H})$, e uma subálgebra é dita uma C^*-álgebra se é fechada na topologia do operador e fechada com respeito à adjunção $T \mapsto T^*$. Apenas após alguns anos foi que se encontrou uma definição abstrata, a qual descreve exatamente aquilo que uma C^*-álgebra deve satisfazer.

Teorema de Gelfand-Naimark-Segal: Toda C^*-álgebra $\mathfrak{A}$ é isometricamente isomorfa a uma subálgebra de $B(\mathcal{H})$ para algum espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.

Assim, o teorema nada mais é do que a afirmação: a definição abstrata de C^*-álgebra faz sentido!

Esse se tornou um problema clássico de álgebra, e mais teoremas foram surgindo a esse respeito. Porém, na medida em que estruturas algébricas foram aparecem na Análise, mais especificamente na Análise Funcional, cada vez mais foi se buscando teoremas de representação com estruturas topológicas ou analíticas.

O primeiro desses é o que hoje é conhecido como

Teorema da Representação de Stone: Toda álgebra Booleana é isomorfa a alguma *álgebra de conjuntos*. Mais ainda, existe uma dualidade entre álgebras Booleanas B e espaços de Stone $S(B)$, no qual $S(B)$ são os ultrafiltros de B, e B é isomorfo à coleção de conjuntos abertos e fechados de $S(B)$.

Usando a linguagem categórica, podemos dizer que a categoria das álgebras Booleanas é equivalente à categoria dos espaços de Stone. Isso foi feito *antes* da invenção da Teoria das Categorias, e foi uma de suas motivações.

Os exemplos clássicos de C^*-álgebras comutativas são os anéis de funções contínuas limitadas $C_b(X)$ para um espaço topológico X. Se X é um compacto, o anel cima é simplesmente $C(X)$. Essas notas têm o objetivo de demonstrar uma espécie de inversa para essa construção.

Teorema da Representação de Gelfand-Naimark: Toda C^*-álgebra comutativa A é isometricamente isomorfa a $C(K)$ para um único espaço compacto Hausdorff K.

De maneira análoga ao Teorema de Stone, nós temos uma equivalência entre C^*-álgebras comutativas e espaços compactos Hausdorff. Essa dualidade nos permite generalizar diversos resultados e estender a noção de espaços topológicos, variedades, entre outros conceitos.

2 Funções Contínuas

Após o trabalho pioneiro de Gelfand e Naimark, o termo C^*-álgebras foi cunhado por Segal em [1] e alguns acreditam que o C indica que C^*-álgebras são o análogo não comutativo dos espaços $C(K)$, enquanto que * enfatiza a importância da involução, ver [2]. Assim, antes de entrarmos no estudo das C^*-álgebras, vamos relembrar algumas propriedades dos espaços $C(K)$.

Teorema 1. *Se K é um espaço compacto Hausdorff, então há uma bijeção entre K e $\operatorname{Specm} C(K)$ dada por*

$$K \ni a \mapsto M_a := \{f \in C(K) \mid f(a) = 0\} \in \operatorname{Specm} C(K).$$

Demonstração. Primeiramente, provemos que essa função é injetiva. De fato, como K é compacto e Hausdorff, ele também é normal, portanto quaisquer dois pontos distintos a, $b \in K$ podem ser separados por uma função contínua, isto é, existe uma função $f \in M_a \backslash M_b$. Assim, esses ideais são distintos.

Vejamos agora que M_a são ideais maximais. Seja I um ideal tal que $M_a \subsetneq I \subseteq C(K)$. Então existe $f \in I$ tal que $f(a) \neq 0$. Assim,

$$g(x) = (x - a)^2 + f(x)^2 \in I$$

é uma função que não se anula em ponto algum, logo é uma unidade e $I = C(K)$, de onde segue que M_a é maximal.

Para concluir a demonstração, resta mostrar que esse são todos os ideais maximais. Com efeito, suponha que I é um ideal que não está contido em nenhum M_a. Então, para todo $a \in K$, existe $f_a \in I$ tal que $f_a(a) \neq 0$. Pela continuidade das funções, existe uma vizinhança V_a tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in V_a$. Como $\{V_a\}_{a \in K}$ é uma cobertura do compacto K, existe uma subcobertura finita $V_{a_1} \cup \cdots \cup V_{a_n} = K$ e

$$g(x) = f_{a_1}(x)^2 + \cdots + f_{a_n}(x)^2 \in I$$

é uma função que não se anula em ponto algum, portanto é unidade e $I = C(K)$, concluindo nossa demonstração. ■

Não apenas temos uma bijeção, como um homeomorfismo! De fato, note que $\operatorname{Specm} C(K)$ também é um espaço Hausdorff compacto, e a função $\varphi\colon a \mapsto M_a$ é contínua, pois se $f \in C(K)$, então $\varphi^{-1}(D(f)) = \{x \in K \mid f(x) \neq 0\}$ é aberto. Assim, φ é, na verdade, um homeomorfismo[1].

Assim, temos uma certa dualidade

$$\left\{\begin{matrix}\text{Espaços Hausdorff}\\ \text{compactos}\end{matrix}\right\} \underset{\text{Specm}}{\overset{C}{\rightleftarrows}} \left\{\begin{matrix}\text{Anéis de funções}\\ \text{contínuas}\end{matrix}\right\}.$$

Mais ainda, temos uma trialidade[2]! Com efeito, a cada ideal maximal, podemos associar a projeção $\pi_a\colon C(K) \to C(K)/M_a \cong \mathbb{R}$ definida por $\pi_a(f) = f(a)$. Note

[1] Caso isso não esteja claro, veja, por exemplo, o Teorema 3.1.13 de [3].

[2] Não, isso não é uma trivialidade!

que π_a é um funcional linear contínuo (se dotarmos $C(K)$ da topologia uniforme) e $\|\pi_a\| = 1$ (pois $|\pi_a(f)| = |f(a)| \leq \|f\|$ e $|\pi_a(1)| = 1$). Mais ainda, π_a é um **caráter** em nossa álgebra $C(K)$, pois $\pi_a(1) = 1$ e $\pi_a(fg) = \pi_a(f)\pi_a(g)$.

Por fim, note que todo caráter não nulo é π_a para algum $a \in K$. Com efeito, se $\psi\colon C(K) \to \mathbb{R}$ é um caráter e $\ker \psi = M_a$, então $f - \pi_a(f) \in M_a = \ker \psi$ para toda $f \in C(K)$, ou seja, $\psi(f) = \psi(\pi_a(f)) = \pi_a(f) \cdot \psi(1) = \pi_a(f)$.

