Aula 8

Produtos tensoriais

Nas ultimas aulas vimos os conceitos de R-modulos e mapas R-lineares (homomorf) entre eles. Na pratica as mapas bilineares tmb muito importantes. Felizmente, acontece que para estudar as mapas bilineares é posivel reduzir a teoria no caso linear. Mais precisamente, dados dois R-modulos M, N, a gente vai construir mais um R-modulo $M \otimes_R N$ de modo que:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Mapas bilineares} \\ M \times N \longrightarrow P \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{c} \text{Mapas lineares} \\ M \otimes_R N \longrightarrow P \end{array} \right\}$$

Definição [Mapa bilinear]
Sejam M, N, P três R-modulos. Uma aplicação $f: M \times N \longrightarrow P$ é chamada R-bilinear, se

a) $f(m + m', n) = f(m, n) + f(m', n)$
b) $f(m, n + n') = f(m, n) + f(m, n')$
c) $f(am, n) = f(m, an) = a f(m, n)$

$m, m' \in M$
$n, n' \in N$
$a \in R$.

Definição [Produto tensorial]

O produto tensorial de M, N (sobre R) é um R-modulo T, com a mapa bilinear

$$\tau : M \times N \to T, \text{ tal que:}$$

para toda mapa bilinear $\alpha : M \times N \to P$ existe mapa linear unica $\varphi : T \to P$ com $\alpha = \varphi \circ \tau$, isto é a seguinte diagrama commuta

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\tau"'] & P \\ T \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

"Propriedade universal".

Obs. Observe que a def. acima implique a corespondencia:

$$\left\{ \begin{matrix} \text{mapas bilineares} \\ M \times N \to P \end{matrix} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{matrix} \text{mapas lineares} \\ T \to P \end{matrix} \right\}$$

$$\alpha \longmapsto \varphi$$

$$\varphi \circ \tau \longleftarrow\!\shortmid \ \varphi$$

Proposição [Unicidade de produto tensorial].

O produto tensorial é unico a menos unico isomorfismo, ou seja: Se T_1, T_2 com mapas $\tau_1 : M \times N \to T_1$, $\tau_2 : M \times N \to T_2$ dois produtos tensoriais assim existe unico isomorfismo $\varphi : T_1 \to T_2$, t.q. $\tau_2 = \varphi \circ \tau_1$:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\tau_2"] \arrow[d, "\tau_1"'] & T_2 \\ T_1 \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

<u>Prova</u> Pelo "propriedade universal"

existem (unicos): $\varphi : T_1 \to T_2$, com $\tau_2 = \varphi \circ \tau_1$

$\psi : T_2 \to T_1$, com $\tau_1 = \psi \circ \tau_2$.

Observe que

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[d, "\tau_1"'] & T_1 \\ T_1 \arrow[ur, dashed, bend left, "id"] \arrow[ur, dashed, bend right, "\psi \circ \varphi"'] & \end{tikzcd}$$

$\psi \circ \varphi \circ \tau_1 = \psi \circ \tau_2 = \tau_1$, e

$Id_{T_1} \circ \tau_1 = \tau_1$

$\Rightarrow \psi \circ \varphi = Id_{T_1}$, pelo "prop. universal"

Na mesma maneira $\varphi \circ \psi = Id_{T_2}$

$\Rightarrow \varphi$ é isomorfismo requerido $\square$

<u>Proposição</u> [Existencia do produto tensorial]

Q.q. dois R-modulos tem produto tensorial.

<u>Prova</u> Seja C — o R-modulo de todas combinações lineares dos elementos de $M \times N$, i.e. somas formais da forma:

$$a_1 (m_1, n_1) + \dots + a_k (m_k, n_k)$$

com $a_i \in R$ e distintos $(m_i, n_j) \in M \times N$.

