Aula 23

Dimensão 2

Lembrete (Aula pasada).

(a) $\dim k[x_1, \ldots, x_n] = n$

(b) Todas cadeias maximais de ideais primos em $k[x_1, \ldots, x_n]$ tem comprimento n.

Corolario Seja R uma algebra finitamente gerada sobre um corpo k. Alem disso suponha que R um dominio. Assim toda cadeia maximal de ideais primos em R tem comprim. $\dim R$.

Prova Podemos escrever $R = k[x_1, \ldots, x_n]/P$, para um ideal primo P. Agora afirmação segue pelo lembrete (b) e Lema (a) [aula pasada, pag. 4].

Exemplo. Seja Y uma subvariedade irredutivel de uma variedade irredutivel. Assim, pelo Corolario acima, toda cadeia maximal de ideais primos em $A(X)$ tem o mesmo comprimento e assim lema (aula pasada, pag. 4) implique que:

(a) $\dim \bar{X} = \dim \bar{Y} + \operatorname{codim}_{\bar{X}} \bar{Y}$

pois $P = I(\bar{Y})$ é primo em $A(\bar{X})$ e
$A(\bar{X})/P \simeq A(\bar{Y})$.

(b) dimensão local de $\bar{X}$ é $\dim \bar{X}$ para todo ponto ponto de $\bar{X}$, isto é $\dim A(\bar{X})_M = \dim \bar{X}$ onde M é q.q. ideal maximal de $A(\bar{X})$.

— // — //

Agora vamos estudar a relação entre codimensão de um ideal primo e o numero dos geradores do ideal. Geometricamente, esperamos que subvariedade irredutivel dado pelas n equações tem codimensão no maximo n. Nos vamos precisar a construsão chamada <u>potência simbólica</u> $P^{(k)}$ de um ideal primo P em R.

<u>Lema</u> [Potencias simbolicas]. Seja R um anel. Para um ideal primo $P \lhd R$ e $n \in \mathbb{N}$, considere

$$P^{(n)} := \{a \in R \mid ab \in P^n \text{ para algum } b \in R \setminus P\}$$

um ideal chamado <u>potência</u> <u>simbolica</u> de P (n-sima).

Assim:

(a) $P^n \subset P^{(n)} \subset P$.

(b) $P^{(n)}$ é P-primario.

(c) $P^{(n)} R_P = P^n R_P$.

<u>Prova</u>. (a) primeira inclusão segue com $b = 1$.

Para segunda se $a \in P^{(n)}$, assim $ab \in P^n \subset P$ para algum $b \in R \setminus P$. Mas assim $a \in P$ pois P é primo.

(b) Pegando radicais temos (em (a))

$$P = \sqrt{P} = \sqrt{P^n} \subset \sqrt{P^{(n)}} \subset \sqrt{P} = P$$

$$\Rightarrow \sqrt{P^{(n)}} = P.$$

Agora, suponha que $ab \in P^{(n)}$, ou seja $abc \in P^n$ para algum $c \in R \setminus P$. Assim, se $b \notin \sqrt{P^{(n)}} = P$ temos tmb que $bc \notin P$ assim pelo definição $a \in P^{(n)}$. Assim $P^{(n)}$ é P-primario.

(c) "$\subset$" Seja $\frac{b}{s} \in P^{(n)} R_P$, i.e. $bc \in P^n$ para alguns $s, c \in R \setminus P$. Assim $\frac{b}{s} = \frac{bc}{sc} \in P^n R_P$.

"$\supset$" É obvio, pois $P^{(n)} \supset P^n$.

$\square$

Proposição [Teorema de ideal principal de Krull].

Krulls Hauptidealsatz.

Seja R um anel Noetheriano e $a \in R$. Assim todo ideal primo minimal sobre (a) satisfaz $\operatorname{codim} P \leq 1$.

Prova. Seja $Q' \subset Q \subsetneq P$ uma cadeia de ideais primos em R. Precisamos provar que $Q' = Q$. Usando corespondencia entre ideais primos em R e em quocientes e localizasões, vamos quocientar em Q e localizar em P provando o resultado em anel corespondente, que chamaremos por R para simplicidade. Observe que esse anel é Noetheriano de novo.

Temos:
- Quocientando a gente recebeu $Q' = 0$ e R – o dominio
- localizando temos R é local com ideal unico maximal P.
- Precisamos provar que $Q = 0$.

Vamos considerar as potencias simbolicas do lema anterior $Q^{(n)}$. Obviamente, temos

$$Q^{(n+1)} \subset Q^{(n)},$$ e, alem disso,

(a) $\boxed{Q^{(n)} \subset Q^{(n+1)} + (a) \text{ para algum } n}$:

$R/(a)$ é Noetheriano e tem dimensão 0, pois unico ideal maximal $P/(a)$ é minimal pela hipotese. Assim $R/(a)$ é Artiniano [T. de Hopkins]

Assim a cadeia

$$(Q^{(0)} + (a))/(a) \supsetneq (Q^{(1)} + (a))/(a) \supsetneq \ldots$$

se estabilize e $Q^{(n)} + (a) = Q^{(n+1)} + (a)$ para um n.
que implique que $Q^{(n)} \subset Q^{(n+1)} + (a)$.