Mais ainda, nós novamente temos um homeomorfismo! Podemos induzir no espaço dos caráteres não-nulos a topologia fraca* (a topologia mais fraca na qual todas as funções $\psi \mapsto \psi(f)$ são contínuas)[3], vendo-o como um subespaço de $C(K)^*$. Dessa forma, temos um subconjunto fechado da bola unitária (que é compacta, pelo Teorema de Banach-Alaoglu, como veremos na próxima seção), logo é também compacto. Como esse espaço também é Hausdorff, é suficiente ver que π é contínua, mas isso segue do fato que as funções $f \in C(K)$ são contínuas[4].

Finalmente podemos enunciar nossa trialidade

$$\left\{\begin{matrix}\text{Espaços Hausdorff}\\ \text{compactos}\end{matrix}\right\} \underset{\text{Specm}}{\overset{C}{\rightleftarrows}} \left\{\begin{matrix}\text{Anéis de funções}\\ \text{contínuas}\end{matrix}\right\} \underset{\ker}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} \left\{\begin{matrix}\text{Caráteres}\\ \text{não-nulos}\end{matrix}\right\}.$$

Agora que já estudamos bem o espaço das funções contínuas que saem de um compacto K, queremos estudar as funções contínuas que saem de um espaço topológico qualquer X. Nesse caso, o supremo não está bem definido, pois as funções podem ser ilimitadas, portanto nós vamos para o espaço $C_b(X)$ das funções contínuas limitadas. Se seguirmos adiante nessa ideia, iremos chegar na **compactificação de Stone-Čech**. Vamos, por outro lado, assumir que X é Hausdorff e localmente compacto (o que não é uma hipótese muito forte, visto que a maioria dos espaços que encontramos em nosso dia a dia são dessa forma) e estudar $C_0(X)$ o espaço das funções que convergem para 0 no infinito. Embora a definição acima faça sentido para $X = \mathbb{R}$, ela não parece não fazer sentido para um espaço topológico qualquer.

Definição 2. Seja X um espaço Hausdorff localmente compacto. Definimos por $C_0(X)$ o espaço de todas as funções contínuas f tais que, para todo $\varepsilon > 0$, existe um compacto $K \subset X$ tal que $|f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \notin K$.

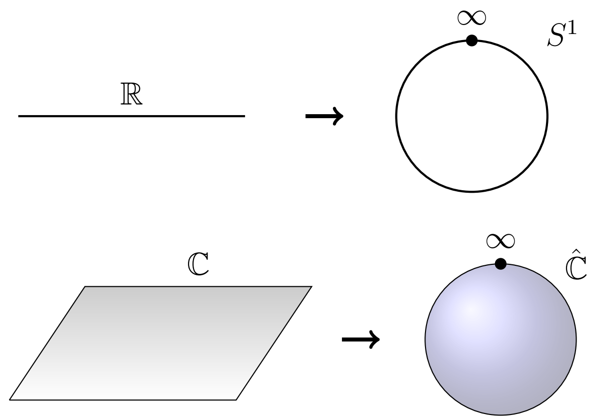
Embora a primeira definição não seja formal para todo o caso, ela nos induz a uma nova definição, que irá nos ajudar no estudo do espaço acima.

Definição 3. Seja X um espaço Hausdorff localmente compacto. Definimos sua **compactificação de um ponto**, ou **extensão de Alexandroff** como o espaço $X^* := X \sqcup \{\infty\}$ cuja base de vizinhanças para qualquer $x \in X$ em X^* é a mesma de X e as vizinhanças de ∞ é são os conjuntos da forma $(X \backslash K) \sqcup \{\infty\}$ para qualquer compacto $K \subset X$.

Essa construção é bem conhecida para a reta real e para os números complexos, como vemos pelas ilustrações abaixo.

[3]Essa topologia também é chama de **topologia inicial**.

[4]Se não consegue ver isso, talvez seja bom olhar a Proposição 1.4.9 de [3].



Note que $C_0(X)$ corresponde às funções contínuas em $C(X^*)$ que se anulam no infinito, isto é, $C_0(X) = M_0$ em $C(X^*)$. Por outro lado, como esses dois anéis se relacionam entre si?

Podemos escrever qualquer função $f \in C(X^*)$ de maneira única na forma

$$f = \underbrace{(f - f(\infty))}_{\in C_0(X)} + \underbrace{f(\infty)}_{\in \mathbb{R}},$$

portanto $C(X^*) = C_0(X) \oplus \mathbb{R}$. Escrito dessa forma, note que o produto pode ser visto como

$$(f, \lambda) \cdot (g, \mu) = (fg + \mu f + \lambda g, \lambda\mu)$$

e a unidade é dada por $(0, 1)$.

Esse tipo de construção será bastante útil, pois anéis sem unidade podem ter propriedades indesejadas. Por exemplo, note que os ideais maximais de $C_0(\mathbb{R})$ são os ideais da forma M_a para $a \in \mathbb{R}$. Se $C_c(\mathbb{R})$ denota o espaço das funções contínuas de suporte compacto, então ele não está contido em nenhum ideal maximal, portanto $C_0(\mathbb{R})/C_c(\mathbb{R})$ é um anel que não possui ideal maximal!

3 Espaços Vetoriais Normados

Para que este material seja autocontido, iremos fazer um *crash course* em Análise Funcional. A maioria dos resultados serão enunciados sem demonstração, e o leitor interessado poderá consultar qualquer livro, como por exemplo .

Espaços vetoriais de dimensão infinita aparecem em abundância na Matemática: espaços de sequências, espaços de funções, espaços de medidas, etc. Dessa forma, é natural buscarmos algumas ferramentas para estudá-los. Por simplicidade, todos os espaços vetoriais que veremos serão sobre os complexos.

Definição 4. Chamamos de **espaço vetorial normado** o par $(V, \|\cdot\|)$ no qual V é um espaço vetorial e $\|\cdot\| \colon V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ é a função **norma**, que deve satisfazer:

- $\|v\| = 0 \iff v = 0$;
- $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$;
- $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Além disso, se V é completo na métrica induzida pela norma, então dizemos que V é um **espaço de Banach**.

Diferentemente do caso de dimensão finita, o dual (algébrico) de um espaço vetorial é muito maior do que o espaço original. Além disso, um problema é que os funcionais lineares não necessariamente são contínuos. Assim, para um espaço normado V, nós definimos o seu **espaço dual (contínuo)**, denotado por V^*, como o espaço de todos os funcionais lineares limitados $f\colon V \to \mathbb{C}$. Note que podemos induzir em V^* uma norma definida por $\|f\| := \sup_{\|v\|\leq 1}|f(v)|$. Além disso, V^* será sempre um espaço de Banach.

O primeiro teorema fundamental da Análise Funcional é o Teorema de Hahn-Banach.

Teorema 5 (Teorema de Hahn-Banach)**.** *Seja V um espaço normado e W um subespaço vetorial. Se $f\colon W \to \mathbb{C}$ é um funcional linear, então existe uma extensão $F\colon V \to \mathbb{C}$ de mesma norma, isto é:*

- *Para todo $w \in W$, $F(w) = f(w)$;*
- $\|F\| = \sup_{v\in V}|F(v)| = \sup_{w\in W}|f(w)| = \|f\|$.

