

Aula 8

①

Produtos tensoriais

Nas últimas aulas vimos os conceitos de R -módulos e mapas R -lineares (homomorf) entre eles. Na prática as mapas bilineares são muito importantes. Felizmente, acontece que para estudar as mapas bilineares é possível reduzir a teoria ao caso linear. Mais precisamente, dados dois R -módulos M, N , a gente vai construir mais um R -módulo $M \otimes_R N$ de modo que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Mapas bilineares} \\ M \times N \longrightarrow P \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{l} \text{Mapas lineares} \\ M \otimes_R N \longrightarrow P \end{array} \right\}$$

Definição [Mapa bilinear]

Sejam M, N, P três R -módulos. Uma aplicação

$f: M \times N \longrightarrow P$ é chamada R -bilinear, se

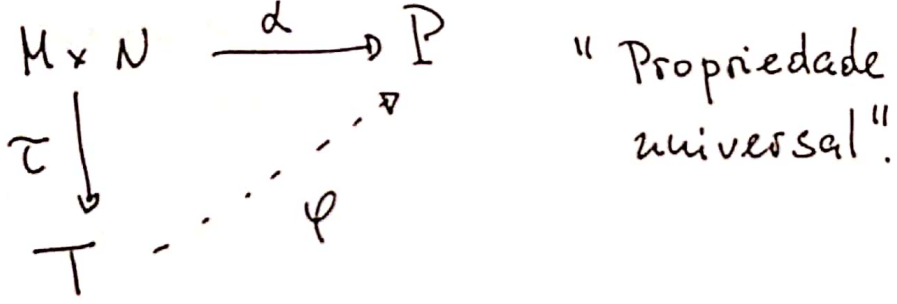
$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } f(m + m', n) = f(m, n) + f(m', n) \\ \text{b) } f(m, n + n') = f(m, n) + f(m, n') \\ \text{c) } f(am, n) = f(m, an) = a f(m, n) \end{array} \right\} \begin{array}{l} m, m' \in M \\ n, n' \in N \\ a \in R. \end{array}$$

Definição [Produto tensorial]

O produto tensorial de M, N (sobre R) é um R -módulo T , com a mapa bilinear

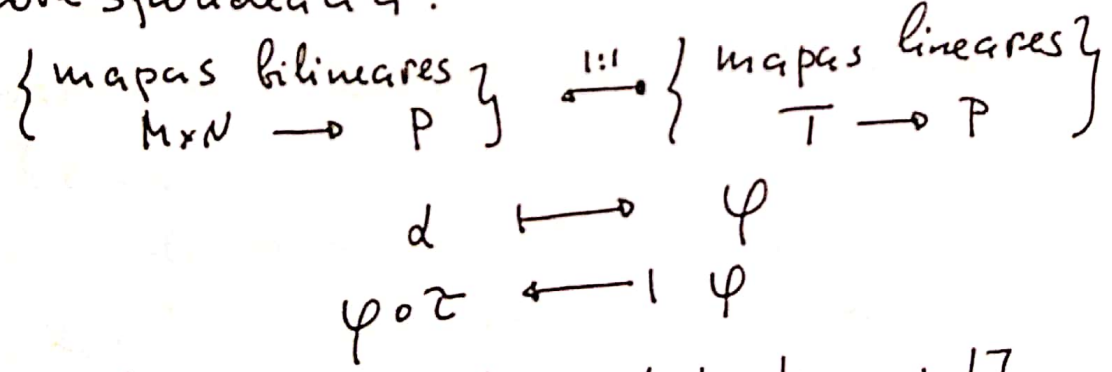
$$\tau: M \times N \rightarrow T, \text{ tal que:}$$

para toda mapa bilinear $d: M \times N \rightarrow P$ existe mapa linear única $\varphi: T \rightarrow P$ com $d = \varphi \circ \tau$, isto é a seguinte diagrama comuta



Obs. Observe que a def. acima implique a

Correspondência:



Proposição [Unicidade de produto tensorial].