Seja D é o submodulo de C gerado por todos elementos da forma:

$$(m + m', n) - (m, n) - (m', n)$$

$$(m, n + n') - (m, n) - (m, n')$$

$$(am, n) - a(m, n)$$

$$(m, an) - a(m, n)$$

Scanned with CamScanner

Seja $T = C/D$. Para cada elemento base de C (m,n), denote por $m \otimes n$ sua imagem em T. Assim T é gerado pelos elementos da forma $m \otimes n$. Estes elementos satisfazem:

$$(m+m') \otimes n = m \otimes n + m' \otimes n$$
$$m \otimes (n+n') = m \otimes n + m \otimes n'$$
$$(am) \otimes n = m \otimes (an) = a(m \otimes n).$$

Equivalente a aplicação $g: M \times N \to T$ é R-linear.
$$(m,n) \mapsto (m \otimes n)$$

Observe que toda aplicação $f: M \times N \to P$ estende-se (por linearidade) a um homomorfismo
$$\bar{f}: C \to P.$$
Se f é bilinear, assim segue que $\bar{f}$ anula-se em todos geradores de D e, logo, em todo D. Ou seja $D \subseteq \ker f$. Portanto $\bar{f}$ induz um R-homomorfismo bem-definido $f': C/D \to P$ tal que $f'(m \otimes n) = \bar{f}(m,n) = f(m,n)$.

A aplicação f' é definida de maneira única por essa condição, e logo (T, g) é <u>produto tensorial</u>

$\square$

<u>Notação</u>. O modulo construido na proposição anterior é chamado de <u>produto tensorial</u> de M e N, e sera denotado por $M \otimes_R N$.

$M \otimes_R N$ é gerado pelos elementos $\underbrace{m \otimes n}_{\text{tensor elementar}}$, $m \in M, n \in N$.

Em particular, se $M = \langle m_i \rangle$, $N = \langle n_j \rangle$

$$\Rightarrow \quad M \otimes N = \langle m_i \otimes n_j \rangle$$

e se M, N são f.g. $\Rightarrow M \otimes_R N$ é f.g. tmb.

<u>Obs.</u> Podemos generalizar a noção do produto tensorial a qualquer numero finito de modulos, considerando aplicações multilineares

$$f : M_1 \times \dots \times M_n \longrightarrow P.$$

Fazendo mesmo prosedimento chegaremos a um "<u>produto multi-tensorial</u>" $M_1 \otimes_R \dots \otimes_R M_n$

<u>Proposição</u> [Propriedades do Produto Tensorial].
Sejam M, N e P, os R-modulos. Assim:

a) $M \otimes_R N = N \otimes_R M$ ← Comutatividade

b) $(M \otimes_R N) \otimes_R P \simeq M \otimes_R (N \otimes_R P)$ ← Associatividade

c) $(M \oplus N) \otimes_R P \simeq M \otimes_R P \oplus N \otimes_R P$ ← Distributividade

d) $R \otimes_R M \simeq M$ ← "Unidade"

e) Se $I \triangleleft R$ ideal $\Rightarrow M \otimes_R R/I \simeq M/IM$ ← Quocientes.

<u>Prova</u> A tecnica da prova é construir aplicações bilineares correspondentes e usar "propriedade universal" para receber os inversos explicitos para estes mapas.

a), b), c) $\longleftarrow$ Exercicio p/ casa.

d) Defina aplicação bilinear $\varphi : R \times M \longrightarrow M$
$$(a, m) \longmapsto am$$

Pela "prop. universal" existe um homomorfismo $\varphi' : R \otimes_R M \longrightarrow R$ dado por $\varphi'(a \otimes m) = am$

Seja agora $\psi : M \longrightarrow R \otimes_R M$
$$m \longmapsto 1 \otimes m$$

Assim $\varphi' \circ \psi : M \longrightarrow M$, satisfaz

$$\varphi' \circ \psi (m) = \varphi'(1 \otimes m) = 1 \cdot m = m \implies \varphi' \circ \psi = id_M$$

Por outro lado:

$$\psi \circ \varphi'(a \otimes m) = \psi(am) = 1 \otimes am = a \otimes m \implies \psi \circ \varphi = id_{R \otimes_R M}$$

$\implies \psi$ é isomorfismo e $R \otimes_R M \simeq M$.

e) Defina $\varphi : M \times R/I \longrightarrow M/IM$
$$(m, \bar{a}) \longmapsto \overline{am}$$

trabalho p/ casa

Facil ver que φ é bem definida, portanto existe

$$\varphi' : M \otimes_R R/I \longrightarrow M/IM$$
$$m \otimes \bar{a} \longmapsto \overline{am}$$