Sua demonstração é uma aplicação do Lema de Zorn, mas suas consequências são diversas. A primeira delas, é o seguinte resultado.

Corolário 6. *Seja V um espaço normado e $v \in V$ um elemento não-nulo. Então existe um $f \in V^*$ tal que $f(v) = 1$.*

Demonstração. Defina em $W = \mathbb{C}v$ o funcional $\tilde{f}(\lambda v) = \lambda$. Pelo teorema de Hahn-Banach, podemos estendê-lo para uma $f\colon V \to \mathbb{C}$. ∎

Definição 7. Sejam A e B dois conjuntos quaisquer e S uma família de funções de A em B. Dizemos que S **separa pontos** se, para qualquer par $a, a' \in A$, existe $f \in S$ tal que $f(a) \neq f(a')$.

Corolário 8. *O espaço dual V^* separa pontos.*

Demonstração. Dados w, $v \in V$ distintos, se $w \in \mathbb{C}v$, o funcional acima separa v e w. Caso contrário, defina em $W = \mathbb{C}v + \mathbb{C}w$ o funcional $\tilde{f}(\lambda v + \mu w) = \lambda$. Pelo teorema de Hahn-Banach, podemos estendê-lo para uma $f\colon V \to \mathbb{C}$. ∎

Muitos argumentos em $\mathbb{R}^n$, ou mais geralmente em espaços vetoriais em dimensão finita, começam por utilizar a compacidade da bola unitária fechada. Infelizmente, isso não ocorre com espaços vetoriais de dimensão infinita.

Teorema 9 (Riesz)**.** *Um espaço vetorial normado V tem dimensão finita se, e somente se, a bola unitária B é compacta.*

Assim, é natural criarmos uma nova topologia em V que haja mais compactos[5].

Definição 10. Seja V um espaço vetorial normado. Definimos a **topologia fraca** em V como sendo a topologia mais fraca na qual todos os funcionais $f\colon V \to \mathbb{C}$ são contínuos.

Infelizmente, essa topologia ainda não é tão boa quando desejamos. Com efeito, a bola unitária é compacta se e somente se o espaço é **reflexivo**. Desse modo, nós definimos uma nova topologia, a qual terá a propriedade que desejamos.

Definição 11. Seja V um espaço vetorial normado e V^* seu dual. Então podemos definir *em* V^* a **topologia fraca*** como sendo a topologia mais fraca na qual as aplicações $\mathrm{Ap}_a\colon f \mapsto f(a)$ são contínuas.

Note que convergência $f_n \to f$ na topologia fraca* equivale a convergência pontual. Além disso, a convergência pontual nada mais é do que a convergência no espaço $\prod_{v\in V} \mathbb{C}$ com respeito à topologia do produto. Finalmente, temos o tão desejado resultado.

Teorema 12 (Teorema de Banach-Alaoglu)**.** *Seja V um espaço vetorial normado e V^* seu dual. Então a bola unitária fechada $B \coloneqq \{f \in V^* \mid \|f\| \leq 1\}$ é compacta na topologia fraca*.*

A demonstração desse resultado é uma aplicação do Teorema de Tychonoff, usando as ideias comentadas acima. Por fim, iremos fazer mais dois comentários adicionais.

Seja (v_n) uma sequência de vetores em V. Dizemos que a série $\sum v_n$ converge absolutamente se $\sum\|v_n\|$ converge em $\mathbb{C}$. A principal vantagem em utilizar espaços de Banach é a possibilidade de garantir convergência de séries.

Teorema 13. *Seja V um espaço de Banach e (v_n) uma sequência de vetores em V tal que $\sum v_n$ converge absolutamente. Então $\sum v_n$ coneverge.*

Veremos abaixo que isso nos permite somar progressões geométricas e exponenciais de elementos de V.

Como estamos estudando anéis de funções contínuas, precisaremos de uma generalização do Teorema da Aproximação de Weierstrass, da Análise Real.

Teorema 14 (Teorema de Stone-Weierstrass)**.** *Seja X um espaço topológico copmacto Hausdorff e S um subconjunto de $C(X,\mathbb{C})$ que separa pontos. Então $C^*(S) = C(X,\mathbb{C})$, onde $C^*(S)$ é a menor C^*-álgebra com unidade que contém S.*

[5] Por exemplo, argumentos de otimização serão feitos de maneira mais natural.

4 Definições Básicas e Exemplos

Finalmente, iremos começar a relacionar álgebra e análise. Em tudo o que segue, é importante pensar nos seguintes exemplos.

Exemplo 15.

- Se $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ denota o anel das matrizes $n \times n$, então ele forma uma álgebra de Banach com a norma do operador. Mais ainda, ele é um exemplo de uma C^*-álgebra não comutativa com unidade.

- O primeiro exemplo pode ser generalizado da seguinte forma. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Banach qualquer, e $B(\mathcal{H})$ o anel dos operadores limitados em $\mathcal{H}$. Então, como comentamos acima, $B(\mathcal{H})$ será o exemplo canônico de C^*-álgebra. Mais ainda, toda subálgebra fechada topologicamente e fechada com respeito à adjunção será também uma C^*-álgebra chamada de **C^*-álgebra concreta**.

- Seja $L^1(\mathbb{R})$ o anel de funções integráveis cuja operação de produto é a convolução dada por
$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$
Então, pela desigualdade da convolução de Young, sabemos que $L^1(\mathbb{R})$ é uma álgebra de Banach comutativa.

- Se $L^\infty(\mathbb{C})$ denota o anel das funções essencialmente limitadas, cujo produto é o produto pontual e a norma é dada pelo supremo, então temos mais um exemplo de uma C^*-álgebra comutativa.

- Tudo que fizemos com L^1 e L^∞ pode ser feito com qualquer espaço de medida (Ω, Σ, μ). Em particular, os espaços de sequências $\ell^1(\mathbb{C})$ e $\ell^\infty(\mathbb{C})$ nos dão novos exemplos.

- Se X é um espaço topológico, então $C_b(X, \mathbb{C})$ (o anel das funções contínuas limitadas de X em $\mathbb{C}$) é uma C^*-álgebra comutativa. Se X é localmente compacto, o mesmo pode ser dito de $C_0(X, \mathbb{C})$ e se X é compacto, esses anéis se resumem todos a $C(X, \mathbb{C})$.

Iremos construir paralelamente a teoria de álgebras com unidade e álgebras sem unidade. Como veremos, em geral, a segunda reduz-se à primeira, mas é importante evidenciar essa dependência.

Definição 16. Uma **álgebra de Banach** A é uma $\mathbb{C}$-álgebra dotada de uma norma $\|\cdot\|\colon A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, que é também um espaço de Banach como um $\mathbb{C}$-espaço vetorial normado. Além disso, a norma deve satisfazer:

- $\|a \cdot b\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$.