O produto tensorial é único a menos de um isomorfismo, ou seja: Se T_1, T_2 com mapas $\tau_1: M \times N \rightarrow T_1, \tau_2: M \times N \rightarrow T_2$ dois produtos tensoriais assim existe único isomorfismo $\varphi: T_1 \rightarrow T_2$, t.q. $\tau_2 = \varphi \circ \tau_1$

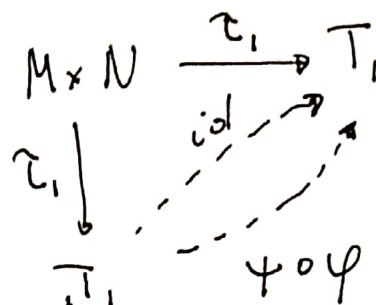
Prova Pelo "propriedade universal"

Existem (unicos): $\varphi: T_1 \rightarrow T_2$, com $\tilde{\tau}_2 = \varphi \circ \tilde{\tau}_1$
 $\psi: T_2 \rightarrow T_1$, com $\tilde{\tau}_1 = \psi \circ \tilde{\tau}_2$.

Observe que

$$\psi \circ \varphi \circ \tilde{\tau}_1 = \psi \circ \tilde{\tau}_2 = \tilde{\tau}_1, \text{ e}$$

$$\text{Id}_{T_1} \circ \tilde{\tau}_1 = \tilde{\tau}_1$$



$\Rightarrow \psi \circ \varphi = \text{Id}_{T_1}$, pelo "prop. universal"

Na mesma maneira $\varphi \circ \psi = \text{Id}_{T_2}$

$\Rightarrow \varphi$ é isomorfismo requerido \square

Proposição [Existência do produto tensorial]

Q.q. dois R-modulos tem produto tensorial.

Prova Seja C — o R-modulo de todas combinações lineares dos elementos de $M \times N$, i.e. somas formais da forma:

$$a_1 (m_1, n_1) + \dots + a_k (m_k, n_k)$$

com $a_i \in R$ e distintos $(m_i, n_j) \in M \times N$.

Seja D é o submodulo de C gerado por todos elementos da forma:

$$(m + m', n) - (m, n) - (m', n)$$

$$(m, n + n') - (m, n) - (m, n')$$

$$(am, n) - a(m, n)$$

$$(m, an) - a(m, n)$$

Seja $T = C/D$. Para cada elemento base de $C (m, n)$, denote por $m \otimes n$ sua imagem em T . Assim T é gerado pelos elementos da forma $m \otimes n$. Estes elementos satisfazem:

$$(m + m') \otimes n = m \otimes n + m' \otimes n$$

$$m \otimes (n + n') = m \otimes n + m \otimes n'$$

$$(am) \otimes n = m \otimes (an) = a(m \otimes n).$$

Equivalente a aplicação $g: M \times N \rightarrow T$ é R -linear.

$$(m, n) \mapsto (m \otimes n)$$

Observe que toda aplicação $f: M \times N \rightarrow P$ estende-se (por linearidade) a um homomorfismo $\bar{f}: C \rightarrow P$.

Se f é bilinear, assim segue que \bar{f} anula-se em todos geradores de D e, logo, em todo D . Ou seja $D \subseteq \ker \bar{f}$. Portanto \bar{f} induz um R -homomorfismo bem-definido $f': C/D \rightarrow P$ tal que $f'(m \otimes n) = \bar{f}(m, n) = f(m, n)$.

A aplicação f' é definida de maneira única por essa condição, e logo (T, g) é produto tensorial □

Notação. O módulo construído na proposição 5 anterior é chamado de produto tensorial de M e N , e será denotado por $M \otimes_R N$.
 $M \otimes_R N$ é gerado pelos elementos $\underbrace{m \otimes n}_{\text{tensor elementar}}$, $m \in M, n \in N$.

