Aula 24

Dimenção 3.

Nos vamos distutir mais uma abordagem para definir a dimenção que, em varios casos coincide com a dimenção de Krull.

A ideia é que a dimenção da variedade X sobre um corpo K é numero das variaveis independentes nesesarias para descrever os pontos de X. Mais precisamente $\dim X$ deve ser o numero maximal das funções em X que "algebricamente independentes" em X no sentido que elas não satisfazem uma relação polinomial com coeficientes em K.

<u>Definição</u> [Dependencia algebrica. Bases transcendencial]

Seja $K \subset L$ uma extenção de corpos, e $B \subset L$ um subconjunto. Pelo $K(B)$ denotamos o menor subcorpo de L que contem K e B.

(a) Subconjunto B é chamado <u>algebricamente dependende</u> sobre K, se existir um polinomio não-nulo $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ com $f(b_1, \dots, b_n) = 0$ para alguns $b_1, \dots, b_n \in B$ distintos. Caso contrario B é chamado <u>algebricamente independente</u>.

(b) B é chamado uma <u>base de transendência</u> de L sobre K, se B é alg. independente e L é algebrico sobre $K(B)$.

<u>Exemplos</u>: Seja $K \subset L$ extensão de corpos, $a \in L$.

(a) Assim:

$\{a\}$ é alg. dep. sobre K $\Leftrightarrow$ a é algebrico.

(b) Seja $R = K[x_1, \dots, x_n]$ e $L = \mathrm{Quot}\, R = \left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; \begin{matrix} f, g \in R \\ g \neq 0 \end{matrix} \right\}$.

Assim $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ é base de transendência de L sobre K, pois B é alg. indep e $K(B) = L$.

<u>Obs.</u> Se B é uma base transendência de L, isso <u>não</u> significe que L é gerado por B, mas que B gera L até uma extensão algebrica!.

Agora vamos mostrar que bases de transendência existem e que todos tem o mesmo numero de elementos.

<u>Lema</u> [Existencia de base de transendência]
Seja $K \subset L$ uma extenção de corpos. Alem disso seja $A \subset L$ um conjunto alg. indep. sobre L, e $C \subset L$ tal que L é algebrico sobre $K(C)$. Assim A pode ser estendido pelo um subconjunto de C à uma base de transendência de L sobre K.
Em particular toda extenção de corpos tem uma base de transendencia.

<u>Prova</u> Seja

$$M = \left\{ B \;\middle|\; \begin{array}{l} B \text{ é alg. independente sobre } K, \\ \text{com } A \subset B \subset A \cup C \end{array} \right\}.$$

Assim todo subconjunto totalmente ordenado $N \subset M$ tem quota superior: Se $N = \emptyset$, podemos pegar A caso contrario $\bigcup_{B \in N} B$ que de novo um elemento de M (mostre!!!).

Assim M tem elemento maximal B.

Afirmamos que B é uma base de transendência de L sobre K. De fato, como elemento de M, B é alg. independente. Alem disso, como B é maximal, todo elemento de C é algebrico sobre $K(B)$, assim $K(C)$ é algebrico sobre $K(B)$ [Exercicio p/ casa]. Assim L é algebrico sobre $K(B)$, pois L é algebrico sobre $K(C)$ pelo hipotese [Aula 19, pag. 5].

<u>Proposição e Definição</u> [Grau de Transendência].

Seja $K \subset L$ uma extensão de corpos. Se L possui uma base finita de transendência sobre K, assim todas tais basis de transendência são finitas e tem o mesmo numero de n elementos.

Neste caso chamaremos esse numero n de <u>grau de transendência</u> $\operatorname{tr\,deg}_K L$ de L sobre K.

Caso contrario defina $\operatorname{tr\,deg}_K L = \infty$.

Prova Sejam B, C duas bases de transendencia. e suponha que $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ tem n-elementos. Pela simetria e suficiente mostrar que $|C| \leq |B|$. Vamos prosequir pela indução por n.

Se $n=0$, assim $K \subset L$ é algebrico e $C = \emptyset$.

Suponha que $n > 0$. ~~Suponha~~ Escolhe $c \in C \setminus B$ que é obrigatorialmente transendental. Pelo lema acima podemos extender ao uma base B' pelos elementos de B. B' pode ter no maximo n elementos. O conjunto $\{c, b_1, \dots, b_n\}$ é alg. dep. pois B é base de transendência.

Assim B' e C são 2 bases de L sobre K e ambas contem c. Assim $B' \setminus \{c\}$ e $C \setminus \{c\}$ são 2 bases de L sobre $K(c)$. Pelo indução temos que

$$|B' \setminus \{c\}| = |C \setminus \{c\}|, \text{ e assim}$$

$$|C| = |C \setminus \{c\}| + 1 = |B' \setminus \{c\}| + 1 \leq n = |B|.$$

$\square$

Exemplo.

(a) $k \subset L$ é algebrico $\iff \operatorname{tr\,deg}_k L = 0$

(b) Dado que π é transendencial sobre $\mathbb{Q}$, extensões $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\pi)$ e $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\pi, \sqrt{2})$ tem ambas grau 1, com $\{\pi\}$ base de transendencia. Extensão $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$ tem grau de trans. infinito.

(c) $\operatorname{tr\,deg}_k k(x_1, \dots, x_n) = n$, pelo Exemplo acima.

Proposição [Grau de transendencia como dimensão].
Seja R uma àlgebra finitamente gerada sobre um corpo k, e suponha que R é um dominio. Assim $\dim R = \operatorname{tr\,deg}_k \operatorname{Quot} R$.

Prova Seja $k[z_1, \dots, z_n] \longrightarrow R$ uma Normalização de Noether, onde $n = \dim R$ (veja Aula 22). Assim $\operatorname{Quot} R$ é algebrico sobre $\operatorname{Quot} k[z_1, \dots, z_n]$:
Se $a, b \in R$ com $b \neq 0$, assim a, b são integrais sobre $k[z_1, \dots, z_n]$ e portanto algebraicos sobre $k(z_1, \dots, z_n)$. Assim $k(z_1, \dots, z_n)(a, b)$ é algebraico

sobre $k(z_1,\dots,z_n)$ [Exercício p/ casa].

que implique que $\frac{a}{b} \in \operatorname{Quot} R$ é algébrico sobre $k(z_1,\dots,z_n)$.

Assim a base de transendência $\{z_1,\dots,z_n\}$ de $k(z_1,\dots,z_n)$ sobre k é tmb uma base de transendência de Quot R sobre k, ou seja

$$\operatorname{tr\,deg}_k \operatorname{Quot} R = n = \dim R$$

$\square$

Obs. Se R não é finitamente gerada, assim é posível mostrar que

$$\dim R \leq \operatorname{tr\,deg}_R \operatorname{Quot} R$$

com desigualdade pode ser estrita.