Uma álgebra de Banach com unidade deve, além disso, satisfazer:

- $\|1\| = 1$.

Piada 1. Uma $*$-álgebra de Banach A é uma álgebra de Banach dotada de uma involução semi-linear que é também um anti-homomorfismo.

A definição acima pode parecer desnecessariamente complicada. De fato, uma $*$-álgebra de Banach é apenas uma álgebra de Banach com um operador $*\colon A \to A$ tal que

- $(a+b)^* = a^* + b^*$;
- $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$;
- $a^{**} = a$;
- $(ab)^* = b^* a^*$.

Definição 17. Uma C^*-álgebra[6] é uma $*$-álgebra de Banach tal que

$$\|a^* a\| = \|a\|^2.$$

Note que, neste caso,

$$\|a\|^2 = \|a^* a\| \leq \|a^*\| \|a\|,$$

de onde segue que $\|a^*\| = \|a\|$. Também generalizamos algumas definições da álgebra linear.

- Se $a = a^*$, dizemos que a é **autoadjunto**;
- Se $a^* a = a a^*$, dizemos que a é **normal**;
- Se $u^* u = u u^* = 1$, dizemos que u é **unitário**.

A coleção de todos os elementos autoadjuntos formam uma $\mathbb{R}$-álgebra denotada por A_{sa}. Qualquer elemento $a \in A$ pode ser escrito da forma $a = b + ic$ para b, $c \in A_{\mathrm{sa}}$. Com efeito, note que $b = \frac{a+a^*}{2}$ e $c = \frac{a-a^*}{2i}$ são os elementos desejados. Além disso, se $u \in A$ é unitário, então $\|u\|^2 = \|u^* u\| = 1$.

Como vimos acima, um anel sem identidade pode não ter nenhum ideal maximal. Para fugir desse comportamento, temos o seguinte lema.

Lema 18. *Seja A uma álgebra de Banach sem unidade. Então existe uma álgebra de Banach com unidade $\tilde{A} \coloneqq A \oplus \mathbb{C}$ na qual A é um ideal maximal de codimensão 1. Além disso:*

[6] Na verdade, historicamente, uma álgebra dessa forma foi chama de uma B^*-álgebra e surgiu antes da denominação do Segal, mas posteriormente foi mostrado que as duas definições eram equivalentes. Assim, concluímos que, apesar de tudo, os matemáticos ainda conhecem a ordem alfabética.

- *Se A é comutativo, então $\tilde{A}$ é comutativo.*
- *Se A é uma C^*-álgebra, então $\tilde{A}$ é uma C^*-álgebra.*

Demonstração. Note que temos a inclusão $A \ni a \mapsto L_a \in B(A)$, onde $L_a(b) = ab$. Assim, a álgebra $\tilde{A}$ é a álgebra dos elementos $L_a + \lambda I$, e temos as operações:

- $(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)$;
- $\|(a, \lambda)\| = \|a\| + |\lambda|$

É um exercício rotineiro mostrar que $\tilde{A}$ satisfaz todas as propriedades de uma álgebra de Banach. Além disso, se A é comutativa, então $\tilde{A}$ também é. Por fim, se A é uma C^*-álgebra, a interpretação acima se torna ainda melhor. De fato, com as propriedades

- $(a, \lambda)^* = (a^*, \overline{\lambda})$;
- $\|(a, \lambda)\| = \sup\limits_{\|b\| \leq 1} \|ab + \lambda b\|$,

nós vemos que $\|(a, 0)\| = \|a\|$, pois $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ implica que $\|L_a\| \leq \|a\|$, e $\|a^*a\| = \|a\|^2$ implica que $\|L_a\| \geq \|a\|$. A maioria das propriedades são rotineiras, com exceção da identidade B^*. Por outro lado, a identidade segue do fato que

$$\begin{aligned}
\|(a, \lambda)\|^2 &= \sup_{\|b\| \leq 1} \|ab + \lambda b\|^2 \\
&= \sup_{\|b\| \leq 1} \|b^*a^*ab + \lambda b^*a^*b + \overline{\lambda} b^*ab + |\lambda|^2 b^*b\| \quad (\text{pois } A \text{ é } C^*\text{-álgebra}) \\
&\leq \sup_{\|b\| \leq 1} \|a^*ab + \lambda a^*b + \overline{\lambda} ab + |\lambda|^2 b\| \\
&= \|(a^*a + \lambda a^* + \overline{\lambda} a, |\lambda|^2)\| \\
&= \|(a^*, \overline{\lambda})(a, \lambda)\| \leq \|(a^*, \overline{\lambda})\|\|(a, \lambda)\|.
\end{aligned}$$

Daí, segue que $\|(a, \lambda)\| = \|(a^*, \overline{\lambda})\|$ e vale a identidade B^*. ■

5 O Espectro

A menos que seja explicitamente dito, iremos assumir que a álgebra de Banach A possui unidade.

Seja A uma álgebra de Banach. Dizemos que $a \in A$ é invertível se existe $b \in A$ tal que $ab = ba = 1$, e denotamos por

$$\mathrm{Inv}(A) := \{a \in A \mid \text{ é invertível}\}$$

o grupo dos elementos invertíveis. Além disso, generalizando a definição da álgebra linear, definimos o **espectro** de a por

$$\sigma(a) = \sigma_A(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda 1 - a \in \mathrm{Inv}(A)\}.$$

Exemplo 19. Se $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ é uma matriz, então o espectro de A é exatamente o conjunto de seus autovalores.

Exemplo 20. Considere em $\ell^\infty(\mathbb{C})$ o operador shift dado por $f(e_n) = e_{n+1}$, ou seja, $f(a_1, a_2, \dots) = (0, a_1, \dots)$. Então 0 não é autovalor de f, mas está no espectro. Assim, embora seja uma generalização natural da noção de autovalores, ela não necessariamente coincide com a definição inicial.

Exemplo 21. Se K é um conjunto compacto Hausdorff e $f \in C(K)$, então $\sigma(f) = \mathrm{im}(f)$.

Dessa forma, o espectro generaliza tanto os autovalores quanto a noção de imagem de uma função.

Teorema 22 (Propriedade Espectral)**.** *Seja $p \in \mathbb{C}[z]$ e $a \in A$ um elemento de uma álgebra. Então*

$$\sigma(p(a)) = p(\sigma(a)).$$

Demonstração. Para um $\lambda \in \mathbb{C}$, podemos fatorar

$$p(z) - \lambda = \prod_{i=1}^{n} (z - \mu_i).$$

Portanto

$$p(a) - \lambda 1 = \prod_{i=1}^{n} (a - \mu_i 1).$$

Como os operadores comutam, então $p(a) - \lambda 1$ é invertível se e somente se todos os $a - \mu_i 1$ forem invertíveis. Assim, $\lambda \in \sigma(p(a))$ se e somente se $\mu_i \in \sigma(a)$ para algum i. Como $p(\mu_i) = \lambda$, isso ocorre se e somente e $\lambda \in p(\sigma(a))$. ∎

Como indicamos na seção anterior, o poder das álgebras de Banach vem da possibilidade em usar séries de potências.