Em particular, se $M = \langle m_i \rangle, N = \langle n_j \rangle$

$$\Rightarrow M \otimes N = \langle m_i \otimes n_j \rangle$$

e se M, N são f.g. $\Rightarrow M \otimes_R N$ é f.g. tamb.

Obs. Podemos generalizar a noção do produto tensorial a qualquer número finito de módulos, considerando aplicações multilineares
 $f: M_1 \times \dots \times M_n \longrightarrow P$.

Fazendo mesmo procedimento chegaremos a um
 "produto multi-tensorial" $M_1 \otimes_R \dots \otimes_R M_n$

Proposição [Propriedades do Produto Tensorial].

Sejam M, N e P , os R -módulos. Assim:

- a) $M \otimes_R N = N \otimes_R M$ \leftarrow Comutatividade
- b) $(M \otimes_R N) \otimes_R P \cong M \otimes_R (N \otimes_R P)$ \leftarrow Associatividade
- c) $(M \oplus N) \otimes_R P \cong M \otimes_R P \oplus N \otimes_R P$ \leftarrow Distributividade
- d) $R \otimes_R M \cong M$ \leftarrow "Unidade"
- e) Se $I \triangleleft R$ ideal $\Rightarrow M \otimes_R R/I \cong M/IM$ \leftarrow Quocientes.

Prova A técnica da prova é construir (6)
 aplicações bilineares correspondentes
 e usar "propriedade universal"
 para receber os inversos explícitos para
 estes mapas.

a), b), c) ← Exercício p/ casa.

d) Defina aplicação bilinear $\varphi: R \times M \rightarrow M$
 $(a, m) \mapsto am$

Pela "prop. universal" existe um ~~A~~ homomorfismo
 $\varphi': R \otimes_R M \rightarrow R$ dado por $\varphi'(a \otimes m) = am$

Seja agora $\psi: M \rightarrow R \otimes_R M$
 $m \mapsto 1 \otimes m$

Assim $\varphi' \circ \psi: M \rightarrow M$, satisfaz

$$\varphi' \circ \psi(m) = \varphi'(1 \otimes m) = 1 \cdot m = m \Rightarrow \varphi' \circ \psi = id_M$$

Por outro lado:

$$\psi \circ \varphi'(a \otimes m) = \psi(am) = 1 \otimes am = a \otimes m \Rightarrow \psi \circ \varphi = id_{R \otimes_R M}$$

$$\Rightarrow \psi \text{ é isomorfismo e } R \otimes_R M \cong M.$$

e) Defina $\varphi: M \times R/I \rightarrow M/IM$
 $(m, \bar{a}) \mapsto \overline{am}$

trabalho p/ casa

Fácil ver que φ é bem definida, portanto existe

$$\varphi': M \otimes_R R/I \rightarrow M/IM$$

$$m \otimes \bar{a} \mapsto \overline{am}$$

$$\text{Considere } \psi: M \rightarrow M \otimes_R R/I$$

$$m \mapsto m \otimes \bar{1}$$

(7)

Vamos ver que $IM \subseteq \ker \psi$. Seja $m \in IM$, ou seja $m = \sum_i a_i m_i$, com $a_i \in I$, $m_i \in M$, logo

$$\begin{aligned} \psi(m) &= \psi\left(\sum_i a_i m_i\right) = \left(\sum_i a_i m_i\right) \otimes \bar{1} \\ &= \sum_i a_i (m_i \otimes \bar{1}) = \sum_i (m_i \otimes a_i \cdot \bar{1}) = \sum_i m_i \otimes \bar{a}_i = 0 \end{aligned}$$

