Aula 9

Produtos tensoriais 2

<u>Lembrete</u>. Na aula pasada definimos a noção de produto tensorial de dois R-modulos M, N: um R-modulo $M \otimes_R N$ tal que:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{mapas bilineares} \\ M \times N \to P \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{c} \text{mapas lineares} \\ M \otimes_R N \to P \end{array} \right\}$$

para q.q. outro R-modulo P.

Sejam $f: M \to M'$, $g: N \to N'$ homomorfismos de R-modulos

Defina $h: M \times N \to M' \otimes_R N'$, por

$$(m, n) \longmapsto f(m) \otimes g(n)$$

Facil ver que h é bilinear, logo induz um homomorfismo $h': M \otimes_R N \to M' \otimes_R N'$, com $h'(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$, para todos $m \in M$, $n \in N$.

Vamos denotar h' por $f \otimes g$.

<u>Obs.</u> ~~Nes~~ Fixando R-modulo N, assim temos funtor $- \otimes_R N$: R-modulos $\to$ R-modulos

que associa: $M \in R\text{-modulos} \longrightarrow M \otimes_R N$

$f: M \to M'$ - morfismo $\longrightarrow M \otimes_R N \xrightarrow{f \otimes id} M' \otimes_R N$

Proposição [$- \otimes_R N$ é exato à Direita].

Seja $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ (*)

uma sequência exata de R-modulos, e N q.q. R-modulo. Assim

$$M' \otimes_R N \xrightarrow{f \otimes id_N} M \otimes_R N \xrightarrow{f \otimes id} M'' \otimes_R N \longrightarrow 0$$

é sequencia exata.

Prova. Seja P q.q. R-modulo. Aplicando $Hom_R(-, Hom_R(N,P))$ p/ (*) temos

$$0 \to Hom_R(M'', Hom_R(N,P)) \to Hom_R(M, Hom_R(N,P)) \to Hom_R(M', Hom_R(N,P))$$

é exata, mas $\underbrace{Hom_R(X, Hom_R(N,P)) \simeq Hom_R(X \otimes N, P)}_{\text{aula pasada}}$

Assim

$$0 \to Hom_R(M'' \otimes_R N, P) \to Hom_R(M \otimes_R N, P) \to Hom_R(M' \otimes_R N, P)$$

é exata p/ todo todo P $\Rightarrow$

(*) é exata tm 6.

$\boxed{C}$

Obs. Em geral, não é verdade que se $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ exata, assim

$$M' \otimes_R N \xrightarrow{f \otimes id} M \otimes_R N \xrightarrow{g \otimes id} M'' \otimes_R N$$ é exata tmb.

Contraexemplo Seja $R = \mathbb{Z}$, considere

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow[x \mapsto 2x \, = f]{} \mathbb{Z}$$

Se $N = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, assim

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{f \otimes id} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

não é exata, pois

$$(f \otimes id)(x \otimes y) = 2x \otimes y = x \otimes 2y = x \otimes 0 = 0$$

para todo $x \otimes y \in \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, logo $f \otimes id = 0$ //.

Definição Um R-modulo M é chamado plano se o funtor $- \otimes_R M$ é exato.

Obs. Como $- \otimes_R M$ é exato a direita, assim

M é plano $\iff$ $- \otimes_R M$ preserva injetoras

$\iff$ $f \otimes id : N \otimes_R M \longrightarrow N' \otimes_R M$ é injetivo para todo injetivo $f: N \longrightarrow N'$.

Exemplos:

1) Modulos livres são planos.

Se $M = \bigoplus_{i\in I} R$ — um modulo livre, assim para todo morfismo $f: N \to N'$ temos:

$$
\begin{tikzcd}
N \otimes_R \left(\bigoplus_{i\in I} R\right) \arrow[r, "f \otimes id"] \arrow[d, phantom, "\cong"] & N' \otimes_R \left(\bigoplus_{i\in I} R\right) \arrow[d, phantom, "\cong"] \\
\bigoplus_{i\in I} (N \otimes_R R) \arrow[d, phantom, "\cong"] & \bigoplus_{i\in I} (N \otimes_R R) \arrow[d, phantom, "\cong"] \\
\bigoplus_{i\in I} N \arrow[r, "\bigoplus_{i\in I} f"] & \bigoplus_{i\in I} N
\end{tikzcd}
$$

distribuição

unidade

logo se f injetor $\Rightarrow \bigoplus_{i\in I} f$ injetor

$\Rightarrow f \otimes id$ injetor $\Rightarrow M$ é plano //.

2) Se $I \triangleleft R$ ideal proprio em um dominio R.