Proposição 23. *Seja A uma álgebra de Banach e $a \in A$ tal que $\|a\| \leq 1$. Então $1 - a \in \mathrm{Inv}(A)$ e*

$$(1 - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n.$$

Demonstração. Note que $\sum_{n=0}^{\infty} \|a^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|a\|^n = (1 - \|a\|)^{-1} < \infty$. Logo a série converge absolutamente, de onde segue que a série $\sum a^n$ converge. Por fim, note que

$$(1 - a) \left(\sum_{n=1}^{N} a^n \right) = \left(\sum_{n=1}^{N} a^n \right) (1 - a) = 1 - a^{N+1},$$

converge para 1 quando $N \to \infty$. ∎

Obs. Argumentar de maneira informal com essa identidade nos permite chegar a conclusões interessantes. Seja A uma álgebra e $a, b \in A$ elementos quaisquer. Vamos "supor" que $\|a\|, \|b\| \leq 1$ e escrever

$$(1 - ab)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (ab)^n$$
$$(1 - ba)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (ba)^n.$$

Note, então, que

$$b\left(1 + ab + (ab)^2 + \cdots\right) a = ba + (ba)^2 + (ba)^3 + \cdots ,$$

de onde segue que $1 + b(1 - ab)^{-1}a$ é a inversa de $(1 - ba)$.

Embora tenhamos usado a norma, o leitor é convidado a conferir que isso é válido para *qualquer* álgebra. Em particular, vale que $\sigma(ab) \setminus \{0\} = \sigma(ba) \setminus \{0\}$

Assim como $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ é um subconjunto aberto de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, vale que o grupo dos invertíveis é sempre um subconjunto aberto. Infelizmente, agora não podemos usar o determinante para concluir esse resultado.

Proposição 24. *Se A é uma álgebra de Banach, então $\mathrm{Inv}(A)$ é aberto e $a \mapsto a^{-1}$ é diferenciável.*

Demonstração. Suponha que $a \in \mathrm{Inv}(A)$. Desejamos encontrar uma bola ao redor de a que ainda está em $\mathrm{Inv}(A)$. Se $b \in A$, então podemos escrever

$$b = a - (a - b) = a(1 - (1 - a^{-1}b)).$$

Portanto b é invertível se $\|1 - a^{-1}b\| \leq 1$, e isso ocorre quando $\|a - b\| \leq \|a^{-1}\|^{-1}$.

Além disso, como $a + h = a(1 + a^{-1}h)$, então

$$\begin{aligned}(a + h)^{-1} &= (1 + a^{-1}h)^{-1}a^{-1} \\ &= \left(1 - a^{-1}h + (a^{-1}h)^2 - \cdots\right) a^{-1} \\ &= a^{-1} - a^{-1}ha^{-1} + (a^{-1}h)^2a^{-1} - \cdots .\end{aligned}$$

Note que $d_a(h) = -a^{-1}ha^{-1}$ é uma transformação linear e que

$$(a + h)^{-1} - a^{-1} - d_a(h) = \left(\sum_{n=2}^{\infty} (-a^{-1}h)^n\right) a^{-1}.$$

Portanto para provar a diferenciabilidade, basta ver que

$$\begin{aligned}\frac{\|(a+h)^{-1}-a^{-1}-d_a(h)\|}{\|h\|} &\leq \frac{\|\sum_{n=2}^{\infty}(-a^{-1}h)^n\|\|a^{-1}\|}{\|h\|}\\ &\leq \|a^{-1}\|\frac{\sum_{n=2}^{\infty}\|a^{-1}h\|^n}{\|h\|}\\ &= \|a^{-1}\|\frac{\|a^{-1}h\|^2}{\|h\|(1-\|a^{-1}h\|)}\\ &\leq \frac{\|a^{-1}\|^3\|h\|}{1-\|a^{-1}h\|}\to 0,\end{aligned}$$

quando $h \to 0$. ■

Vamos nos concentrar agora no estudo do espectro. Chamamos de **resolvente** o complementar do espectro, e $R_a(\lambda) = (\lambda 1 - a)^{-1}$ de **função resolvente**.

Note, que, não apenas diferenciável, mas R_a é também analítica no resolvente. De fato, poderíamos ter feito isso já na proposição acima (pois $a \mapsto a^{-1}$ é analítica), mas basta notar que, se $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ está no resolvente e $|\lambda - \lambda_0| < \|(\lambda_0 1 - a)^{-1}\|^{-1}$, então

$$R_a(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda - \lambda_0)^n(\lambda_0 1 - a)^{-n-1}$$

é uma expansão em série de potências de R_a ao redor de λ_0. Note também que provamos, implicitamente, que o resolvente é um conjunto aberto.

Por fim, observe que se $\lambda > \|a\|$, então $\|\frac{1}{\lambda}a\| < 1$, de onde segue que $1 - \frac{1}{\lambda}a$ é invertível e λ está no resolvente. O que acabamos de provar é importante o bastante para merecer ser enunciado.

Teorema 25. *Seja A uma álgebra de Banach e $a \in A$. Então $\sigma(a)$ é um conjunto compacto de $\mathbb{C}$ contido no disco de centro na origem e raio $\|a\|$. Além disso, a função resolvente $R_a(\lambda) = (\lambda 1 - a)^{-1}$ é analítica em todo o resolvente.*

Vendo $p(z) = z$ como um elemento da álgebra $\mathbb{C}(z)$, vale que $\sigma(p) = \emptyset$. Felizmente, essa patologia não ocorre no caso em que estamos estudando.