Considere $\psi: M \longrightarrow M \otimes_R R/I$

$$m \longmapsto m \otimes \overline{1}$$

Vamos ver que $IM \subseteq \ker \psi$. Seja $m \in IM$, ou seja $m = \sum_i a_i m_i$, com $a_i \in I$, $m_i \in M$, logo

$$\psi(m) = \psi\left(\sum_i a_i m_i\right) = \left(\sum_i a_i m_i\right) \otimes \overline{1}$$

$$= \sum_i a_i (m_i \otimes \overline{1}) = \sum_i (m_i \otimes a_i \cdot \overline{1}) = \sum_i m_i \otimes \underset{\underset{0}{\parallel}}{\overline{a_i}} = 0$$

pois $a_i \in I$, logo $m \in \ker \psi$. e ψ induz homomorfismo

$$\overline{\psi}: M/MI \longrightarrow M \otimes_R R/I$$

$$\overline{m} \longrightarrow m \otimes \overline{1}$$

Agora $\varphi' \circ \overline{\psi}(\overline{m}) = \varphi'(m \otimes \overline{1}) = \overline{1m} = \overline{m} \Rightarrow \varphi' \circ \overline{\psi} = Id_{M/MI}$

$\overline{\psi} \circ \varphi'(m \otimes \overline{a}) = \overline{\psi}(\overline{am}) = am \otimes \overline{1} = m \otimes \overline{a} \Rightarrow \overline{\psi} \circ \varphi' = Id_{M \otimes_R R/I}$

Logo $M/MI \simeq M \otimes_R R/I$ $\square$.

<u>Exemplo</u> Seja $m, n \in \mathbb{Z}$ coprimos. Mostre que

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$$

Como $mdc(m,n) = 1 \xRightarrow[\text{T. Bezout}]{} m \cdot x + n \cdot y = 1$, para alguns $x, y \in \mathbb{Z}$

Se $a \otimes b$ gerador de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ assim

$$a \otimes b = 1(a \otimes b) = (mx + ny)(a \otimes b)$$

$$= (mxa + nya) \otimes b = (mxa) \otimes b + a \otimes (nyb)$$

$$= 0 \otimes b + a \otimes 0 = 0 \text{ //}$$

Obs. Mais geralmente, se $I, J \triangleleft R$ ideais coprimos em R $\Longrightarrow$

$$R/I \otimes_R R/J = 0.$$

Assim, o produto tensorial não precisa ser "mais grande" do que os fatores.

Exemplo 2 Se $M \simeq R^m$, $N \simeq R^n$ modulos livres, assim:

$$M \otimes N = R^m \otimes_R R^n = R^m \otimes_R (\underbrace{R \oplus R \oplus \ldots \oplus R}_{n})$$

$$\cong \underbrace{(R^m \otimes R) \oplus \ldots \oplus (R^m \otimes R)}_{n}$$

$$\simeq \underbrace{R^m \oplus \ldots \oplus R^m}_{n} = R^{m \cdot n} \quad //.$$

Exercicio: Calcule:

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, \quad \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \quad \mathbb{Q}[x] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}.$$

—— // ——

Adjunsão entre Hom e $\otimes$

Seja $f: A \to B$ homomorfismo entre aneis e seja N um B-modulo. Assim N é tmb A modulo através

$$a \cdot n := f(a) n$$

Neste caso dizemos que A-modulo N é obtido por restrição de escalares.

Se M é ~~a~~ um R-modulo, assim podemos formar o R-modulo $M_B \simeq B \otimes_R M$ pois B tem estrutura de R-modulo atraves restrição de escalares. Dizemos que o B-modulo M_B é obtido de M por extensão de escalares.

Proposição Sejam M, N, P - os R-modulos, então

$$(*) \quad \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, P) \simeq \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(N, P))$$

~~Obs: Exercício casa~~

Prova Seja $f: M \times N \to P$ uma aplicação bilinear. Para cada $m \in M$ a aplicação

$$\begin{aligned} n &\mapsto f(m,n) \\ N &\to P \end{aligned} \quad \text{é linear}$$

Logo, f da origem a uma aplicação $\varphi: M \to \mathrm{Hom}_R(N,P)$

Reciprocamente, qualquer homomorfismo

$\varphi: M \to \mathrm{Hom}_R(N,P)$ define aplicação

$f: M \times N \to P$ por $(m,n) \mapsto \varphi(m)(n)$

Agora facil ver (atraves "prop. universal") que temos isomorfismo canonico

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, P) & \simeq & \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(N,P)) \\ f' & \longleftarrow & \varphi \\ f' & \longmapsto & \varphi \end{array}$$

dado por

$\boxtimes$