# Aula 22

## Dimensão

O conceito da dimensão é bem-intuitivo, mas (como vamos ver) é tmb complicado na pratica, quando precisa provar os resultados. Vamos começar com as definições, cujas ideias são semelhantes ao ideias do "comprimento" de um R-modulo.

<u>Def.</u> [Dimensão]. Seja R um anel.

(a) <u>Dimensão</u> (de <u>Krull</u>) dim R de um anel R é o numero maximal n tal que existe cadeia dos ideais primos

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq P_2 \subsetneq \dots \subsetneq P_n$$

de tamanho n em R.

(b) O <u>codimensão</u> ou <u>altura</u> de um ideal primo P em R é numero maximal n tal que existe cadeia como em (a) com $P_n \subset P$.

Vamos denotar isso por $ht(P)$ ou $\operatorname{codim} P$.

(c) <u>Dimensão</u> $\dim X$ da uma variedade $X$ é dimensão de $A(X)$ (seu anel das coordenadas).

Obs. [Interpretação geometrica da dimensão].

Seja $X$ uma variedade ~~a~~ sobre um corpo algebricamente fechado. Pelo H.N. versão 4 (aula 21) temos corespondencia

$$\left\{ \begin{matrix} \text{ideais primos} \\ \text{em } A(X) \end{matrix} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{matrix} \text{Subvariedades} \\ \text{irredutiveis em } X \end{matrix} \right\}.$$

E a corespondencia "reflete" as inclusões. Assim $\dim X$ é o tamanho da maior cadeia

$$X_0 \supsetneq X_1 \supsetneq \dots \supsetneq X_n \neq \emptyset$$

das subvariedades irredutiveis de $X$.

Exemplos.

(a) todo corpo tem dimensão $0$, pois $0$ é unico ideal primo neste caso.

(b) Mais geralmente,

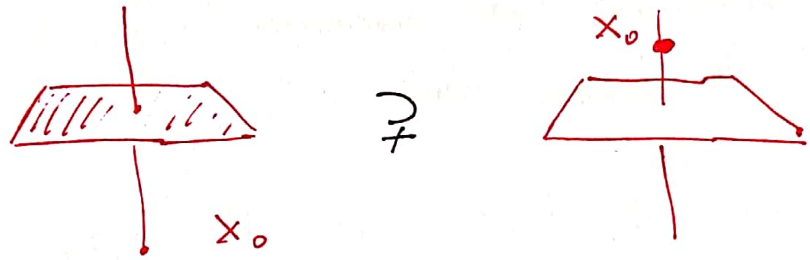
$\dim R = 0 \iff$ todo ideal primo é maximal

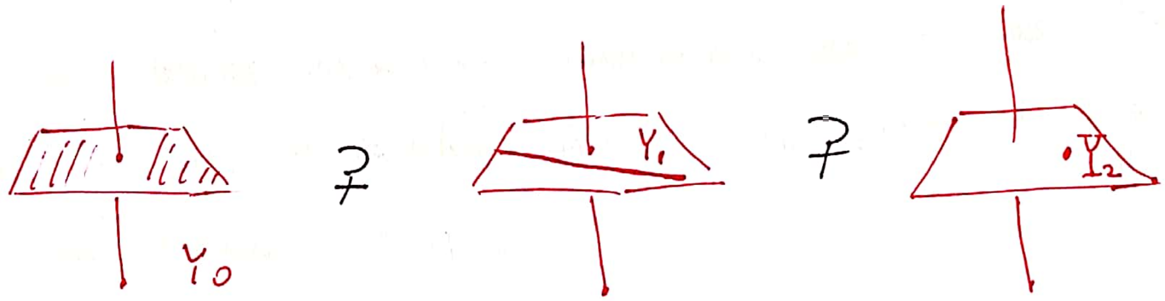
(c) Se $R$ um DIP e não é corpo. Assim todo ideal primo não-nulo é maximal. Por tanto $\dim R = 1$, neste caso.

$\dim \mathbb{Z} = 1$, $\dim k[x] = 1$.

Obs. [Cadeias maximais dos primos podem ter tamanho diferente].

Considere $X = V(x_1 x_3, x_2 x_3) \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ – união do plano e reta. Assim temos 2 cadeias de subvariedades irredutíveis em $X$ de tamanho 1,2.

1) 


2) 


Obs. [Propriedades da dimensão].

(a) Para todo ideal primo $P \triangleleft R$, temos que

$$\{\text{ideais primos em } P\} \longleftrightarrow \{\text{ideais primos na localização } R_P\}.$$

Assim $\operatorname{Codim} P = \dim R_P$.

(b) De novo, seja $P \triangleleft R$ um primo, seja $n = \dim R/P$ e $m = \operatorname{codim} P = \dim R_P$. Assim temos cadeias.

$$P_0 \subsetneq \dots \subsetneq P_m \subset P \quad \text{e} \quad P \subset Q_0 \subsetneq \dots \subsetneq Q_n$$

que podem ser "colados" para cadeia do tamanho $n+m$, assim, obviamente: $\dim R \geq \dim R/P + \operatorname{codim} P$.

Ou, geometricamente, $\dim X \geq \dim Y + \operatorname{codim} Y$ para todo $Y \subseteq X$ irredutível.

(c) Dimensão é um "conceito local".

$$\dim R = \sup\{\dim R_P : P \text{ é ideal maximal em } R\}$$
$$= \sup\{\operatorname{codim} P : P \text{ é ideal maximal em } R\}.$$

Que signifique que

$\dim X$ "=" maximo das dimensões locais em todo ponto de $X$.

<u>Lema</u> Seja $R$ um anel de dimensão finita onde todas cadeias maximais de primos tem o mesmo tamanho. Alem disso, seja $P \triangleleft R$ um ideal primo. Assim:

(a) O quociente $R/P$ tmb tem dimensão finita e todas cadeias max. de primos tem o mesmo tamanho.