Teorema 26 (Teorema Fundamental da Álgebra de Banach)**.** *Seja A uma álgebra de Banach e $a \in A$. Então $\sigma(a)$ é um conjunto não vazio.*[7]

Demonstração. A demonstração é uma adaptação da prova do Teorema Fundamental da Álgebra usando o Teorema de Liouville. Mais ainda, outras provas podem ser feitas adaptando outros métodos. Com efeito, suponha que $\sigma(a) = \emptyset$ e seja $f\colon A \to \mathbb{C}$ um funcional linear limitado. Então $f \circ R_a\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função inteira. Além disso,

[7] Não apenas o nome e o enunciado são semelhantes, mas o Teorema Fundamental da Álgebra é um caso particular desse, bastando aplicá-lo para $A = \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

se $|\lambda| \to \infty$, então $\|(\lambda 1 - a)^{-1}\| \to 0$ e $f(R_a(\lambda)) \to 0$. Desse modo, segue que $f \circ R_a$ é limitado e, pelo Teorema de Liouville, constante. Como o limite no infinito é 0, então $f \circ R_a = 0$. Como isso ocorre para todo funcional limitado f, então segue do Corolário 6 que $(\lambda 1 - a)^{-1} = 0$, o que é um absurdo! ∎

Corolário 27 (Teorema de Gelfand-Mazur)**.** *A única álgebra de Banach na qual todo elemento possui inversa é $\mathbb{C}$.*

Demonstração. Com efeito, seja A como no enunciado acima e $a \in A$. Então existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda 1 - a$ não é invertível, ou seja $a = \lambda 1$, e concluímos que $A = \mathbb{C}$ ∎

Lembrando que $M_n(\mathbb{C})$ é uma álgebra simples (ou seja, os únicos ideais bilaterais são os triviais), é natural se perguntar como essa definição se comporta para álgebras de Banach. Nós vamos dizer que uma álgebra de Banach é simples se os únicos ideais bilaterais *fechados* são os triviais.

Teorema 28. *A única álgebra de Banach comutativa simples é $\mathbb{C}$.*

Demonstração. Seja A como no enunciado e $a \in A$ um elemento qualquer. Se $\lambda \in \sigma(a)$, então $I = \overline{(\lambda 1 - a)A}$ é um ideal bilateral (pois A é comutativo) fechado. Por outro lado, $1 \notin I$, pois, como nenhum elemento da forma $(\lambda 1 - a)b$ é invertível para nenhum $b \in A$, então

$$\|1 - (\lambda 1 - a)b\| \geq 1,$$

caso contrário

$$1 - (1 - (\lambda 1 - a)b) = (\lambda 1 - a)b$$

é invertível. Portanto I é um ideal bilateral próprio fechado. Ou seja, é o ideal nulo. Assim, $\lambda 1 - a = 0$, de onde segue que $A = \mathbb{C}$. ∎

Defina o **raio espectral** de a por

$$\rho(a) := \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|.$$

Como vimos anteriormente $\rho(a) \leq \|a\|$. Mais ainda, note que, se $\alpha \in \sigma(a)$ é um elemento tal que $|\alpha| = \rho(a)$, então $\alpha^n \in \sigma(a^n)$ (pela propriedade espectral) e $\rho(a) = |\alpha| \leq \rho(a^n)^{1/n} \leq \|a^n\|^{1/n}$. Além disso, vale que $\rho(a^*) = \rho(a)$.

Exemplo 29. Se K é um espaço topológico compacto Hausdorff e $f \in C(K)$, então $\rho(f) = \|f\|_\infty$. Assim, $\rho(f) = \|f\|$ neste caso.

Vejamos como se comporta o espectro dos elementos especiais.

Lema 30. *Seja A uma álgebra de Banach. Se $u \in A$ é um elemento unitário, então $\sigma(u) \subseteq S^1$ e, se $a \in A$ é autoadjunto, então $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.*

Demonstração. Como um elemento unitário é invertível, então $0 \notin \sigma(u)$. Além disso, se $\lambda \in \sigma(u)$ é um outro elemento, então $\lambda^{-1} \in \sigma(u^{-1}) = \sigma(u^*)$. Desse modo, vale que $|\lambda| \leq \|u\| = 1$ e $|\lambda^{-1}| \leq \|u^*\| = 1$, de onde segue que $|\lambda| = 1$.

Novamente, usaremos um truque com série de potências. Para qualquer $a \in A$, podemos definir

$$e^a := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n.$$

Se a é autoadjunto, então e^{ia} é unitário. Com efeito,

$$(e^{ia})^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-ia)^n = e^{-ia} = (e^{ia})^{-1}.$$

Por fim, se $\lambda \in \sigma(a)$, então $e^{i\lambda} \in \sigma(e^{ia})$. Pela primeira afirmação, segue que $|e^{i\lambda}| = 1$, logo $\lambda \in \mathbb{R}$, como desejávamos. ∎

Exemplo 31. Se $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ é uma matriz, então $\rho(A)$ também é chamado de seu raio espectral, e é definido como sendo o maior autovalor. Note que ele nem sempre coincide com a norma. De fato, se

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

então $\|A\| = 1$, mas $\rho(A) = 0$, pois $A^2 = 0$. Por outro lado, ainda vale que $\rho(A) = \|A^2\|^{1/2} = \lim \|A^n\|^{1/n}$.

Teorema 32 (Fórmula de Gelfand)**.** *Se a é um elemento de uma álgebra de Banach A, então*

$$\rho(a) = \lim \|a^n\|^{1/n} = \inf \|a^n\|^{1/n}.$$

Demonstração. Com o que comentamos acima, sabemos que

$$\rho(a) \leq \inf \|a^n\|^{1/n} \leq \liminf \|a^n\|^{1/n}.$$

Por outro lado, note que

$$(\lambda 1 - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} a^n$$

é uma série de potências ao redor do infinito. Assim, podemos usar o seguinte resultado de análise complexa (que admite generalização para espaços de Banach).

Fato. Se $\sum a_n z^n$ é uma série de potências com raio de convergência ρ, então para qualquer $r < \rho$, a série de potências converge absolutamente e uniformemente em $|z| \leq r$.

Dessa forma, se $r > \rho(a)$, então a série acima converge absolutamente em $|\lambda| \geq r$. Tomando $\lambda = r$, a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^{-n-1} \|a^n\|$$

converge. Isso significa que $\limsup_n (r^{-n-1}\|a^n\|)^{1/n} \leq 1$, ou seja, $\limsup \|a^n\|^{1/n} \leq r$. Como isso vale para todo $r > \rho$, concluímos que

$$\limsup \|a^n\|^{1/n} \leq \rho(a) \leq \inf \|a^n\|^{1/n} \leq \liminf \|a^n\|^{1/n},$$

de onde segue o resultado. ■

Por fim, iremos enunciar um lema que será útil na próxima seção. Ele nos dirá, entre outras coisas, que, embora seja possível que uma álgebra de Banach comutativas sem unidade não possua ideais maximais, o mesmo é falso para C^*-álgebras.

Lema 33. *Se A uma C^*-álgebra e $a \in A$ um elemento normal, então $\rho(a) = \|a\|$. Em particular, se A é C^*-álgebra comutativa, vale que $\rho(a) = \|a\|$ para todo $a \in A$.*

Demonstração. Se $a \in A$ é auto adjunto, então $\|a\|^2 = \|a^*a\| = \|a^2\|$. Desse modo, vemos que

$$\rho(a) = \lim \|a^{2^n}\|^{1/2^n} = \|a\|.$$

Suponha, agora, que $a \in A$ é normal. Então

$$\begin{aligned} \rho(a)^2 \leq \|a\|^2 &= \|a^*a\| \\ &= \rho(a^*a) \\ &= \lim \|(a^*a)^n\|^{1/n} \\ &\leq \lim \|(a^*)^n\|^{1/n} \lim \|a^n\|^{1/n} \\ &= \rho(a)^2, \end{aligned}$$

de onde segue a igualdade. A segunda afirmação é imediata pois é uma C^*-álgebra todo elemento é normal. ■

Se A é uma álgebra de Banach sem unidade, então podemos extendê-la para a álgebra de Banach $\tilde{A}$ como feito na seção anterior. Nesse caso, definimos $\sigma_A(a) := \sigma_{\tilde{A}}(a)$. Note que $0 \in \sigma(a)$ para todo $a \in A$.