Pois $a_i \in I$, logo $m \in \ker \psi$. e ψ induz homomorfismo

$$\bar{\psi}: M/MI \rightarrow M \otimes_R R/I$$

$$\bar{m} \mapsto m \otimes \bar{1}$$

$$\text{Agora } \psi' \circ \bar{\psi}(\bar{m}) = \psi'(m \otimes \bar{1}) = \bar{1}m = \bar{m} \Rightarrow \psi' \circ \bar{\psi} = \text{Id}_{M/MI}$$

$$\bar{\psi} \circ \psi'(m \otimes \bar{a}) = \bar{\psi}(\bar{a}m) = \bar{a}m \otimes \bar{1} = m \otimes \bar{a} \Rightarrow \bar{\psi} \circ \psi' = \text{Id}_{M \otimes_R R/I}$$

$$\text{Logo } M/MI \cong M \otimes_R R/I \quad \square.$$

Exemplo Seja $m, n \in \mathbb{Z}$ coprimos. Mostre que

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$$

Como $\text{mdc}(m, n) = 1 \xrightarrow{\text{T. Bezout}} m \cdot x + n \cdot y = 1$, para alguns $x, y \in \mathbb{Z}$

Se $a \otimes b$ gerador de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ assim

$$\begin{aligned} a \otimes b &= 1(a \otimes b) = (mx + ny)(a \otimes b) \\ &= (mx a + ny a) \otimes b = (mx a) \otimes b + a \otimes (ny b) \\ &= 0 \otimes b + a \otimes 0 = 0 \end{aligned}$$

Obs. Mais geralmente, se $I, J \triangleleft R$ ideais
coprimos em $R \implies$

$$R/I \otimes_R R/J = 0.$$

Assim, o produto tensorial não precisa
ser "mais grande" do que os fatores.

Exemplo 2 Se $M \cong R^m$, $N \cong R^n$ módulos livres, assim:

$$\begin{aligned} M \otimes N &= R^m \otimes_R R^n = R^m \otimes_R (\underbrace{R \oplus R \oplus \dots \oplus R}_n) \\ &\cong \underbrace{(R^m \otimes R) \oplus \dots \oplus (R^m \otimes R)}_n \\ &\cong \underbrace{R^m \oplus \dots \oplus R^m}_n = R^{m \cdot n} // \end{aligned}$$

Exercício: Calcule:

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, \quad \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \quad \mathbb{Q}[x] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}.$$

Adjunção entre Hom e \otimes

Seja $f: A \rightarrow B$ homomorfismo entre anéis
e seja N um B -módulo. Assim N é
também A módulo através

$$a \cdot n := f(a)n$$

Neste caso dizemos que A -módulo N é obtido
por restrição de escalares.

Se M é um R -módulo, assim (9)
 podemos formar o R -módulo $M_B \cong B \otimes_R M$
 pois B tem estrutura de R -módulo através
restricção de escalares. Dizemos que o B -módulo
 M_B é obtido de M por extensão de escalares.

Proposição Sejam M, N, P - os R -módulos, então

$$(*) \quad \text{Hom}_R(M \otimes_R N, P) \cong \text{Hom}_R(M, \text{Hom}_R(N, P))$$

~~Observação~~

Prova Seja $f: M \times N \rightarrow P$ uma aplicação bilinear

Para cada $m \in M$ a aplicação

$$\begin{array}{ccc} n & \longmapsto & f(m, n) \\ N & \longrightarrow & P \end{array} \text{ é linear}$$

Logo, f dá origem a uma aplicação $\varphi: M \rightarrow \text{Hom}_R(N, P)$

Reciprocamente, qualquer homomorfismo

$\varphi: M \rightarrow \text{Hom}_R(N, P)$ define aplicação

$f: M \times N \rightarrow P$ por $(m, n) \mapsto \varphi(m)(n)$

Agora fácil ver (através "prop. universal") que
 temos isomorfismo canônico

$$\text{Hom}_R(M \otimes_R N, P) \cong \text{Hom}_R(M, \text{Hom}_R(N, P))$$

dado por

$$\begin{array}{ccc} f' & \longleftarrow & \text{id} \\ f' & \longmapsto & \varphi \end{array}$$