(b) $\dim R = \dim R/P + \operatorname{codim} P$.

(c) $\dim R_P = \dim R$ se $P$ é maximal.

<u>Prova</u>. (a) Obviamente $\dim R/P < \infty$.

Se tem cadeia em $R/P$: $Q_0 \subsetneq \dots \subsetneq Q_r$ (*)

ou, equivalente, ideais em $R$ que contem $P$. Se (*) é maximal, assim $Q_0 = P$ e podemos extender (*) ao cadeia maximal

$$P_0 \subsetneq \dots \subsetneq P_m = P = Q_0 \subsetneq \dots \subsetneq Q_r$$

de ideais primos em P. Assim

$$\operatorname{codim} P \geq m \quad e \quad \dim R/P \geq r$$

Alem disso $m+r$ pela hipotese. Portanto:

$$\dim R \geq \dim R/P + \operatorname{codim} P \geq \dim R/P + m \geq r + m = \dim R$$

usando observação acima. Portanto $r = \dim R/P$

Assim (a) e (b) valem.

(c) segue por (b) pois $\dim R/P = 0$, se P - maximal.
e fato que $\dim R_P = \operatorname{codim} P$. $\blacksquare$.

Agora vamos provar 2 fatos geometricamente intuitivos:

Fato 1. Extensão integral preserva dimensão:

pois "corresponde" ao mapa surjetiva das variedades com fibras finitas.

Fato 2. Dimensão de $k[x_1, \dots, x_n] = n$,

portanto $\dim \mathbb{A}^n_k = n$.

Lema 1 [Invariancia da dimensão sobre extensão integral].

Se $R \subset R'$ uma extensão integral, assim

$$\dim R = \dim R'.$$

Prova:

[$\leq$]: Seja $P_0 \subsetneq \ldots \subsetneq P_n$ cadeia dos ideais primos em $R$. Pelo Lying Over (para $P_0$) e Going UP (para $P_1, \ldots, P_n$) existe cadeia corespondente $P_0' \subsetneq \ldots \subsetneq P_n'$ em $R'$ (com inclusões proprias pois $P_i' \cap R = P_i$ para todo $i$).

[$\geq$]: Se $P_0' \subsetneq \ldots \subsetneq P_n'$ cadeia dos primos em $R'$, assim fazendo intersesão com $R$ temos cadeia $P_0 \subsetneq \ldots \subsetneq P_n$ em $R$, com inclusões proprias pela Incomparabilidade. $\square$

Proposição [Dimensão dos aneis polinomiais].

Seja $K$ um corpo, assim:

(a) $\dim K[x_1, \ldots, x_n] = n$

(b) todos cadeias maximais de primos tem comprimento $n$.

Prova Pelo indução por $n$. Caso $n=0$ é obvio. De fato caso $n=1$ tmb. vale pelo Exemplo acima.

Seja $n \geq 1$ e $P_0 \subsetneq \ldots \subsetneq P_m$ uma cadeia dos primos em $K[x_1, \ldots, x_n]$. Vamos mostrar que $m \leq n$ com igualdade para cadeia maximal.

Podemos asumir, sem perda da generalidade, que $P_0 = 0$, $P_1$ – primo minimal não-nulo,

$P_m$ - maximal.

Assim $P_1 = (f)$, com $f$ um polinomio não-nulo.

Alem disso podemos assumir que $(f)$ é monico sobre $x_n$, assim:

$$\frac{k[x_1,\dots,x_n]}{P_1} = \frac{k[x_1,\dots,x_n]}{(f)} \text{ é integral sobre } k[x_1,\dots,x_{n-1}].$$

Agora podemos transferir a cadeia dos primos de $k[x_1,\dots,x_n]$ ao $k[x_1,\dots,x_{n-1}]$ como de baixo:

$$\begin{tikzcd}
k[x_1,\dots,x_n]: & P_1 \arrow[d, "\text{extensão}"] & \subsetneq \cdots \subsetneq & P_m \arrow[d, "\text{extensão}"] \\
k[x_1,\dots,x_n]/P_1: & P_1/P_1 \arrow[d] & \subsetneq \cdots \subsetneq & P_m/P_1 \arrow[d] \\
k[x_1,\dots,x_{n-1}]: & (P_1/P_1)\cap k[x_1,\dots,x_{n-1}] & \subsetneq \cdots \subsetneq & (P_m/P_1)\cap k[x_1,\dots,x_{n-1}]
\end{tikzcd}$$

Ambos os passos preservam ideais primos e inclusões proprias. [Ex. p/ casa].

Agora, pelo hipotese da indução o tamanho $m-1$ de cadeia de baixo é no maximo $n-1$ e igual $n-1$ se é maximal. Assim $m \leq n$ e igualdade vale se cadeia é maximal $\square$.

Obs. [Normalização de Noether e dimensão].

Seja $R$ uma $K$-algebra finit. gerada.
E $K[z_1, \dots, z_n] \to R$ normalização de Noether como da aula pasada. Pelos 2 fatos acima temos

$$n = \dim K[z_1, \dots, z_n] = \dim R.$$

Em particular isso implique que toda algebra finitamente gerada sobre um corpo (e portanto a variedade) tem sempre dimensão finita. [que de fato não obvio da definição].

Obs. 2 [Dimensão finita $\not\Leftrightarrow$ Noetheriano].

- Tem exemplos de aneis não-Noetherianos com dimensão finita [Ex. da Lista 6].
- Por outro lado existem aneis Noetherianos com dimensão infinita [mas isso é mais complicado construir]. Veja, por exemplo, livro do Eisenbud, Capitulo 9.