6 Representação de Gelfand

Vamos agora ver as relações entre topologia e álgebra. Um caráter em uma álgebra de Banach A é um homomorfismo (de álgebras de Banach) não-nulo $\tau \colon A \to \mathbb{C}$. Visto de outra maneira, um caráter é um funcional linear limitado multiplicativo. A coleção de todos os caráteres é denotada por $\Omega(A)$ e chamada de **espaço de caráteres** ou **espaço ideal maximal**. Esse nome é justificado pelo próximo teorema.

Teorema 34. *Seja A uma álgebra de Banach abeliana.*

(1) Se $\tau \in \Omega(A)$, então $\|\tau\| = 1$;

(2) A função $\tau \mapsto \ker \tau$ nos dá uma bijeção entre $\Omega(A)$ e $\operatorname{Specm} A$.

Demonstração.

(1) Note que, se a é invertível, então $\tau(a)$ também é, pois $\tau(a)\tau(a^{-1}) = \tau(aa^{-1}) = 1$. Como $\tau(\tau(a)1 - a) = 0$, então $\tau(a) \in \sigma(a)$. Desse modo, $|\tau(a)| \leq \rho(a) \leq \|a\|$ e $\|\tau\| \leq 1$. Por outro lado, $\tau(1) = 1$, de onde segue a igualdade.

(2) Primeiramente, vejamos que $\ker \tau$ é um ideal maximal. Com efeito, como τ é não nulo, então ele é sobrejetivo, e vale que $A/\ker \tau = \mathbb{C}$. Como estamos, em particular, em um anel comutativo, vale que $\ker \tau$ é um ideal maximal.

Vamos agora provar a injetividade. Se $\tau_1 \neq \tau_2$, então existe $a \in A$ tal que $\tau_1(a) \neq \tau_2(a)$. Desse modo, $\tau_1(\tau_1(a)1 - a) = 0$, mas $\tau_2(\tau_1(a)1 - a) \neq 0$, de onde segue que os núcleos são distintos. Por fim, vamos provar a sobrejetividade. Seja $M \triangleleft A$ um ideal maximal. Como $M \subseteq \overline{M} \subsetneq A$ (pois $1 \notin \overline{M}$), então M é fechado, de onde segue que A/M é uma álgebra de Banach. Assim, podemos usar o Teorema de Gelfand-Mazur para concluir que $A/M = \mathbb{C}$, e a projeção $\pi \colon A \to A/M = \mathbb{C}$ é o caráter tal que $\ker \pi = M$. ■

Dado o nosso espaço ideal maximal, podemos recuperar os espectros de cada elemento $a \in A$. Desse modo, ele também é chamado de **espectro** de A.

Teorema 35. *Seja A uma álgebra de Banach abeliana e $a \in A$ um elemento qualquer. Então*

$$\sigma(a) = \{\tau(a) \mid \tau \in \Omega(A)\}.$$

Se a álgebra não tiver unidade, então há um resultado análogo no qual basta adicionar ao lado direito o 0 (que representa o "caráter no infinito"[8]) e o leitor é convidado a demonstrá-lo.

Demonstração. Já vimos acima que $\{\tau(a) \mid \tau \in \Omega(A)\} \subseteq \sigma(a)$. Resta ver a inclusão contrária. Se $\lambda \in \sigma(a)$, então $I = (\lambda 1 - a)A$ é um ideal próprio e está contido em um ideal maximal M. Se $\tau \in \Omega(A)$ é o caráter que corresponde a esse ideal maximal, então $\tau(\lambda 1 - a) = 0$, ou seja, $\tau(a) = \lambda$, como desejávamos. ■

Como vimos acima, $\Omega(A) \subseteq A^*$, então podemos induzir a topologia fraca*. Felizmente, a topologia é muito bem comportada, como veremos abaixo.

Teorema 36. *Se A é uma álgebra de Banach comutativa com unidade, então $\Omega(A)$ é compacto e Hausdorff. Se A é uma álgebra de Banach comutativa sem unidade, então $\Omega(A)$ é localmente compacto Hausdorff.*

[8] Esse nome será justificado na demonstração do próximo teorema.

Demonstração. Pelo Teorema 34, sabemos que $\Omega(A)$ está contido na bola unitária fechada B de A^*, que é compacta pelo Teorema de Banach-Alaoglu. Logo é suficiente provar que ela é fechada. Com efeito, se temos uma rede $(\tau_i)_{i\in I}$ com $\lim \tau_i = \tau$, então

$$\begin{aligned}
\tau(\lambda a + b) = \lim \tau_i(\lambda a + b) = \lim \lambda\tau_i(a) + \lim \tau_i(b) = \lambda\tau(a) + \tau(b)\\
\tau(ab) = \lim \tau_i(ab) = \lim \tau_i(a) \lim \tau_i(b) = \tau(a)\tau(b)\\
\tau(1) = \lim \tau_i(1) = 1.
\end{aligned}$$

Para ver que o espaço é Hausdorff, basta lembrar que a topologia fraca* é Hausdorff.

Se A não tem unidade, estão nós nos voltamos para a álgebra $\tilde{A}$. Note que todo caráter $\tau \in \Omega(A)$ se estende *de maneira única* para um caráter $\tilde{\tau} \in \Omega(\tilde{A})$. Com efeito, basta tomar $\tilde{\tau}(a, \lambda) = \tau(a) + \lambda$. Por outro lado, temos um ideal maximal adicional em $\tilde{A}$ que é exatamente A! Desse modo, temos um caráter adicional τ_∞ tal que $\ker \tau_\infty = A$, e vale que

$$\Omega(\tilde{A}) = \{\tilde{\tau} \mid \tau \in \Omega(A)\} \cup \{\tau_\infty\}.$$

Mais ainda, observe que $\Omega(\tilde{A})$ é a extensão de Alexandroff de $\Omega(A)$! Desse modo, como $\Omega(\tilde{A})$ é Hausdorff, então $\Omega(A)$ é Hausdorff e localmente compacto, como desejávamos. ■

Note que temos um espaço topológico bastante interessante agora, e nós desejamos usá-lo para estudar o nosso anel. Desse modo, defina a **transformada de Gelfand** Γ de uma álgebra de Banach comutativa A em $C(\Omega(A))$[9] como sendo $\Gamma(a) = \hat{a}$ definida por

$$\hat{a} \colon \Omega(A) \to \mathbb{C}, \quad \hat{a}(\tau) = \tau(a).$$

Note que a topologia em $\Omega(A)$ é a topologia mais fraca que torna todas essas funções contínuas[10].