(b) $\boxed{Q^{(n)} = Q^{(n+1)} + P \cdot Q^{(n)}}$:

Inclusão "$\supset$" é obvio.

"$\subset$": Se $b \in Q^{(n)}$, assim $b = c + ar$ para algum $c \in Q^{(n+1)}$ e $r \in R$ pelo (a). Assim $ar = b - c \in Q^{(n)}$. Mas $a \notin Q$ [Caso contrario P não é minimal sobre (a)] e $Q^{(n)}$ é Q-primario pelo lema acima, assim $r \in Q^{(n)}$.

Scanned with CamScanner

Portanto $b = c + ar \in Q^{(n+1)} + PQ^{(n)}$.

Agora (b) implique $Q^{(n)}/Q^{(n+1)} = PQ^{(n)}/Q^{(n+1)}$,

ou seja $Q^{(n)}/Q^{(n+1)} = 0$ pelo Lema de Nakayama

Ou seja $Q^{(n)} = Q^{(n+1)}$. Aplicando o lema acima

temos que $Q^n R_Q = Q^{n+1} R_Q$, assim

$$Q^n R_Q = (Q R_Q) \cdot Q^n R_Q,$$

e, portanto, aplicando Lema de Nakayama de novo

$Q^n R_Q = 0$. Mas R é domínio, assim $Q = 0$ $\square$.

<u>Corolário</u> Seja R um anel Noetheriano, e

$a_1, \dots, a_n \in R$. Assim todo ideal minimal

primo sobre $(a_1, \dots, a_n)$ satisfaz $\operatorname{codim} P \leq n$.

<u>Prova</u> Vamos provar isso pela indução.

Caso $n = 1$ é proposição acima.

Seja $n \geq 2$ e seja $P_0 \subsetneq \dots \subsetneq P_s$ cadeia de primos

em P. Depois de trocar alguns desses ideais

(mas não P_s) podemos supor que $a_n \in P_1$

[Exercício p/ casa].

Assim:

$$P_1/(a_n) \subsetneq \cdots \subsetneq P_s/(a_n)$$

é cadeia de primos de tamanho $s-1$ em $P/(a_n)$

Como $P/(a_n)$ é minimal sobre $(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{n-1})$ aplicando indução temos:

$$s-1 \leq \operatorname{codim} P/a_n \leq n-1$$

assim $s \leq n$. Portanto $\operatorname{codim} P \leq n$ $\square$

<u>Corolário 2</u> Seja R um anel Noetheriano e $a \in R$ não é div. de zero. Assim para todo minimal primo sobre (a), P, temos $\operatorname{Codim} P = 1$.

<u>Prova</u> Sejam $P_1, \ldots, P_n$ são primos minimais sobre ideal nulo (como em Aula 17, Corol. pag. 5). Pela 1ª Teorema da unicidade na dec. primaria podemos escrever $P_i = \sqrt{0:b_i}$, para alguns não-nulos $b_1, \ldots, b_n \in R$. Afirmamos que $a \notin P_i$, $i = 1, \ldots, n$. Se $a \in P_i$ para algum i, assim $a \in \sqrt{0:b_i}$, assim $a^r \cdot b_i = 0$ para algum r. Se vamos escolher r ser minimal, assim $a \cdot (a^{r-1} b_i) = 0$, com $a^{r-1} b_i \neq 0$

e a é divisor de zero que contradiz o hipotese. Assim $a \notin P_i$ para todo i.
Por outro lado $a \in P$ e como P não é um dos P_i's, assim $P_i \subsetneq P$ para algum i. Portanto $\operatorname{Codim} P \geq 1$. Usando Prop. acima $\operatorname{codim} P = 1$ //

$\square$

Exemplo Seja $X = V(x^2+y^2-1) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ - circumferencia

$$A(X) = R = \frac{\mathbb{R}[x,y]}{x^2+y^2-1} \quad \text{e} \quad (x^2+y^2-1) \text{ - é primo.}$$

Assim a dimensão de X igual

$$\begin{aligned} \dim X = \dim R &= \dim \mathbb{R}[x,y] - \operatorname{Codim}(x^2+y^2-1) \quad \text{[Aula 22, Lema p.4, Prop. p.6]} \\ &= 2 - 1 \quad \text{[Aula 22 + Corol. 2]} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Com contas anologicos $\dim \mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2+1) = 1$, mas observe que $V(x^2+y^2+1) = \emptyset$ em $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$

$\square$