Sejam dadas duas R-algebras:

$$f : R \longrightarrow B$$
$$g : R \longrightarrow C.$$

Assim o produto tensorial $B \otimes_R C$ é "push out" de morfismos f e g e diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & R \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
B \arrow[dr, "f'"'] \arrow[rr, phantom, "\circlearrowright"] & & C \arrow[dl, "g'"] \\
 & B \otimes_R C &
\end{tikzcd}$$

é comutativa

Com $f'(b) = b \otimes 1$, $g'(c) = 1 \otimes_R c$.

A comutatividade da diagrama segue por ação de R (como modulo) em B e C.

Assim temos mapa $h : R \longrightarrow B \otimes_R C$, dada por $h = f' \circ f = g' \circ g$, facil ver que

$$h(r) = f(r) \otimes 1 = 1 \otimes g(r)$$

Portanto $B \otimes_R C$ com a "soma normal" e produto
$$(b \otimes c) \cdot (b' \otimes c') = bb' \otimes cc'$$ é um anel

e um R-algebra atraves $h : R \to B \otimes_R C$