Finalmente, vejamos um resultado que prenuncia o teorema final, e cuja demonstração é simples pois já fizemos todo o trabalho duro[11].

Teorema 37 (Representação de Gelfand)**.** *Suponha que A é uma álgebra de Banach abeliana (não necessariamente com unidade) e $\Omega(A)$ é não-vazio. Então a transformação de Gelfand*

$$A \to C_0(\Omega(A)), \quad a \mapsto \hat{a}$$

é um homomorfismo de álgebras contrativo cuja imagem separa pontos e

$$\rho(a) = \|\hat{a}\|.$$

Além disso, essa transformação é injetiva se A é semi-simples, isto é, se $J(A) = \{0\}$.

[9]No caso sem unidade, $C_0(\Omega(A))$.

[10]Para o caso sem unidade, é necessário observar que o conjunto $\{\tau \in \Omega(A) \mid |\tau(a)| \geq \varepsilon\}$ é fechado na topologia fraca* e portanto é compacto, pois está na bola unitária B.

[11]Relaxe e aproveite!

Demonstração. É fácil ver que $\widehat{a+b} = \hat{a} + \hat{b}$ e $\widehat{ab} = \hat{a}\hat{b}$. Além disso, se existe unidade, então $\hat{1} = 1$ e, pelo Teorema 35, segue que $\|\hat{a}\| = \rho(a)$. Ainda não vimos que $\hat{a} \in C_0(\Omega(A))$ para uma álgebra sem unidade. Por outro lado, como $\Omega(\tilde{A}) = \Omega(A)^*$ é a extensão de Alexandroff, e o ponto infinito é dado pelo funcional φ_∞ que corresponde ao ideal maximal A em $\tilde{A}$. Assim, $\hat{a}(\varphi_\infty) = \varphi_\infty(a) = 0$ e $\hat{a} \in C_0(\Omega(A))$, pois C_0 é o espaço das funções que dão 0 no infinito! Sendo a coleção dos funcionais aplicação, ele deve separar pontos, e, para concluir a última afirmação, basta notar que $\ker \Gamma = J(A)$. ■

Utilizando a representação de Gelfand, a demonstração de alguns resultados pode se tornar simples. Por exemplo, se a e B são dois elementos uma álgebra de Banach A que comutam, então $\rho(a+b) \leq \rho(a) + \rho(b)$ e $\rho(ab) \leq \rho(a)\rho(b)$.

Continuando a analogia entre o espaço ideal maximal e o espectro, temos o seguinte teorema.

Teorema 38. *Seja A uma álgebra de Banach gerada por* 1 *e por a. Então A é abeliana e*

$$\hat{a}\colon \Omega(A) \to \sigma(a), \quad \tau \mapsto \tau(a)$$

é um homeomorfismo.

Demonstração. Como 1 comuta com a, então A é abeliana. Já sabemos que $\hat{a}$ é sobrejetiva, e para ver que é injetiva, note que se $\tau_1(a) = \tau_2(a)$, então $\tau_1 = \tau_2$, pois 1 e a geram A. Assim, sendo uma bijeção contínua entre dois espaços compactos Hausdorff, segue que $\hat{a}$ é um homeomorfismo. ■

Finalmente, vejamos a estrela do show.

Teorema 39 (Teorema da Representação de Gelfand-Naimark)**.** *Se A é uma C^*-álgebra comutativa, então*

$$\Gamma\colon A \to C_0(\Omega(A)), \quad a \mapsto \hat{a}$$

é um isomorfismo isométrico.

Demonstração. Primeiramente, suponha que A possua unidade. Como $\|\hat{a}\| = \rho(a) = \|a\|$, vemos que Γ é uma isometria, de onde segue que é injetiva. Note que, se $a \in A$ é autoadjunto, então $\tau(a) \in \sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$, logo $\hat{a}^* = \hat{a}$ (ou seja, imagem de autoadjunto é autoadjunto). Desse modo, para um elemento qualquer $a \in A$, podemos ele escrever ele da forma $a = b + ic$, onde b e c são autoadjuntos, e $\hat{a}^* = \hat{b} - i\hat{c} = \widehat{a^*}$. Desse modo, Γ também preserva a involução e $\operatorname{im}\Gamma$ é uma C^*-subálgebra de $C(\Omega(A))$ que separa pontos e contém todas as contantes. Pelo Teorema de Stone-Weierstrass, a transformação é sobrejetiva e concluímos a demonstração para esse caso.

Suponha, agora, que A não tenha unidade. Então podemos estendê-lo para $\tilde{A}$ e concluir que a imagem de A é isometricamente isomorfa a alguma C^*-subálgebra de $C(\Omega(\tilde{A}))$. Mais especificamente, $\Gamma(A)$ é composto pelas funções que se anulam em τ_∞, o que corresponde às funções em $C_0(\Omega(A))$, como desejávamos. ■

Note que, se a é um elemento normal, então ele gera uma C^*-álgebra comutativa. Assim, algumas estruturas são mais simples. Desse modo, a representação de Gelfand-Naimark generaliza tanto a transformada de Fourier quanto o Teorema Espectral para operadores normais.

Teorema 40. *Seja A uma C^*-álgebra e $a \in A$ um elemento normal. Então $C^*(a)$ é isometricamente isomorfo a $C(\sigma(a))$ de maneira canônica.*

Demonstração. Por um argumento análogo ao feito em Teorema 38, nós vemos que $\Omega(C^*(a))$ é isomorfo a $\sigma(a)$. Assim, o resultado segue o Teorema de Gelfand-Naimark. O isomorfismo será exatamente o único homomorfismo de $C(\sigma(a))$ em $C^*(a)$ que leva a inclusão $z\colon \sigma(a) \to \mathbb{C}$ em a. ∎

Isso nos permite generalizar o cálculo funcional da álgebra linear para elementos normais de uma C^*-álgebra.

Referências

[1] I. E. Segal, "Irreducible representations of operator algebras," *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 53, pp. 73–88, 1947.

[2] G. K. Pedersen, *C*-Algebras and Their Automorphism Groups.* San Diego: Academic Press, 2018.

[3] R. Engelking, *General Topology.* Berlin: Heldermann, 1989.

[4] K. R. Davidson, *C*-algebras by example.* Rhode Island: American Mathematical Society, 1996.

[5] P. Lax, *Functional Analysis.* New York: John Wiley & Sons, 2002.

[6] G. J. Murphy, *C*-Algebras and Operator Theory.* San Diego: Academic Press, 1990.