Assim R/I é plano $\Leftrightarrow I = 0$ (Lista 3, Ex. 18)

3) Mostre que "plano" $\Rightarrow$ "livre de torsão"!

4) $M = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ não plano para $R = \mathbb{Z}$ (Ex. p/ casa).

Em particular quocientes de planos não precisa ser plano!!

5) Mostre que $\mathbb{Q}$ é modulo plano sobre $\mathbb{Z}$.

Álgebras

Seja $f: R \to B$ um homomorfismo dos aneis. Se $a \in R$ e $b \in R$, defina

$$a \cdot b = f(a)\, b$$

Logo B tem estrutura de R-modulo e estrutura de anel. Chamamos tais aneis R-álgebras.

<u>Def.</u> Uma <u>R-álgebra</u> é um anel B junto com homomorfismo de aneis $f: R \to B$.

<u>Def.</u> Se $f: R \to B$, e
$g: R \to C$, dois R-algebras

Assim um <u>homomorfismo</u> de <u>R-algebras</u>

$h: B \to C$ é homomorfismo dos aneis que tmb é um homomorfismo de R-modulos.

Dadas duas R-àlgebras B e C podemos formar seu produto tensorial

$$D = B \otimes_R C \text{ - um } R\text{-modulo.}$$

Temos que D é um anel comutativo, com

multiplicação: $(B \otimes_R C) \otimes (B \otimes_R C) \longrightarrow B \otimes_R C$

$$(b \otimes c) \otimes (b' \otimes c') \longmapsto (bb' \otimes cc')$$

soma:

$$(b \otimes c) + (b' \otimes c') \longmapsto (b + b' \otimes c + c')$$

Alem disso D é uma R-àlgebra com aplicação

$$a \longmapsto f(a) \otimes g(a)$$

$$R \longrightarrow B \otimes_R C$$

que é homomorfismo de aneis.

Def. Uma R-àlgebra B é *plana*, se B é plano como R-modulo.

Proposição Sejam: $f: R \to B$, $g: B \to C$ dois àlgebras planas

$\Rightarrow$ $g \circ f: R \to C$ é uma R-àlgebra plana.

Prova Devemos provar que C é R-modulo plano. Claro que C é R-modulo, com

$$a \cdot c = g(f(a))\,c, \quad \text{para todo } \begin{array}{l} a \in R \\ c \in C. \end{array}$$

Vamos ver que $- \otimes_R C$ é exato.

Seja $j : N \hookrightarrow N'$ um morfismo injetivo.

Como B é R-modulo plano, assim

$$j \otimes id : N \otimes_R B \longrightarrow N' \otimes_R B \quad \text{é injetivo.}$$

Temos que $N_B = N \otimes_R B$ é B-modulo, com

$$b \cdot (n \otimes b') := n \otimes bb', \quad \text{para } \begin{array}{l} b, b' \in B \\ n \in N \end{array}$$

Assim

$$\begin{tikzcd} j \otimes id : N \otimes_R B \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & N' \otimes_R B \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] \\ N_B \arrow[r] & N'_B \end{tikzcd}$$

injetivo na categoria de B-modulos.

Como C é plano (como B-modulo), Logo

$$(j \otimes id_B) \otimes id_C : (N \otimes_R B) \otimes_B C \hookrightarrow (N' \otimes_R B) \otimes_B C$$

é injetivo. Usando Exercicio 26, Liste 3 [Cancelamento

temos que $(N \otimes_R B) \otimes_B C \simeq N \otimes_R C$ e

$$(N' \otimes_R B) \otimes_B C \simeq N' \otimes_R C$$

Logo

$$\begin{tikzcd} (N \otimes_R B) \otimes_B C \arrow[r, "(j \otimes id_B) \otimes id_C"] \arrow[d, phantom, "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & (N' \otimes_R B) \otimes C \arrow[d, phantom, "\cong"] \\ N \otimes_R C \arrow[r, "j \otimes id_C"] & N' \otimes_R C \end{tikzcd}$$

comuta.

Assim $j \otimes id_C : N \otimes_R C \hookrightarrow N' \otimes_R C$

homomorfismo injetivo de B-modulos.

Mas B é $\cancel{R}$-àlgebra $\Rightarrow$ todo B-modulo é $\cancel{R}$-modulo.

$\Rightarrow$ C é plano $\square$

<u>Proposição</u> [Mudansa de Base].

Sejam: $f : R \to B$ uma R-algebra plana.

M um R-modulo plano

$\Rightarrow B \otimes_R M$ é um B-modulo plano.

<u>Prova</u> É trabalho p/ casa segundo mesma ideia como no exercicio anterior.